

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2008/09)

1) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. Sia $u_{ij} \in \mathbb{Z}_+$ la capacità del collegamento $(i, j) \in A$, ovvero il massimo numero di pacchetti inviabili lungo (i, j) . Sia inoltre d il numero di pacchetti che il nodo destinazione t deve ricevere dal nodo sorgente s . Nella configurazione corrente della rete, l'invio dei d pacchetti avviene lungo uno specifico cammino P da s a t .

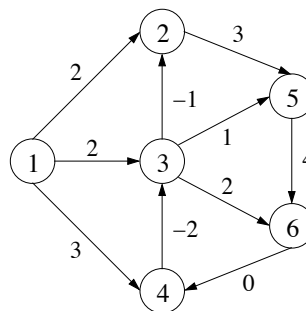
Per ridurre la congestione della rete, il gestore decide di cercare un routing (vale a dire un flusso) alternativo a quello corrente lungo P , da utilizzare congiuntamente a P per l'invio dei pacchetti da s a t . Il routing alternativo non deve utilizzare nessuno degli archi di P . Si formuli in termini di *PLI* il problema di individuare il routing alternativo, e stabilire il numero di pacchetti α (con $\alpha \leq d$) da inviare da s a t mediante questo routing, in modo da minimizzare l'utilizzazione del collegamento più sfruttato, ovvero minimizzare il massimo dei rapporti tra il numero di pacchetti che attraversa un collegamento (i, j) e la sua capacità u_{ij} (si osservi che se α pacchetti sono inviati mediante il routing alternativo, i rimanenti $d - \alpha$ pacchetti continuano ad essere inviati lungo P : il collegamento che massimizza la frazione della sua capacità effettivamente utilizzata va quindi individuato considerando sia i collegamenti interessati dal routing alternativo sia quelli appartenenti a P).

2) Il professore di Ricerca Operativa ha preparato un esercizio di Programmazione Lineare per il compito del prossimo 9 Febbraio. Purtroppo, ha sbadatamente dimenticato il foglio con il testo e la soluzione dell'esercizio nel taschino della camicia, che ha poi lavato in lavatrice. Una volta recuperato ed asciugato il foglio, la maggior parte del testo e della soluzione risulta completamente illeggibile. Il professore riesce comunque a leggere che una soluzione ottima del problema primale è $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e che una soluzione ottima del problema duale è $\bar{y} = (2, 0, 0, 1)$ ma non è altrettanto fortunato con la formulazione del problema. Con grande fatica riesce soltanto a decifrare i seguenti dati parziali:

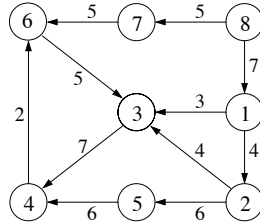
$$\begin{array}{rclclcl} \max & 6x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \\ & & & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\ & & & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & & & & + & 2x_3 & \leq & 2. \end{array}$$

Mentre la funzione obiettivo è completa, i vincoli individuati sono incompleti ed altri mancano completamente. Utilizza le tue conoscenze di Programmazione Lineare per aiutare il professore a recuperare l'esercizio, individuando una formulazione completa del problema primale che sia compatibile con i dati disponibili. Giustificare la risposta.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q . Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 8 al nodo 4 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s , l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & & x_2 & \\
 & x_1 & - & x_2 \leq 0 \\
 & & x_2 & \leq 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 \leq 0 \\
 & -x_1 & & \leq 0 \\
 & -x_1 & & \leq -4 \\
 & x_1 & + & x_2 \leq 4
 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplexso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k , il vettore η_B , il passo θ e l'indice uscente h , giustificando le risposte.

6) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplexso Duale a partire dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k , i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B , l'indice uscente h , giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.

