RICERCA OPERATIVA (a.a. 2003/04)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: I SI M **Matricola** Corso A B C

1) Per potenziare il servizio sanitario in un'area rurale poco sviluppata, si decide l'apertura di nuovi presidi ospedalieri per servire sei comunità, nel seguito indicate mediante le lettere A, B, C, D, E e F. Dopo un'attenta analisi, si individuano tre zone candidate all'apertura di un nuovo presidio: α, β e γ. Le comunità A, B e C distano 20 Km da α, 8 km da β e 10 km da γ. Le comunità D e E, invece, distano 5 km da α, 10 km da β e 30 km da γ. F, infine, dista 5 km da α e 40 km da β e γ.

Per garantire un servizio di qualità, si vuole che ogni comunità disti non più di 10 km da almeno uno dei presidi ospedalieri aperti.

L'apertura di un presidio in α richiede un investimento di 50.000 Euro, in β di 70.000 Euro ed in γ di 60.000 Euro. Sapendo che, per il potenziamento sanitario, è stato messo a disposizione un budget di 110.000 Euro, si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire in quali delle tre zone candidate aprire un presidio, in modo da garantire la qualità del servizio (cioè distanza non superiore a 10 km per ogni comunità), non superare il budget e minimizzare il numero di presidi ospedalieri aperti.

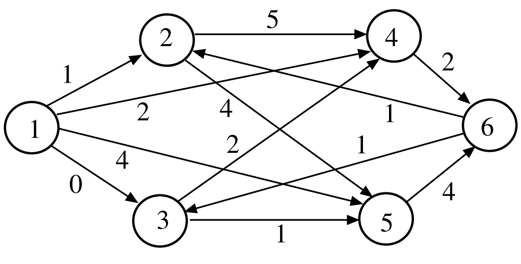
2) Fornire le definizioni di soluzione di base primale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere, e di soluzione di base duale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere.

Si consideri il seguente problema di PL:

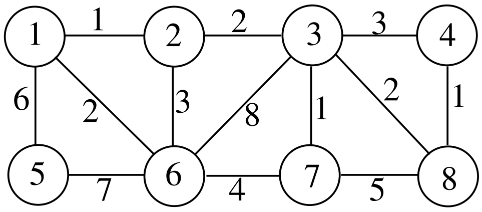
$$
\begin{array}{lrrrl}
\max & & & x_3 & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1 \\
 & x_1 & & +x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & & & \leq 1 \\
 & & x_2 & & \leq 1 \\
 & & & x_3 & \leq 1
\end{array}
$$

Fornire una soluzione di base primale degenere e non ammissibile ed una soluzione di base duale degenere e non ammissibile. Giustificare la risposta applicando le definizioni date sopra.

3) Si risolva il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 2 per l'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo SPT.S. Per ogni iterazione si indichino l'insieme Q all'inizio dell'iterazione, il nodo u estratto da Q ed i valori delle etichette e dei predecessori dei nodi. Si fornisca alla fine l'albero trovato.



4) Sia dato il grafo $G = (N, A)$ in figura. Applicare l'algoritmo di Kruskal per determinare l'albero di copertura di costo minimo. Fornire ad ogni iterazione l'arco in esame, indicando se esso viene o meno selezionato, l'insieme S degli archi selezionati e il suo costo. Al termine, fornire l'albero ottimo.
Si aggiungano quindi al grafo due nuovi archi $(2, 5)$ e $(4, 7)$ i cui costi sono $c_{25} = c_{47} = 4$. Partendo dall'albero ottenuto, determinare il nuovo albero ottimo motivando le operazioni che si effettuano.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Si consideri la soluzione $\overline{x} = (3, 3)$. Si verifichi che sia ammissibile; quindi, mediante il Teorema Forte della Dualità, si controlli se essa sia una soluzione ottima, giustificando le risposte.

6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & & & & \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.