RICERCA OPERATIVA (a.a. 2008/09)

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Matematica:

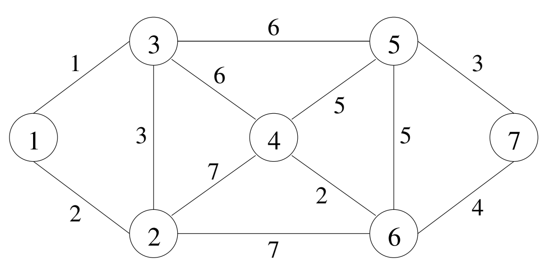
$$\begin{aligned} \min \quad & \|x-y\|_\infty \\ & Ax \le b \\ & Dy \le w \\ & x, y \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ e $D \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ sono matrici date, $b \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^n$ sono vettori dati, mentre $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma infinito in $\mathbb{R}^2$, ovvero $\|z\|_\infty = \max\{|z_1|, |z_2|\}$. Si formuli il problema in termini di Programmazione Lineare, giustificando la risposta.

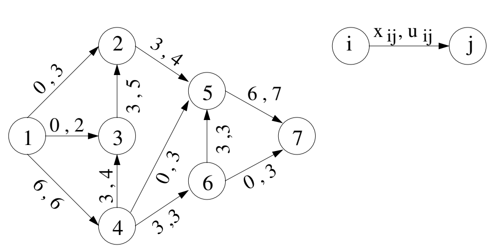
2) Sia data una rete logistica descritta per mezzo di un grafo orientato $G = (N, A)$, in cui il nodo o individua un deposito, mentre il nodo d individua la sede di un cliente. La ditta *Courier* deve inviare un pacco da o a d mediante un furgone. Tale furgone deve partire da o, e deve viaggiare lungo un cammino orientato di G giungendo a d. Sia c_{ij} il costo che *Courier* deve sostenere nel caso in cui il furgone percorra il collegamento $(i, j) \in A$, e sia t_{ij} il tempo di transito lungo (i, j). Il cliente desidera ricevere il pacco entro il tempo t_{max}, assumendo che il furgone parta da o al tempo 0. Qualora non riesca a consegnare il pacco entro tale orario, la ditta dovrà pagare una penale. Precisamente, dovrà pagare una penale C_1 se il furgone consegnerà il pacco entro $t_{max} + \epsilon$, mentre la penale sarà pari a C_2 (con $C_2 > C_1$), se il pacco verrà consegnato dopo $t_{max} + \epsilon$.

Si formuli in termini di *PLI* il problema di organizzare il viaggio del furgone in modo da minimizzare il costo complessivo sostenuto da *Courier*, dato dalla somma del costo di trasporto (ovvero il costo totale dei collegamenti percorsi dal furgone) e dall'eventuale costo della penale.

3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$. Tale soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura di valore $v = 6$. Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\min & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & - & 8y_4 & & \\
 & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\
 & -2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & -3 \\
 & y_1 & & & & & - & 2y_4 & = & 2 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (2, 0, 1, 0)$ sia ottima per il problema. Giustificare la risposta.

6) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.