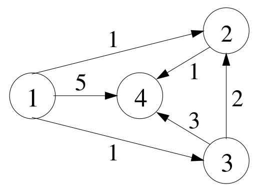
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2006/07)

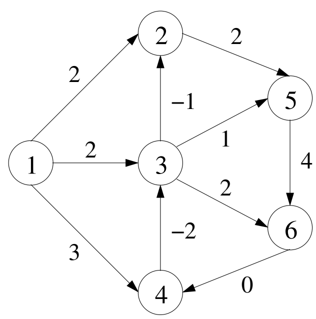
1) Tommaso sta pianificando il prossimo turno del suo gioco di strategia spaziale preferito. La mappa del gioco è composta da un insieme N di pianeti; per ciascun pianeta $i \in N$ è noto l'insieme $S(i)$ dei pianeti ad esso adiacenti. Tommaso ha già sotto il suo controllo un sottoinsieme $T \subset N$ dei pianeti. Nel prossimo turno, Tommaso vuole conquistare almeno altri k pianeti. Per ciascun pianeta $i \in N \setminus T$ Tommaso conosce il numero d_i di astronavi che andranno distrutte nell'attacco necessario per conquistarlo. Alla fine del turno, però, Tommaso riceverà un bonus di tre astronavi per tutti i pianeti sotto il suo controllo (anche quelli appena conquistati) che siano *protetti*: un pianeta è protetto se tutti i pianeti ad esso adiacenti sono sotto il controllo di Tommaso.

Si formuli i termini di *PLI* il problema di scegliere quali pianeti conquistare massimizzando il saldo netto di astronavi (astronavi ricevute come bonus meno quelle perdute per conquistare) alla fine del turno.

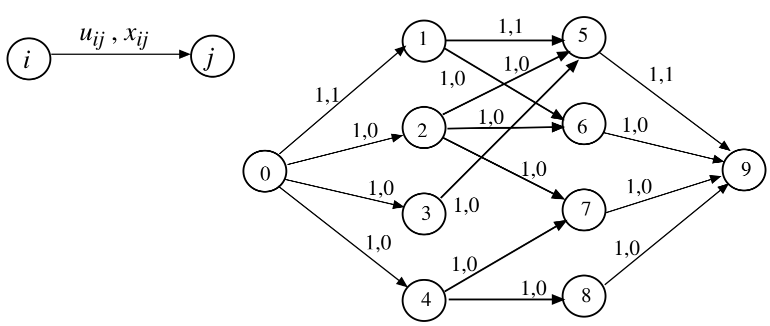
2) Si formuli in termini di PL il problema di individuare un cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 4 sul grafo G in figura. Si scrivano le condizioni degli scarti complementari che consentono di caratterizzare l'ottimalità di un cammino da 1 a 4 in G.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



4) Si risolva il problema del flusso massimo dal nodo 0 al nodo 9 relativamente alla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso di valore $v = 1$ riportato in figura. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



5) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & & & & \\ & & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & -3 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

6) Si risolva graficamente il problema di P.L. indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.