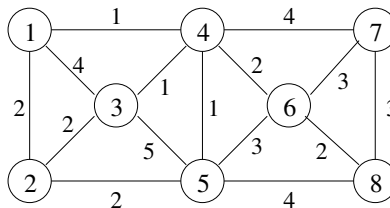


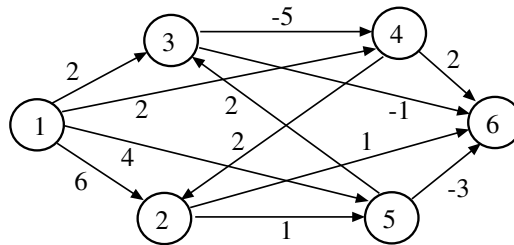
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2004/05)

1) Il famoso hacker “Cappello Nero” sta pianificando un attacco DDoS (Distributed Denial of Service) contro un sito di hacker rivali. Sia $G = (N, A)$ il grafo orientato che descrive la porzione della rete Internet rilevante per l’attacco, e sia u_{ij} la massima capacità di messaggi inviabili (al secondo) lungo l’arco $(i, j) \in A$. Il sito rivale è rappresentato da un nodo $t \in N$. Cappello Nero ha violato computer in un sottoinsieme $C \subset N \setminus \{t\}$ di nodi del grafo: ciascuno di tali nodi violati può inviare, se attivato, al più b_i messaggi (al secondo) sulla rete. Per cautelarsi in vista della prevedibile rappresaglia dei rivali, Cappello Nero intende attivare per l’attacco non più di metà dei nodi violati (cioè nodi appartenenti all’insieme C). Si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere quali nodi in C attivare per l’attacco, e come instradare i messaggi dai nodi attivati verso t lungo la rete, tenendo conto delle capacità degli archi di G , in modo tale da massimizzare il numero di messaggi (al secondo) che giungono al sito rivale t .

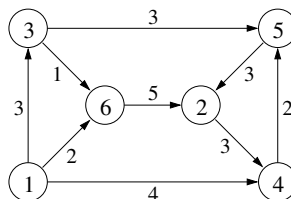
2) Si consideri il problema di determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Supponiamo che, dopo l’esecuzione di sei iterazioni dell’algoritmo *Greedy-MST*, la soluzione parziale sia costituita dall’insieme di archi $S = \{(1, 4), (2, 3), (4, 5), (6, 8)\}$, mentre $R = \{(2, 5), (4, 7)\}$ costituisca l’insieme degli archi cancellati. Si indichi quali tra i tagli $(\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6, 7, 8\})$ e $(\{1, 4, 6, 7, 8\}, \{2, 3, 5\})$ e quali tra i cicli $(4, 6, 7)$ e $(1, 2, 3, 5, 4)$ individuano, rispettivamente, un’operazione di inserzione ed un’operazione di cancellazione nel corso dell’iterazione successiva dell’algoritmo. Nei casi in cui un’operazione sia effettivamente eseguibile, si specifichi quale arco viene inserito o cancellato. Giustificare le risposte.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l’algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, l’insieme dei nodi candidati Q . Ad ogni iterazione si visitino gli archi in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l’albero dei cammini minimi individuato.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 2 sulla rete in figura, utilizzando l’algoritmo di Edmonds e Karp. Durante la ricerca di un cammino aumentante, si visitino gli archi della stella uscente del nodo correntemente esaminato secondo l’ordine crescente dei rispettivi nodi testa (ad es., $(1, 2)$ è visitato prima di $(1, 3)$). Ad ogni iterazione si fornisca l’albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall’algoritmo, specificando l’insieme dei nodi N_s , l’insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



5) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \max & x_1 & + & 3x_2 & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & & - & x_2 & \leq & 3
 \end{array}$$

Utilizzando il Lemma di Farkas, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (0, 5)$ è ottima per tale problema. In caso negativo, si determini una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$. Giustificare le risposte.

6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \max & & & 2x_2 & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & & & x_2 & \leq & -2
 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplex Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k , il vettore η_B , il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h , giustificando le risposte.