RICERCA OPERATIVA (a.a. 2005/06)

1) Il governo Cinese, preoccupato dall'aumento dei consumi di elettricità conseguente alla crescita economica, vuole costruire la più grande centrale idroelettrica del mondo. Per questo ha selezionato un sito ove costruire una grandissima diga, alla quale dovrà essere fatta pervenire quanta più acqua possibile. È dato un grafo orientato $G = (N, A)$ che descrive la porzione della rete fluviale che può rifornire la diga, rappresentata da un nodo $t \in N$; ciascun arco $(i, j) \in A$ rappresenta un fiume o canale, che ha portata massima u_{ij} m^3/s. In ogni nodo della rete sono presenti chiuse in grado di distribuire l'acqua in ingresso in qualsiasi modo desiderato sui fiumi/canali in uscita. Un sottoinsieme $C \subset N \setminus \{t\}$ dei nodi del grafo rappresenta siti in cui si possono costruire bacini in grado di raccogliere acqua che altrimenti sfuggirebbe al sistema; il bacino eventualmente costruito nel sito $i \in C$ potrà fornire alla grande diga una quantità di acqua non superiore a b_i m^3/s. Per considerazioni sia economiche che ambientali, possono essere però costruiti bacini in non più di metà dei possibili siti (cioè nodi appartenenti all'insieme C). Si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere quali bacini costruire, e come instradare l'acqua sui fiumi/canali disponibili rispettandone le portate massime, in modo tale da massimizzare la quantità di acqua (in m^3/s) che giunge alla grande diga localizzata nel nodo t.

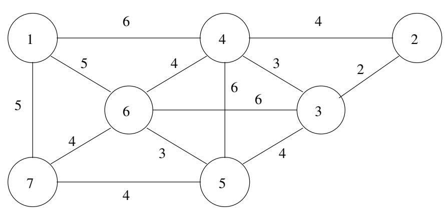
2) Fornire le definizioni di soluzione di base primale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere, e di soluzione di base duale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere.

Si consideri il seguente problema di PL:

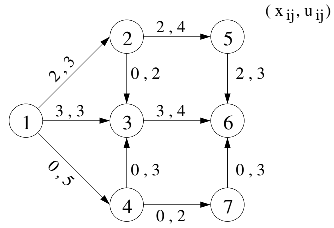
$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\max & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 3 \\
& x_1 & & & + & x_3 & \leq 2 \\
& x_1 & & & & & \leq 1 \\
& & & x_2 & & & \leq 1 \\
& & & & & x_3 & \leq 2
\end{array}
$$

Fornire una soluzione di base primale ammissibile e degenere ed una soluzione di base duale non ammissibile e degenere. Giustificare la risposta applicando le definizioni date sopra.

3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame e quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura di valore $v = 5$. Durante la ricerca di un cammino aumentante, si visitino gli archi della stella uscente del nodo correntemente esaminato secondo l'ordine crescente dei rispettivi nodi testa (ad es., (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Si consideri la soluzione $\bar{x} = (3, 3)$. Si verifichi che sia ammissibile; quindi, mediante il Lemma di Farkas si controlli se essa sia una soluzione ottima, giustificando le risposte.

6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.