

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2005/06)

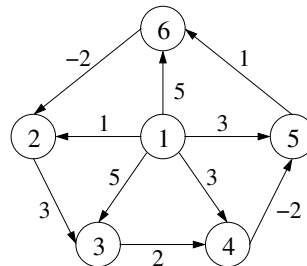
1) Nel paese di Stivalia, le cui istituzioni democratiche sono sempre un po' traballanti, l'On. Cav. Grand-Intrallazz. G.mmo.F.d.P. X, decide di formare la loggia di potere $\Pi 3$ in grado di condurre il paese verso il luminoso futuro di stabilità ed ordine che merita. Attraverso i suoi contatti con i servizi segreti, perennemente deviati, l'On. X conosce i segreti sporchi degli n più influenti personaggi del paese; in particolare, è in grado di dire se una data coppia di personaggi sia coinvolta in almeno uno stesso affare sporco. Poiché desidera che la $\Pi 3$ sia inattaccabile, vuole che ciascuno dei membri della loggia sia in grado di controllare (col ricatto se necessario) tutti gli altri membri; per questo, ciascun membro della loggia deve essere coinvolto in almeno un affare sporco con ciascun altro membro della loggia. Inoltre, i personaggi o appartengono ad uno dei due principali schieramenti politici, oppure sono non allineati. Per assicurarsi un opportuno grado di influenza qualsiasi sia lo schieramento che vincerà le prossime elezioni, l'On. X decide che non meno del 25% e non più del 40% dei membri della loggia deve appartenere a ciascuno dei due principali schieramenti, mentre non meno del 30% e non più del 50% devono essere non allineati. Sapendo che ad ogni personaggio i è stato assegnato un indice di potere p_i , $i = 1, \dots, n$, aiutate l'On. X a condurre Stivalia verso il luminoso futuro di stabilità ed ordine che merita scrivendo come *PLI* il problema di determinare la loggia $\Pi 3$ più potente (ovvero che massimizza la somma degli indici di potere dei suoi membri) che rispetti i vincoli sopra indicati.

2) Siano dati uno zaino di capacità U e 10 oggetti aventi volume a_i e profitto p_i , $i = 1, 2, \dots, 10$. Si deve individuare un sottoinsieme dei 10 oggetti da inserire nello zaino, nel rispetto della capacità U , in modo tale da massimizzare il profitto complessivo derivante da tale inserimento. Inoltre, esistono dei vincoli aggiuntivi che ogni sottoinsieme ammissibile deve rispettare:

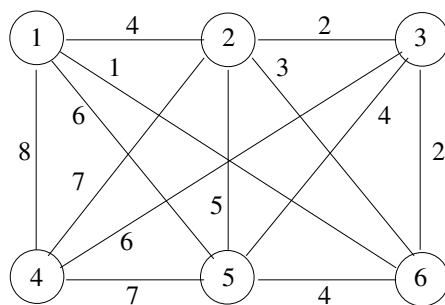
- al più uno tra gli oggetti 1, 2 e 3 può essere inserito nello zaino;
- almeno uno tra gli oggetti 3, 7 e 10 deve essere inserito nello zaino;
- l'oggetto 5 può essere inserito solo se viene inserito anche l'oggetto 9;
- se l'oggetto 9 viene inserito, allora deve essere inserito almeno uno tra gli oggetti 2 e 7.

Si formuli il problema in termini di P.L.I., giustificando le risposte.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q . Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.



4) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame e quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 1
 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, -1, -1)$ è ottima per il problema. Esiste una soluzione $\bar{y}$ ottima per il problema duale tale che $\bar{y}_3 = 0$? Giustificare le risposte.

6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & -x_1 & & & & \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 & & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1
 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplexso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k , il vettore η_B , il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h , giustificando le risposte.