RICERCA OPERATIVA (a.a. 2007/08)

1) Si consideri una rete di trasporto intermodale, descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. Sia u_{ij} la capacità del collegamento $(i, j) \in A$. Sia inoltre v la quantità di merce che deve essere inviata lungo G dal nodo sorgente s al nodo destinazione t.

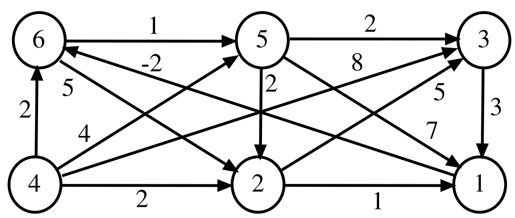
L'insieme A dei collegamenti della rete è partizionato in k sottoinsiemi, A_1, A_2, ..., A_k: gli archi appartenenti ad uno stesso sottoinsieme A_h modellano collegamenti della rete caratterizzati dalla stessa modalità di trasporto, quali tratte stradali, linee ferroviarie, rotte navali, ecc.

Si formuli in termini di *PLI* il problema di inviare la quantità di merce v da s a t lungo G utilizzando il minor numero possibile di modalità di trasporto distinte.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false, giustificando le risposte:

1. Ogni albero dei cammini minimi contiene sempre almeno uno degli archi di costo minimo;
2. Ogni albero di copertura di costo minimo contiene sempre almeno uno degli archi di costo minimo.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



4) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\
 & & & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, 4)$ è ottima per il problema. Esiste una soluzione $\bar{y}$ ottima per il problema duale tale che $\bar{y}_1 = 2$? Giustificare le risposte.

5) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

6) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL di figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.