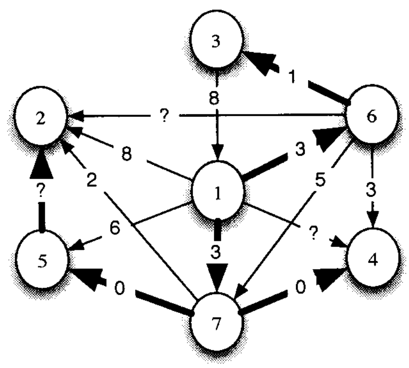
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2007/08)

1) Si consideri il grafo in figura, in cui i costi associati agli archi $(1,4)$, $(5,2)$ e $(6,2)$ non sono noti. Le uniche informazioni disponibili a riguardo sono che c_{14} è un intero in $\{2,3\}$, e che $c_{52} = c_{62}$. Si verifichi se sia possibile associare costi agli archi $(1,4)$, $(5,2)$ e $(6,2)$, nel rispetto delle condizioni indicate, in modo che l'albero di copertura T evidenziato in figura sia un albero dei cammini minimi di radice 1. Giustificare la risposta.

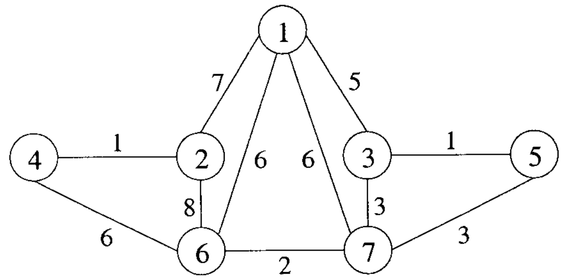


2) Tommaso, accanito giocatore di Medioeval Scavolization^{TM}, sta accuratamente preparando la prima e cruciale fase della sua nuova partita, quella della raccolta delle risorse.

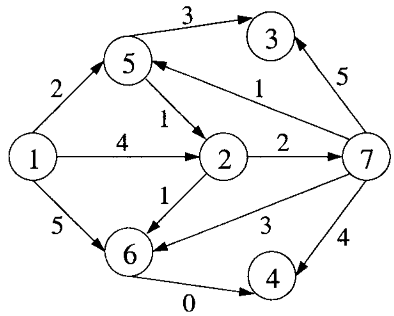
Sulla mappa di gioco, Tommaso ha fondato n villaggi, ciascuno vicino ad una foresta da cui proviene la principale risorsa: il legno. Il legno viene utilizzato nella capitale, situata nel villaggio numero 1, dove Tommaso sta costruendo la sua Grande Meraviglia "La Torre Eiffel di Legno", che gli permetterà, una volta costruita, di passare al successivo stadio di governo prima degli avversari. Per ciascun villaggio i è noto il massimo numero b_i di tronchi di legno che possono venir inviati alla capitale in ciascun turno. A questo scopo il legno deve essere trasportato lungo canali, che i Costruttori di Tommaso devono realizzare. Tommaso conosce il sottoinsieme di coppie (i, j) di villaggi per cui i suoi Costruttori possono realizzare in un turno un canale per trasportare il legno da i a j; conosce inoltre il massimo numero u_{ij} di tronchi di legno che potrebbero transitare in un turno su tale canale, se venisse costruito. Tommaso costruirà un canale per ciascuno dei prossimi T turni. Per ogni turno, poi, tutti i canali esistenti (compreso quella appena costruito) verranno utilizzati per inviare la maggior quantità possibile di legno alla capitale.

Si scriva come *PLI* il problema di decidere, per ciascun turno, quale canale costruire e come inviare il legno lungo i canali esistenti in modo tale da massimizzare la quantità totale di legno che ha raggiunto la capitale al termine dei T periodi.

3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$.



4) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcr}
\min & 3y_1 & & & + & 2y_3 & - & 2y_4 & & \\
 & 2y_1 & - & y_2 & - & y_3 & + & y_4 & = & 5 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & - & 3y_4 & = & -1 \\
 & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (2, 0, 0, 1)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

6) Si risolva graficamente il problema di P.L. indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.