RICERCA OPERATIVA (a.a. 2006/07)

1) Nel lontano futuro, la razza umana ha abbandonato la riproduzione diretta per affidarsi a tecniche di selezione genetica. In questo turno riproduttivo, n esemplari maschi ed n esemplari femmine sono stati accuratamente selezionati per dare il loro contributo al *pool* genetico. Per ogni coppia (i, j) con $i \in M$ e $j \in F$, dove M ed F sono rispettivamente l'insieme dei maschi e delle femmine, è stato stabilito un coefficiente c_{ij} di affinità cromosomica, e si vogliono determinare le n coppie riproduttive che massimizzano la somma dei corrispondenti coefficienti di affinità cromosomica. Per conservare una sufficiente diversificazione genetica nel *pool*, ciascun esemplare maschio dovrà formare una coppia riproduttiva con uno ed un solo esemplare femmina, e viceversa. L'insieme $M \cup F$ dei riproduttori è ulteriormente partizionato nelle tre caste C, S e T, rispettivamente dei creativi, dei soldati e dei tecnici. Per favorire il rimescolamento genetico del *pool*, per ciascuna casta $D \in \{C, S, T\}$ è stato stabilito il massimo numero m_D di matrimoni endogamici, ossia tra appartenenti alla stessa casta (che tipicamente hanno valori di affinità cromosomica molto alti).

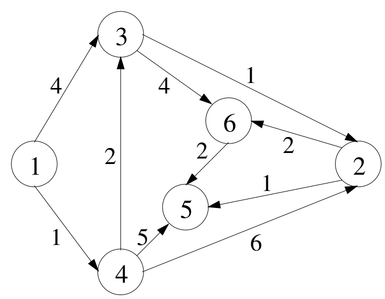
Si scriva sotto forma di *PLI* il problema di determinare le n coppie riproduttive che massimizzano la somma dei corrispondenti coefficienti di affinità cromosomica tenendo conto dei vincoli sulle caste.

2) Si consideri la seguente formulazione

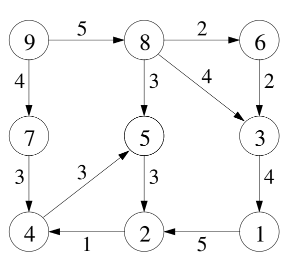
$$\min \left\{ \max_{i \in S} \; c_i x_i \quad : \quad \sum_{i \in S} a_i x_i \leq b, \quad x_i \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad i \in S \right\}$$

dove S è un insieme finito, e dove b, α_1, α_2, α_3, c_i e a_i, $i \in S$ sono dati di input. Si modifichi la formulazione in modo tale che il modello risultante sia espresso in termini di P.L.I., giustificando le risposte.

3) Si verifichi se il grafo in figura è aciclico. Si determini poi un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ (dopo l'eventuale rinumerazione), utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si forniscano il nodo i selezionato, i vettori delle etichette e dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 9 al nodo 2 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & & & x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_1 & & & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

6) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.