

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2007/08)

1) Si consideri il seguente modello di Programmazione Matematica:

$$\min v$$

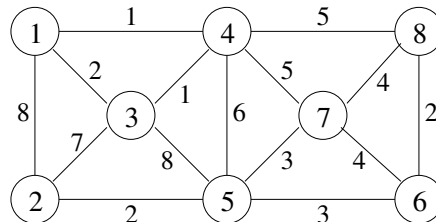
$$\max\{ 2x_1 + 3x_2 : x_1 + x_2 \leq 10, 2x_1 + x_2 \leq 12, x_1, x_2 \geq 0 \} \leq v$$

$$v \geq 4$$

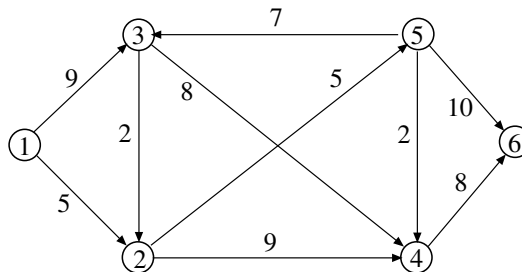
Si formuli il problema in termini di Programmazione Lineare, giustificando la risposta (suggerimento: si utilizzi il Teorema forte della dualità per eliminare il problema di PL interno al modello, sostituendolo mediante un insieme di vincoli lineari).

2) Teucro ed Achei si battono furiosamente sotto le mura di Ilio. Guidati da Ares ed Afrodite, i figli di Priamo stanno avendo la meglio, e sono arrivati vicino alle nere navi dei Danai; se riuscissero a bruciarle, per gli Argivi non ci sarebbe più ritorno sul mare colore del vino. Per questo Atena, dea della saggezza ed alleata dei Greci, spinge il re Agamennone ad organizzare un contrattacco con i cocchi per fermare l'avanzata nemica. Il figlio di Atreo ha a disposizione n Eroi (E), n Cocchi (C) trainati da focose pariglie di cavalli e n Aurighi (A) per condurli; per ogni tripla (e, a, c) con $e \in E$, $c \in C$ e $a \in A$, i vaticini della dea con lo sguardo scintillante forniscono la misura $f_{e,c,a}$ della forza che avrebbe in battaglia l'eroe "e" se fosse montato sul cocchio "c" ed accompagnato dall'auriga "a". Il re di Micene chiede aiuto all'astuto Ulisse per determinare le n combinazioni di eroi, cocchi ed aurighi che hanno la forza totale (somma delle forze delle triple prescelte) maggiore. Aiutate Odisseo a compiere il volere del Fato scrivendo il modello di *PLI* del corrispondente problema.

3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$. Tale soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.



4) Si risolva il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 relativamente all'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Ad ogni iterazione indicare il flusso x , il suo valore v , il cammino aumentante utilizzato e la sua capacità θ . Al termine indicare il taglio di capacità minima determinato dall'algoritmo con la relativa capacità. Durante la procedura di visita si esaminino gli archi della stella uscente per ordine di nodo testa crescente.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcccccccl}
 \min & -2y_1 & & + & 2y_3 & + & 3y_4 & - & y_5 & & \\
 & y_1 & - & y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & - & y_5 & = & 3 \\
 & -3y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & + & y_5 & = & -2 \\
 & 3y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & - & 2y_5 & = & 2 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0.
 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (1, 0, 0, 1, 0)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

6) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplex Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k , i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B , l'indice uscente h , giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.

