Modellistica ambientale
a.a. 2009/10
Dinamiche di crescita

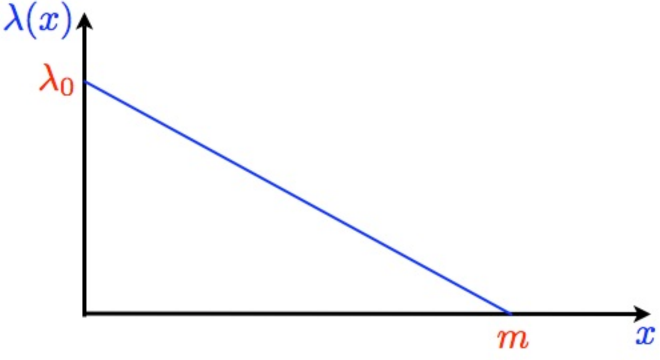
Dinamiche di crescita

Consideriamo la crescita di una popolazione, assumendo che ci siano limiti alle risorse utilizzabili

- x_0 entità della popolazione al tempo $t = 0$
- λ_0 massimo tasso di crescita (nel caso di risorse illimitate)
- $\lambda(x)$ tasso di crescita in funzione della popolazione $x(t)$
- m massima popolazione sostenibile, date le risorse (capacità di carico dell'ecosistema)

Possibile andamento della funzione $\lambda(x)$

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{m - x}{m}$$

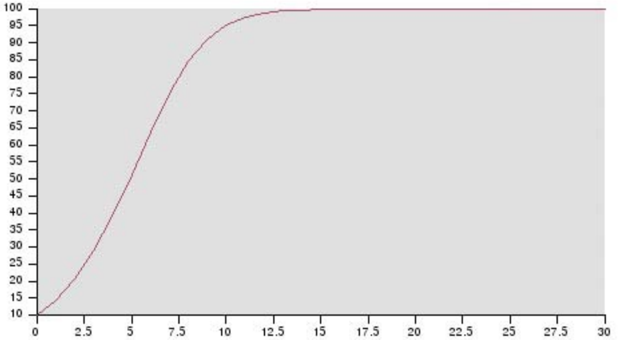


Possibile andamento della funzione $x(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\lambda(x) = x(t)\lambda_0 \frac{m - x(t)}{m}$$

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{1 + \frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t} - 1)}$$

Questa funzione viene detta **logistica** e il suo andamento è:



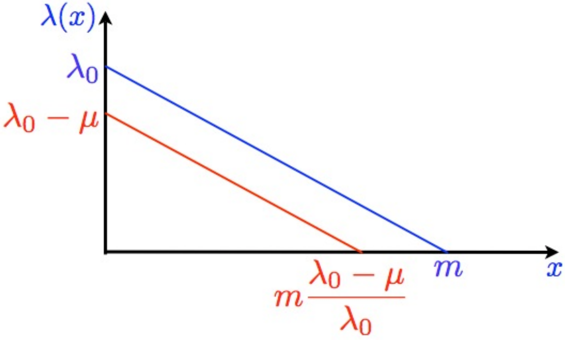
Presenza di un tasso di mortalità costante

Supponiamo ora che $\lambda_0 \frac{m-x}{m}$ sia il tasso di natalità e che ci sia un **tasso di mortalità** μ costante. Il tasso di crescita sarà allora:

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{m-x}{m} - \mu = \lambda_0' \frac{m'-x}{m'}$$

con

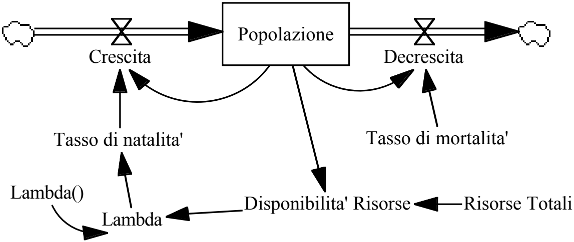
$$\lambda_0' = \lambda_0 - \mu \text{ e } m' = m\frac{\lambda_0-\mu}{\lambda_0}$$



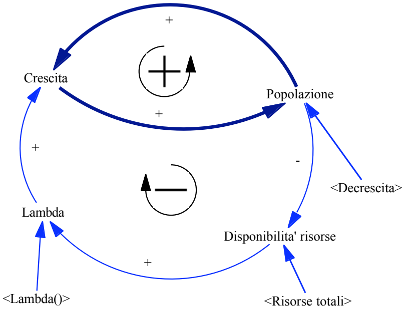
Modello Vensim

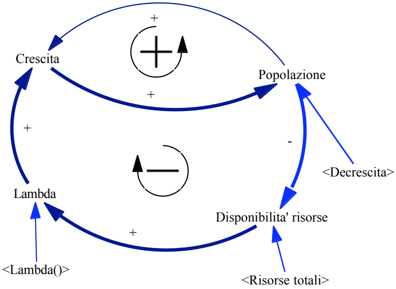
In presenza di un un **tasso di mortalità** μ costante si ha:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$



Cicli causali





Condizioni di equilibrio

$$x(t+\Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

Nella dinamica della popolazione si raggiunge una condizione di equilibrio quando il numero di nati è uguale al numero dei morti, e quindi si ha che $x(t)$ è costante.

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{m - x(t)}{m} = \mu$$

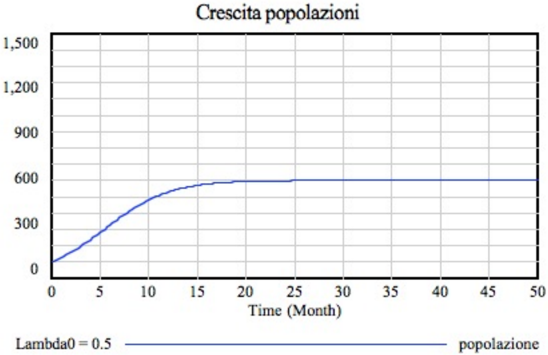
$$\lambda_0 m - \lambda_0 x(t) = \mu m \quad \Rightarrow \quad x(t)\lambda_0 = m(\lambda_0 - \mu) \quad \Rightarrow \quad x^*(t) = m\frac{\lambda_0 - \mu}{\lambda_0}$$

$x^*(t)$ rappresenta il **valore di equilibrio della popolazione**

Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (1)

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 0.5$
- $x^* = 1000\frac{0.5-0.2}{0.5} = 600$



Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (2)

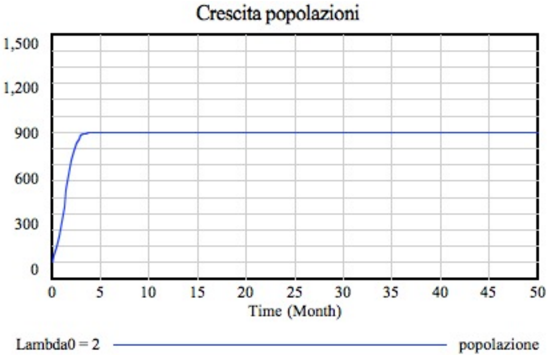
$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 1$
- $x^* = 1000\frac{1-0.2}{1} = 800$

Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (3)

$$x(t+\Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

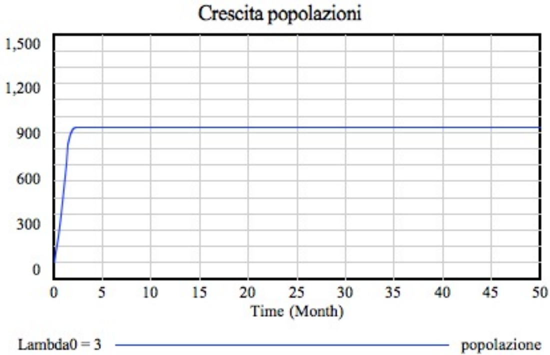
- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 2$
- $x^* = 1000\frac{2-0.2}{2} = 900$



Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (4)

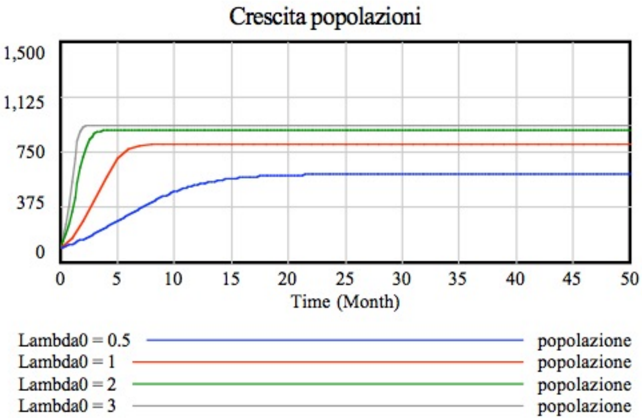
$$x(t+\Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 3$
- $x^* = 1000\frac{3-0.2}{3} = 933.33$



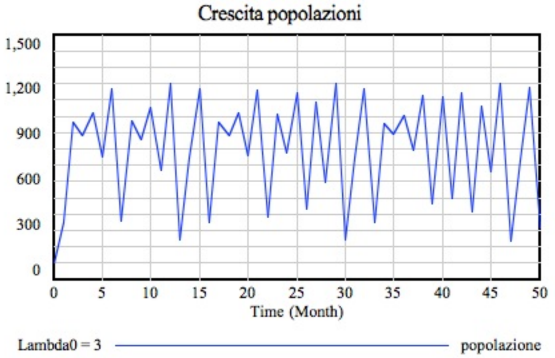
Andamenti (1) – (4) a confronto

$$x(t+\Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$



Caveat

Per i valori 2 e 3, abbiamo usato un valore di Δt pari a 0.25. Seavessimo usato un valore pari a 1 avremmo avuto andamenti caotici del tipo di quello riportato sotto.



dove:

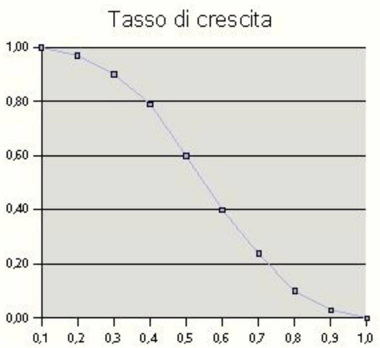
$$\mu = 0.2 \quad \lambda_0 = 3 \quad \Delta t = 1$$

Andamenti non lineari

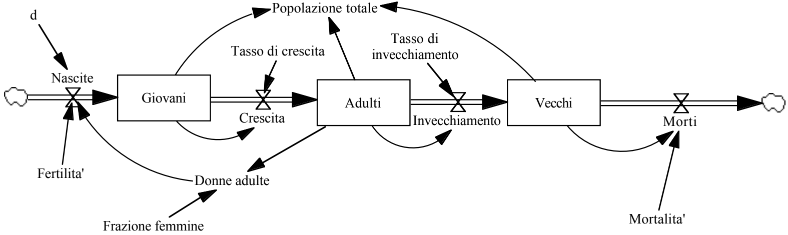
L'ipotesi che il tasso di crescita sia una funzione lineare della x non è molto realistica. È più realistica una funzione del tipo di quella della seguente tabella, dove le scale degli assi coordinati sono state normalizzate fra 0 ed 1.

Esercizio Si costruisca un modello di crescita della popolazione usando questa funzione e lo si faccia girare con i valori di tasso di crescita e capacità di carico visti precedentemente.

0,0	1,00
0,1	1,00
0,2	0,97
0,3	0,90
0,4	0,79
0,5	0,60
0,6	0,40
0,7	0,24
0,8	0,10
0,9	0,03
1,0	0,00



Un'altro modello di crescita della popolazione



Ipotesi del modello (1)

Si fanno le seguenti ipotesi:

- Giovani: fascia di età compresa fra 0 e 16 anni
- Adulti: fascia di età compresa fra 17 e 42 anni
- Vecchi: da 42 anni in poi, con una età media della popolazione di 72 anni.
- Le morti avvengono solo fra la popolazione di *Vecchi*
- Il numero dei nati è determinato dal numero di *Donne adulte* e dal *Tasso di fertilità*

Ipotesi del modello (2)

Inoltre si ha:

- il numero di giovani che ogni anno diventano adulti è pari ad 1/16 dei giovani presenti;
- tale ipotesi costituisce una semplificazione accettabile se la popolazione non varia velocemente.

$$Crescita(t) = Giovani(t) x Tasso\_di\_crescita$$

$$Tasso\_di\_crescita = \frac{1}{16}$$

Ipotesi del modello (3)

$$Invecchiamento(t) = Adulti(t)xTasso\_di\_invecchiamento$$

$$Tasso\_di\_invecchiamento = \frac{1}{25}$$

$$Morti(t) = vecchi(t)xMortalità$$

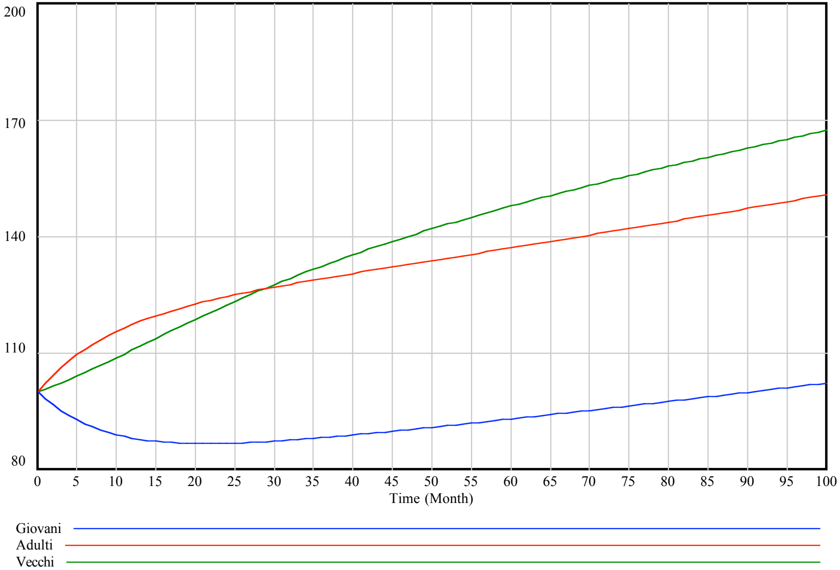
$$Mortalità = \frac{1}{30}$$

Variabili esogene

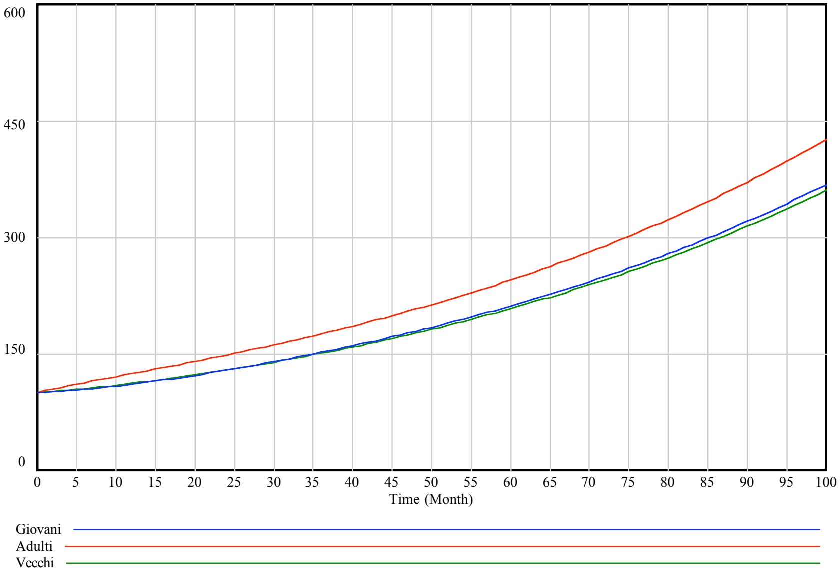
Il modello contiene le seguenti variabili esogene i cui valori possono essere variati in modo da valutare diversi andamenti dei tre livelli **Giovani**, **Adulti** e **Vecchi**:

- *Fertilità* misurata in numero di figli per *donna adulta*;
- *Frazione femmine* come percentuale di femmine rispetto ai maschi.

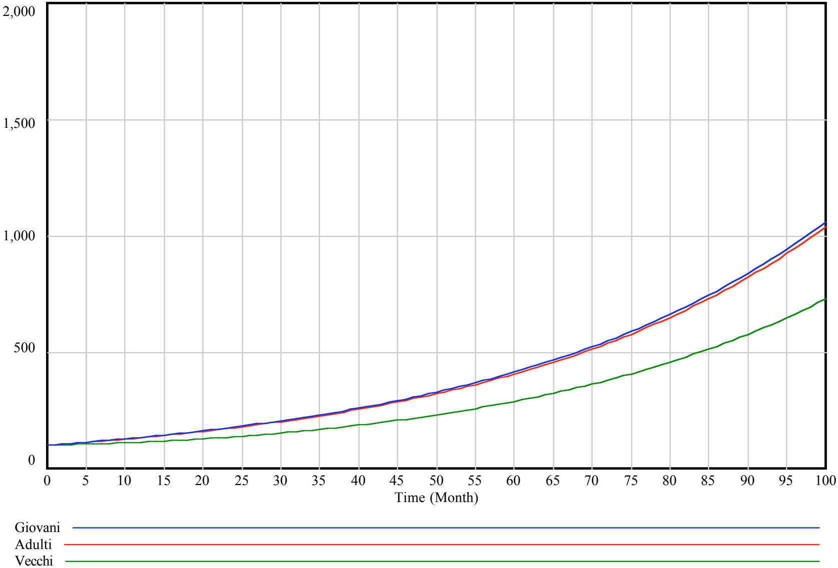
Caso (1): 2 figli per donna adulta



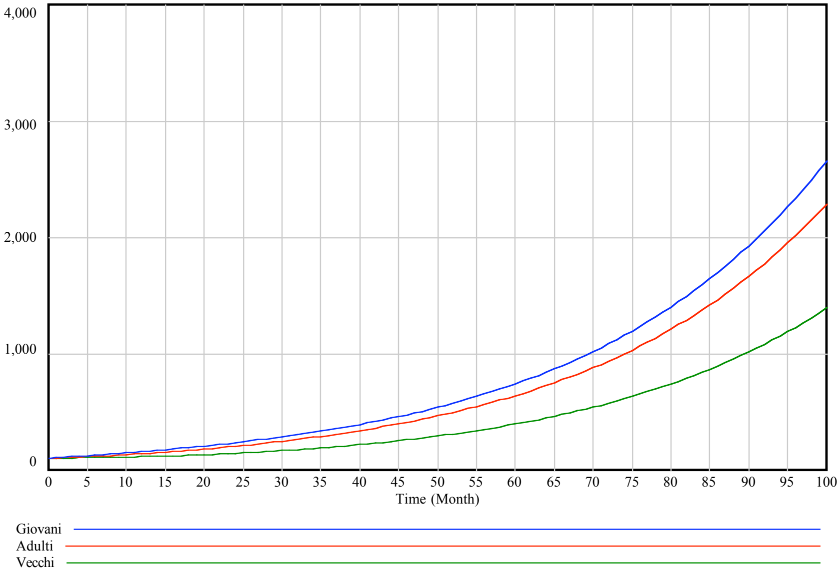
Caso (2): 3 figli per donna adulta



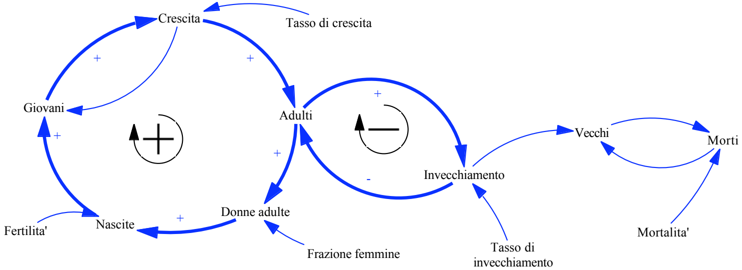
Caso (3): 4 figli per donna adulta



Caso (4): 5 figli per donna adulta



Cicli causali nel nuovo modello di crescita



Sono evidenziati:

- un **ciclo positivo** a sinistra;
- un **ciclo negativo** a destra.

Commenti(1)

Nei casi visti la popolazione tende sempre a crescere. Per che valori di fertilità si raggiunge una situazione di equilibrio?
L'equilibrio si ha quando per ogni livello l'input è uguale all'output, quindi, indicando con n il tasso di fertilità, quando risulta:

$$\frac{n}{25} \times 0.55 \times Adulti = \frac{Giovani}{16} = \frac{Adulti}{25} = \frac{Vecchi}{30}$$

Si ha allora: $Adulti = \frac{25}{16} \times Giovani$, e quindi

$$\frac{n}{25} \times 0.55 \times \frac{25}{16} \times Giovani = \frac{Giovani}{16}$$

da cui

$$n = \frac{1}{0.55} = 1.8181$$

Questo è il tasso di fertilità a cui corrisponde una situazione di equilibrio.

Commenti(2)

- Nel modello abbiamo assunto che le morti avvengano solamente fra la popolazione dei vecchi.
- Si tratta di una ipotesi semplificativa. In realtà c'è un tasso di mortalità non nullo anche tra i giovani e gli adulti.
- Si modifichi il modello inserendo un tasso di mortalità di valore 0.02 per i giovani e di valore 0.03 per gli adulti. Si ripetano poi gli esperimenti in questa nuova situazione.

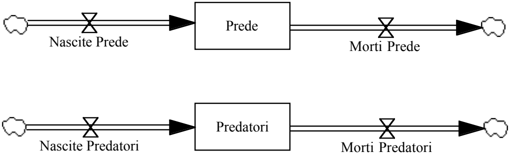
Interazione di due popolazioni: il modello *Preda-Predatore*

Il modello *Preda-Predatore* è stato sviluppato dal matematico italiano Vito Volterra (1860-1940) per studiare un fenomeno che era stato evidenziato dallo zoologo Umberto D'Ancona.
Analizzando le statistiche relative alla pesca nel nord dell'Adriatico, D'Ancona aveva osservato che durante gli ultimi anni della prima guerra mondiale e negli anni immediatamente seguenti si era verificato un sostanziale aumento della percentuale dei predatori (Selaci) pescati.
L'unica circostanza che appariva collegabile a questo incremento era la diminuzione dell'attività di pesca causata dalle attività belliche.

Le variabili di tipo livello

$$Prede(t+\Delta t) = Prede(t) + Nascite\_Prede(t) - Morti\_Prede(t))\Delta t$$

$$\begin{aligned} Predatori(t+\Delta t) = \quad & Predatori(t) + \\ & (Nascite\_Predatori(t) - Morti\_Predatori(t))\Delta t \end{aligned}$$



Le variabili di tipo flusso

$$Nascite\_Prede(t) = A \cdot Prede(t)$$

$$Morti\_Prede(t) = Prede\_Catturate(t) + Prede\_Pescate(t)$$

$$Morti\_Predatori(t) = C \cdot Predatori(t) + Predatori\_Pescati(t)$$

$$Nascite\_Predatori(t) = D \cdot Incontri\_Prede\_Predatori(t)$$

Le variabili ausiliarie

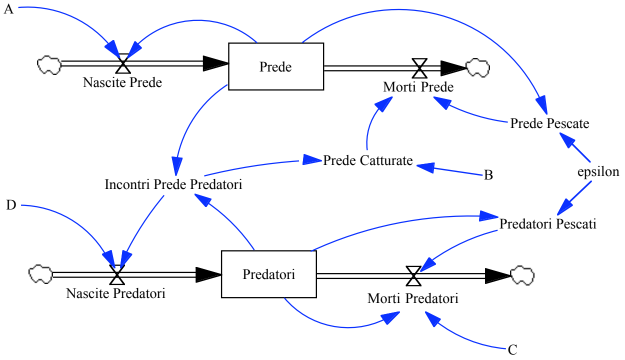
$$Prede\_Catturate(t) = B \cdot Incontri\_Prede\_Predatori(t)$$

$$Incontri\_Prede\_Predatori(t) = Prede(t) \cdot Predatori(t)$$

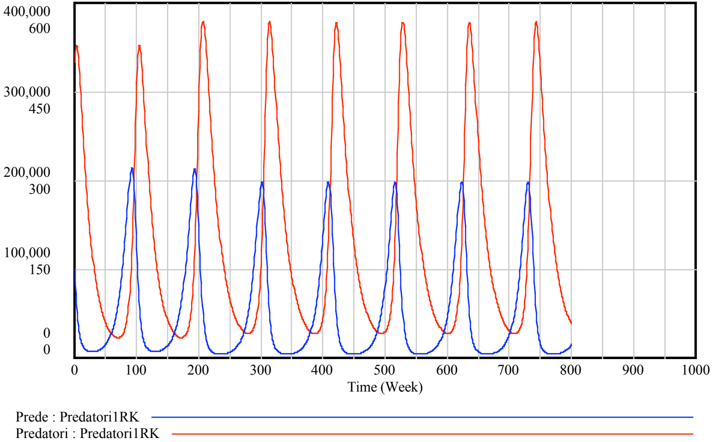
$$Prede\_Pescate(t) = \varepsilon \cdot Prede(t)$$

$$Predatori\_Pescati(t) = \varepsilon \cdot Predatori(t)$$

Il modello completo



Gli andamenti delle popolazioni



Al tempo 200 è stata interrotta la pesca

La funzione logistica

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{1 + \frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t} - 1)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\lambda_0 x_0 e^{\lambda_0 t}(1+\frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t}-1)) - \lambda_0 x_0 e^{\lambda_0 t}\frac{x_0}{m}e^{\lambda_0 t}}{(1+\frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t}-1))^2} \\
&= \lambda_0 \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{(1+\frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t}-1))} \frac{(1+\frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t}-1)) - \frac{x_0}{m}e^{\lambda_0 t}}{(1+\frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t}-1))} \\
&= \lambda_0 x(t)(1 - \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{m(1+\frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t}-1))}) \\
&= \lambda_0 x(t)(1 - \frac{x(t)}{m}) = \lambda_0 x(t)(\frac{m-x(t)}{m})
\end{aligned}$$