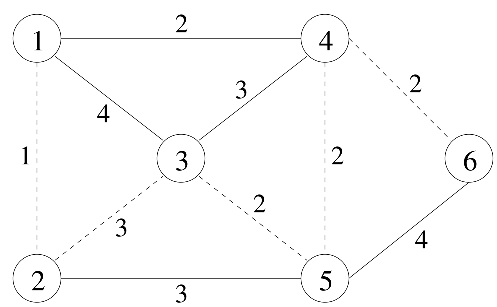
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2005/06)

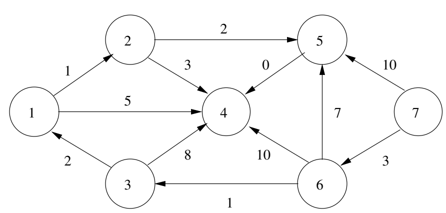
1) La famiglia Rossi deve recarsi in un centro commerciale per la spesa del fine settimana. Dopo aver esaminato la cartina stradale, descritta mediante un grafo orientato $G = (N, A)$, decide di recarsi o al centro Con, situato nel nodo t_1 di G, oppure al centro SLung, situato nel nodo t_2 di G. La famiglia Rossi si pone quindi il problema di individuare un percorso in G dal nodo s, dove si trova la sua abitazione, fino al nodo t_1 oppure fino al nodo t_2. Noto il tempo di viaggio t_{ij} associato ad ogni collegamento $(i, j) \in A$, i Rossi vogliono individuare un percorso il cui tempo complessivo di viaggio non superi un tempo massimo prefissato T.

Indicando con c_{ij} il costo di attraversamento di ogni collegamento $(i, j) \in A$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di individuare un cammino che parta da s ed arrivi o al nodo t_1 oppure al nodo t_2, il cui tempo di viaggio non superi T e che abbia costo totale di attraversamento minimo.

2) Si consideri il problema di determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Si indichi se l'albero di copertura individuato dagli archi tratteggiati è una soluzione ottima del problema. Giustificare la risposta.



3) Si verifichi se il grafo in figura è aciclico. Si determini poi un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ (dopo l'eventuale rinumerazione), utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si forniscano il nodo i selezionato, i vettori delle etichette e dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



4) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & x_1 & & & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 4
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & 3x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, -2)$ è ottima per il problema. In caso affermativo, si individui l'insieme delle soluzioni duali ottime. Giustificare le risposte.

6) Si risolva graficamente il problema di P.L. indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.