

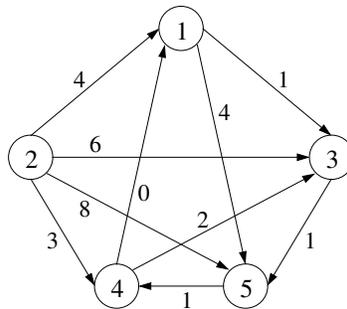
## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2006/07)

1) Si formuli, in termini di P.L.I., il problema di minimizzare il costo mensile di stoccaggio  $c(x)$  di un'azienda, che nel caso in cui la quantità  $x$  di merce stoccata nei magazzini sia compresa tra 0 e 30 tonnellate è definito dalla funzione lineare  $2x$ , ed invece vale  $x + 40$  nel caso in cui il numero  $x$  di tonnellate stoccate sia maggiore di 30 e minore o uguale della capacità totale dei magazzini, che è pari a 100 tonnellate. Per esigenze di produzione l'azienda necessita di stoccare almeno  $L$  tonnellate al mese. Si dimostri la correttezza della formulazione proposta.

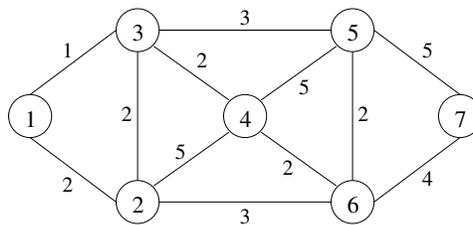
2) Dopo la caduta del governo, il Grande Leader del Partito Azzurro sta attentamente pianificando la rivincita elettorale per la Grande Coalizione, che comprende anche gli alleati del Partito Nero. Il territorio nazionale è diviso in  $n$  collegi uninominali, in cui vince un seggio il candidato che ottiene il maggior numero di voti. Il Partito ha una lista di  $n$  personalità disposte a candidarsi, ed i sondaggisti del Grande Leader gli assicurano che la Coalizione vincerà in tutti i collegi uninominali, indipendentemente dal candidato prescelto. Il numero di voti che un candidato prende è anche rilevante ai fini della quota proporzionale: per ciascun collegio  $i$  e personalità  $j$  si conosce il numero di voti  $v_{ij}$  che il candidato prenderebbe se si presentasse in quel collegio, ed il partito riceverà un ulteriore seggio ogni  $\delta$  voti ottenuti dai propri candidati eletti. Infine, esiste un premio di maggioranza su base regionale: gli  $n$  collegi sono raggruppati in 21 regioni  $R_h$ ,  $h = 1, \dots, 21$ , ed il partito che conquista la maggioranza dei collegi nella regione  $h$  ha diritto ad altri  $r_h$  deputati.

Il Grande Leader deve decidere la spartizione dei collegi. Gli accordi col Partito Nero stabiliscono che non più del 60% dei candidati della Coalizione potrà appartenere al Partito Azzurro, e che il Partito Azzurro non dovrà vincere il premio di maggioranza in più di 13 regioni su 21. Per evitare qualsiasi problema di ribaltone, il Grande Leader vuole determinare in quali collegi presentare un candidato del suo partito, ed eventualmente quale, in modo che il numero totale di deputati ottenuti sia massimo; se il numero totale di voti ottenuti non è multiplo di  $\delta$  nella massimizzazione si valuta anche la parte frazionaria. Si formuli come *PLI* il problema corrispondente.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato  $u$ , i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati  $Q$ . Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.



4) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo  $T = (N, A_T)$ .



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & x_1 & + & 2x_2 \\
 & x_1 & + & x_2 \leq 8 \\
 & 2x_1 & + & x_2 \leq 11 \\
 & & + & x_2 \leq 5 \\
 & 3x_1 & - & x_2 \leq 5
 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione  $\bar{x} = (3, 5)$  è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & x_1 & & \\
 & & - & x_2 \leq 0 \\
 & -2x_1 & + & x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 \leq 2 \\
 & & & x_2 \leq 2 \\
 & x_1 & & \leq 4
 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simpleso Primale, per via algebrica, a partire dalla base  $B = \{1, 2\}$ . Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.