RICERCA OPERATIVA (a.a. 2005/06)

Nome Cognome:

1) L'organizzazione degli ambulanti abusivi della provincia di Pisa deve pianificare la copertura del litorale pisano per l'imminente stagione balneare. L'organizzazione dispone di n venditori per servire le m zone in cui ha diviso il territorio. Ogni venditore deve operare in una sola zona proponendo esattamente una delle tre tipologie di mercanzie trattate dall'organizzazione. Per ciascun venditore i, $i = 1,..,n$, è noto il ricavo medio r_{ik} ottenibile proponendo ognuna delle tipologie di prodotti k, $k = 1,2,3$. Per non lasciare spazio ad eventuali concorrenti, l'organizzazione vuole occupare il mercato disponendo in ogni zona venditori la cui somma dei ricavi sia non inferiore a un livello R_k per la tipologia k. Per evitare fenomeni di saturazione, in ogni zona devono operare non più di 10 venditori. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare gli n venditori alle m zone decidendo contestualmente la tipologia di prodotti venduta, rispettando i limiti sui ricavi minimi e sul numero di venditori per zona e massimizzando il ricavo totale atteso dall'organizzazione.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

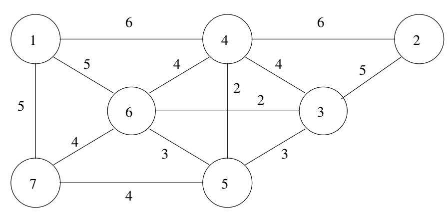
$$(P) \quad \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b,\ x \geq 0\ \}.$$

Supponiamo che il sistema

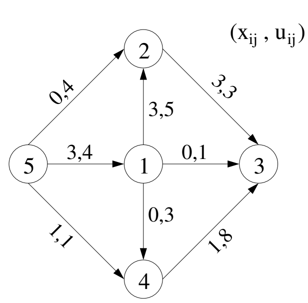
$$(S) \quad \begin{cases} A\xi & \leq & 0 \\ \xi & \geq & 0 \\ c\xi & > & 0 \end{cases}$$

ammetta una soluzione $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che se (P) è non vuoto, allora è superiormente illimitato.

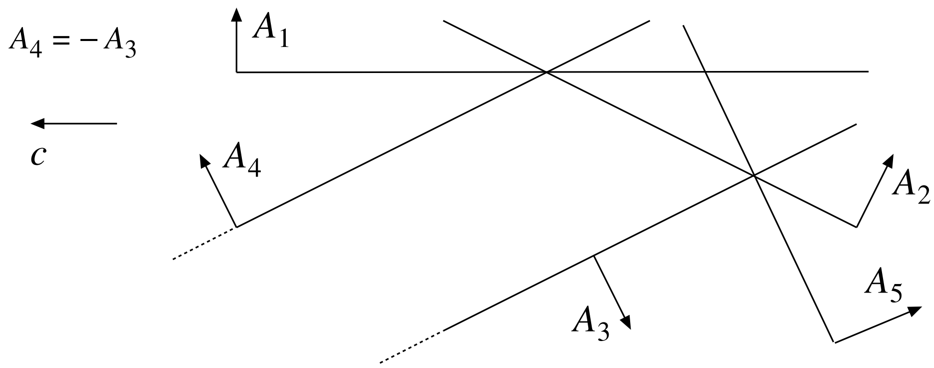
3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame e quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 5 al nodo 3 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato in figura. Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



5) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL di figura a partire dalla base $B = \{3, 5\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & -x_1 & + & x_2 & & \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & -4 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & - & x_2 & \leq & -8
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.