RICERCA OPERATIVA (a.a. 2007/08)

1) Dopo avere finalmente superato l'esame di Ricerca Operativa, Tommaso è pronto per partire in vacanza. Tommaso sceglie n oggetti che desidera portare con sè, e si pone il problema di mattere tali oggetti nel suo set di m valigie, tutte indentiche tra loro. Individua tre sottoinsiemi di oggetti critici per il trasporto, vale a dire l'insieme S delle paia di scarpe, l'insieme A degli abiti facilmente spiegazzabili, e l'insieme I degli oggetti per l'igiene personale. Per ovvie ragioni decide che nessun paio di scarpe possa essere inserito in valigia insieme ad un oggetto di igiene personale, e neppure insieme ad un abito spiegazzabile.

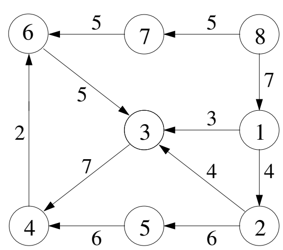
Sapendo che l'oggetto i ha peso p_i, e che ogni valigia è in grado di contenere oggetti per un peso complessivo pari a P, si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere come mettere gli oggetti nelle valigie minimizzando il numero di valigie utilizzate, nel rispetto dei vincoli di peso e dei vincoli di compatibilità tra oggetti.

2) Si considerino un grafo $G = (N, A)$ con assegnata una capacità positiva u_{ij} ad ogni arco $(i, j) \in A$ e due nodi $s, t \in N$. Riformulare il problema di Programmazione Matematica

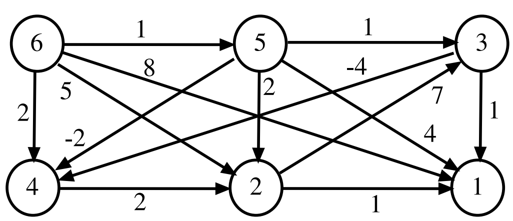
$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} u_{ij} \max\{0, \pi_i - \pi_j\} \\ & \pi_s = 1, \quad \pi_t = 0 \\ & \pi_i \in \{0,1\} \qquad\qquad i \in N \end{array}$$

in termini di Programmazione Lineare Intera, giustificando la risposta. Si illustri, inoltre, perché tale problema costituisce una formulazione del problema del taglio, che separa s da t, di capacità minima.

3) Si individui un flusso massimo dal nodo 8 al nodo 4 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



4) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 6 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & - & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 1 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0. \end{array}$$

Si verifichi se le soluzioni $\bar{x} = (1, 1)$ e $\bar{x}' = (-1, 0)$ sono ottime per tale problema. In caso negativo, si determini una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$ ed una per $\bar{x}'$. Giustificare le risposte.

6) Si applichi al seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & & & & \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \end{array}$$

l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.