

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2004/05)

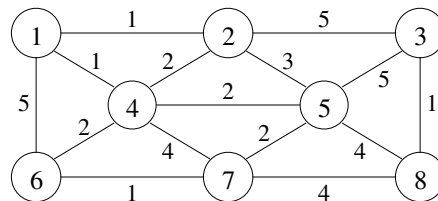
1) InvioVeloce S.p.a. deve inviare δ_1 bancali dalla città s_1 alla città t_1 , e δ_2 bancali dalla città s_2 alla città t_2 . Per l'invio utilizza una rete di comunicazione descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$, di cui s_1, t_1, s_2 e t_2 sono nodi. Sia l'invio da s_1 a t_1 che l'invio da s_2 a t_2 devono avvenire lungo un unico cammino di G . Per inviare un bancale lungo il collegamento $(i, j) \in A$, InvioVeloce deve pagare un costo di transito c_{ij} . Il budget complessivo disponibile per gli invii è pari a C . Inoltre, per onorare la propria fama, InvioVeloce vuole inviare i bancali minimizzando il massimo numero di archi utilizzato da ciascun cammino (ovvero la massima cardinalità dei cammini utilizzati per l'invio). Si formuli in termini di P.L.I. il problema di inviare i bancali da s_1 a t_1 e da s_2 a t_2 rispettando il vincolo di budget e minimizzando la massima cardinalità dei cammini utilizzati.

2) Sia $G = (N, A)$ un grafo orientato, e siano dati costi c_{ij} per gli archi di G . Si supponga che sia noto un vettore di etichette dei nodi $d \in \mathbb{R}^n$ che verifica le seguenti *condizioni di Bellman*

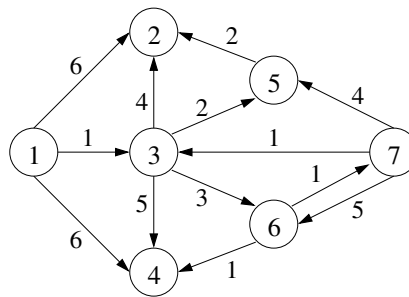
$$d_i + c_{ij} \geq d_j \quad \forall (i, j) \in A,$$

tale che $d_r = 0$; che relazioni sussistono tra tali etichette ed i costi dei cammini minimi da r a tutti gli altri nodi? Enunciare e dimostrare.

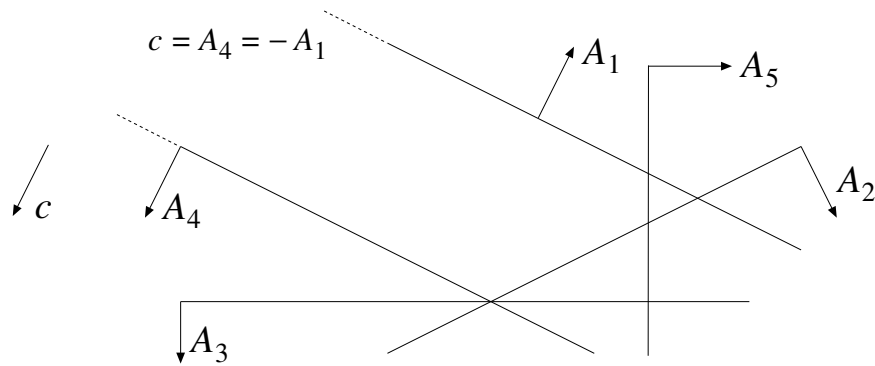
3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame e quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$.



4) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 7 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q . Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



5) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simpleso Primal, il problema di PL di figura a partire dalla base $B = \{1, 5\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$, il segno delle variabili duali in base, la direzione di spostamento ξ , e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rclcl}
 \max & -x_1 & + & x_2 & \\
 & & & 2x_2 & \leq 4 \\
 & -x_1 & & & \leq 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq -2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq 1
 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simpleso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k , il vettore η_B , il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h , giustificando le risposte. Si indichi quindi se la soluzione primale ottenuta è ottima anche per il problema modificato in cui il termine noto del primo vincolo è -3 invece di 4, giustificando la risposta.