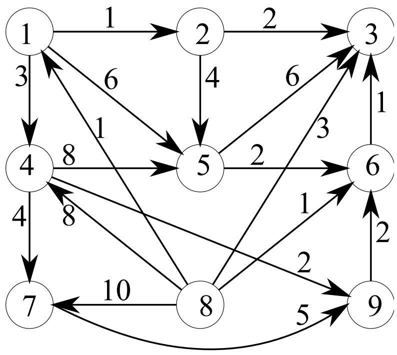
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2010/11)

Nome Cognome:

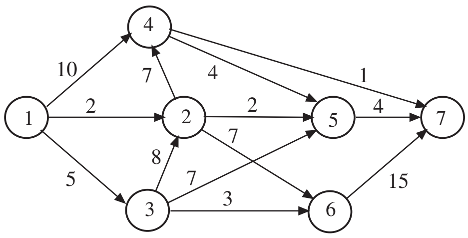
Corso di Laurea: L-31 26 Sp **Matricola:**

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 8 sul grafo in figura



utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Se fosse presente anche l'arco $(5, 8)$, l'algoritmo usato sarebbe ancora appropriato?

2) Si risolva il problema di flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 relativamente all'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds&Karp. Ad ogni iterazione si indichi il flusso x, il suo valore v, il cammino aumentante utilizzato e la sua capacità θ; durante la visita del grafo residuo, si esaminino gli archi della stella uscente per ordine di nodo testa crescente. Al termine si fornisca il taglio di capacità minima determinato dall'algoritmo, giustificando la risposta.



3) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrr}
\min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\
 & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & -1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ sia ottima per il problema. Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

4) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & & & \leq & -4
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo non finito, qual è la direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo? Giustificare la risposta.

5) L'ente preposto alla gestione dello smaltimento rifiuti di una nota regione italiana deve aprire k discariche per fronteggiare la situazione ormai ingovernabile. Individua pertanto un insieme J di siti candidati all'apertura di una discarica, con $|J| > k$, e stabilisce che, se verrà attivata una discarica nel sito j, essa dovrà avere una capacità di smaltimento pari a Q_j tonnellate di rifiuti al mese. L'ente censisce inoltre l'insieme I dei principali centri abitati della regione, e stima le tonnellate di rifiuti, q_i, prodotte mensilmente dal centro abitato i, $\forall i \in I$.

Oltre a decidere dove aprire le k discariche, l'ente deve assegnare i centri abitati alle discariche aperte. Per rendere efficaci le operazioni di trasporto dei rifiuti dai centri verso le discariche, l'ente stabilisce che ogni centro dovrà sversare i propri rifiuti in esattamente una discarica, distante al più T chilometri dal centro stesso. Inoltre, per evitare una concentrazione di discariche in particolari aree della regione, ed il conseguente scatenarsi di polemiche, l'ente decide di dislocare le k discariche in modo da massimizzare la distanza intercorrente tra le coppie di discariche aperte (ovvero, massimizzare la minima distanza tra le coppie di discariche aperte). È nota la distanza intercorrente tra ogni coppia di siti candidati e tra centri e siti candidati: d_{ij}, $i \in I \cup J, j \in J$.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere dove aprire le k discariche, e come assegnare i centri abitati alle discariche aperte, in modo che ogni centro sia assegnato ad esattamente una discarica distante al più T chilometri, e la capacità di ogni discarica sia rispettata, massimizzando la minima distanza intercorrente tra le coppie di discariche aperte.