

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2008/09)

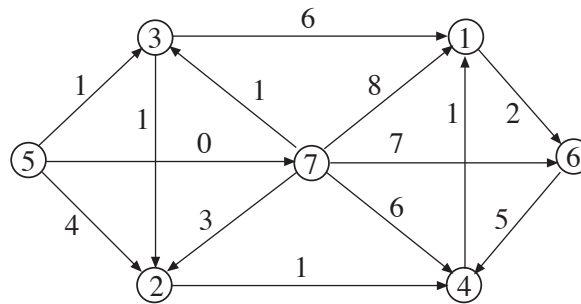
1) Teucro ed Achei si battono furiosamente sotto le mura di Ilio. Atena, dea della saggezza ed alleata dei Greci, spinge il re Agamennone ad organizzare un contrattacco con i cocchi per fermare l'avanzata nemica. Il figlio di Atreo ha a disposizione n Eroi (E), m Cocchi (C) trainati da focose pariglie di cavalli e k Aurighi (A) per condurli. Ogni Eroe può uscire in battaglia a piedi, oppure su un Cocchio; in questo caso ha bisogno di un'Auriga che lo conduca, ma questo compito può anche essere svolto da un altro Eroe, che in questo caso non combatte. Per ogni tripla (e, c, a) con $e \in E$, $c \in C$ e $a \in A \cup E$ ($e \neq a$), i vaticini della dea con lo sguardo scintillante forniscono le misure f_e ed $f_{e,c,a}$ della forza che avrebbe in battaglia l'Eroe " e " da solo, oppure montato sul Cocchio " c " ed accompagnato dall'Auriga " a ". Alcune delle triple (e, a, c) sono invise a Zeus, che interverrebbe immediatamente dando la vittoria ai discendenti di Teucro se anche una sola di esse si mostrasse in battaglia; la dea conosce bene le debolezze di suo padre, e segnala questo ponendo $f_{e,c,a} = -\infty$. Il re di Micene chiede aiuto all'astuto Ulisse per determinare come dispiegare gli eroi in battaglia in modo da massimizzare la loro forza totale. Aiutate Odisseo a compiere il volere del Fato scrivendo il modello di *PLI* del corrispondente problema.

2) Si consideri la seguente formulazione

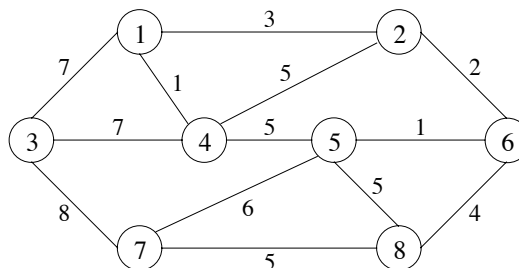
$$\max \left\{ \min_{i=1, \dots, n} c_i x_i : \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b, \quad x_i \in \{0, 5, 7, 12\}, \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

dove b e a_i , con $i = 1, \dots, n$, sono dati di input. Si modifichi la formulazione in modo tale che il modello risultante sia espresso in termini di PLI, giustificando le risposte.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 5 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q . Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.



4) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$. Tale soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rclclcl}
 \min & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & & \\
 & 2y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & = & 6 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & - & 3y_4 & = & -1 \\
 & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
 \end{array}$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (2, 0, 0, 1)$ sia ottima per il problema. Si individuino inoltre tutte le soluzioni ottime del problema. Giustificare le risposte.

6) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simpleso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.

