

## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2007/08)

1) Il professore di Ricerca Operativa ha preparato un esercizio di Programmazione Lineare per il compito del prossimo 30 Giugno. Purtroppo, ha sbadatamente dimenticato il foglio con il testo e la soluzione dell'esercizio nel taschino della camicia, che ha poi lavato in lavatrice. Una volta recuperato ed asciugato il foglio, la maggior parte del testo e della soluzione risulta completamente illeggibile. Il professore riesce comunque a leggere che una soluzione ottima del problema primale è  $\bar{x} = (1, 1, 0)$  e che una soluzione ottima del problema duale è  $\bar{y} = (2, 0, 0, 1)$  ma non è altrettanto fortunato con la formulazione del problema. Con grande fatica riesce soltanto a decifrare i seguenti dati parziali:

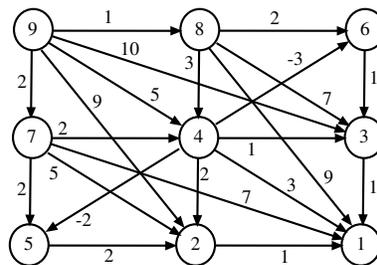
$$\begin{array}{rcll} \max & 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ & & & + & x_2 & - & x_3 & \leq 3 \\ & & & & + & x_2 & + & x_3 & \leq 0 \\ & -x_1 & & & & & + & 2x_3 & \leq 2. \end{array}$$

Mentre la funzione obiettivo è completa, i vincoli individuati sono incompleti ed altri mancano completamente. Utilizza le tue conoscenze di Programmazione Lineare per aiutare il professore a recuperare l'esercizio, individuando una formulazione completa del problema primale che sia compatibile con i dati disponibili. Giustificare la risposta.

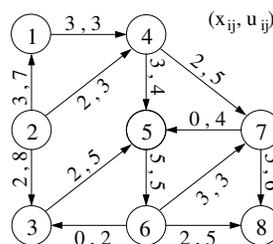
2) Si consideri una rete di trasporto descritta da un grafo orientato  $G = (N, A)$ , relativa all'invio di merci pericolose. Il nodo sorgente  $s$  deve inviare merci pericolose ad un nodo destinazione  $t$  lungo un cammino orientato di  $G$ . Al fine di monitorare l'instradamento della merce pericolosa in transito, si individua un sottoinsieme di nodi  $V$  candidati per l'installazione di dispositivi di controllo e, per motivi di sicurezza, si stabilisce che il cammino da  $s$  a  $t$  selezionato per l'invio includa almeno un dispositivo di controllo.

Sapendo che ad ogni collegamento della rete è associato un costo di utilizzo  $c_{ij}$ , e che l'installazione di un dispositivo di controllo in  $i$  comporta un costo di installazione  $C_i$ , si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere lungo quale cammino inviare la merce in modo da rispettare il vincolo relativo al monitoraggio della merce, minimizzando il costo totale dato dalla somma dei costi di utilizzo degli archi e dei costi di installazione dei dispositivi.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 9 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato  $u$ , ed i vettori dei predecessori e delle etichette. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 2 al nodo 8 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso in figura di valore  $v = 7$ . Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi  $N_s$ , l'insieme dei nodi  $N_t$  e la capacità del taglio.



5) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & x_1 & + & x_2 \\
 & x_1 & - & x_2 \leq 1 \\
 & x_1 & + & 3x_2 \leq 3 \\
 & & & x_2 \leq 1 \\
 & x_1 & + & 2x_2 \leq 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 \leq -2
 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simpleso Duale, per via algebrica, a partire dalla base  $B = \{1, 3\}$ . Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante  $k$ , il vettore  $\eta_B$ , il passo  $\theta$  e l'indice uscente  $h$ , giustificando le risposte.

6) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simpleso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base  $B = \{1, 6\}$ . Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base  $x$  e la direzione di spostamento  $\xi$  (riportandole direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte.

