RICERCA OPERATIVA (a.a. 2007/08)

1) A seguito di numerose proteste, il direttore del Polo Fibonacci ha chiesto al professore di Ricerca Operativa di predisporre un programma per la gestione dei resti nelle macchine distributrici di bevande e merendine del Polo.

Dopo aver consultato la ditta costruttrice, il professore scopre che una macchinetta può effettuare resti esclusivamente in monete fino al valore massimo di 2 € e accetta monete di valore $v_1 = 5$, $v_2 = 10$, $v_3 = 20$, $v_4 = 50$, $v_5 = 100$ e $v_6 = 200$ centesimi. Dopo averci riflettuto a lungo, decide che un buon modo per evitare nuove proteste è far sì che, dopo ogni operazione di resto, il distributore possa fare il maggior numero possibile di resti diversi.

Supponendo che la macchinetta contenga δ_i monete di valore v_i (comprese quelle appena inserite) e debba fare un resto di R centesimi, aiuta il professore formulando in termini di *PLI* il problema di effettuare il resto dovuto in maniera tale da massimizzare il numero di resti diversi che rimangono disponibili all'interno della macchinetta.

2) Si consideri il seguente problema di PL, in cui γ è un parametro reale:

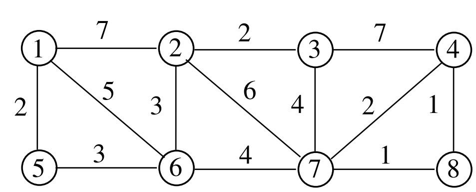
$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & (-1-\gamma)x_1 & + & (-1+2\gamma)x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1.
\end{array}$$

Si individui l'insieme di valori di γ per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per tale problema, giustificando la risposta. Si consideri quindi la seguente variante del problema, in cui $\gamma = 0$ e α è un ulteriore parametro reale:

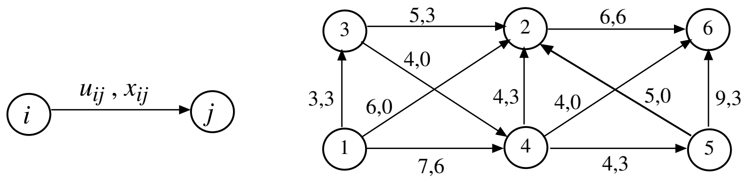
$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & -x_1 & - & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4-2\alpha \\
 & x_1 & & & \leq & 2-\alpha \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1+\alpha \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1.
\end{array}$$

Si individui l'insieme di valori di α per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per questo secondo problema.

3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio che dimostra la validità dell'operazione, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo individuato. Tale soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura di valore $v = 9$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & & & x_2 & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & -x_1 & & & \leq & -4 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

6) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.