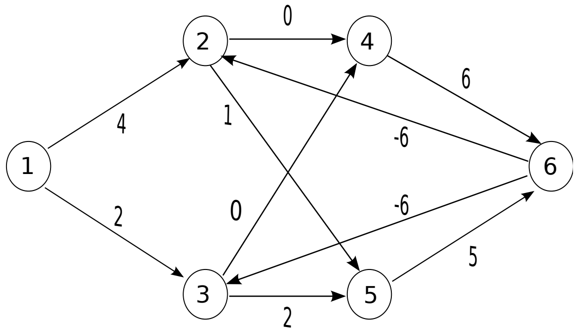
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2011/12)

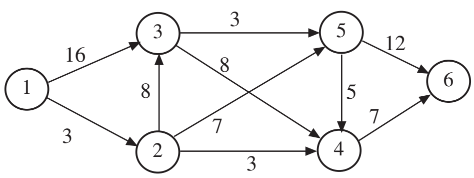
Nome Cognome:

Corso di Laurea: L-31 26 Sp **Matricola:**

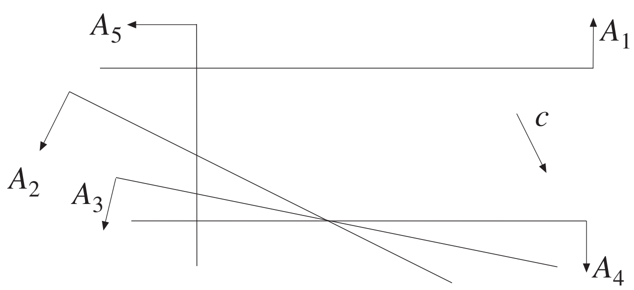
1) Si determini un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ sul grafo in figura. Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esaminino gli archi della stella uscente di ogni nodo visitato per ordine di nodo testa crescente. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Tale soluzione è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1? Giustificare la risposta.



2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo di Edmonds&Karp. Ad ogni iterazione si indichi il flusso x, il suo valore v, il cammino aumentante utilizzato e la sua capacità θ. Si visitino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si indichi il taglio di capacità minima determinato dall'algoritmo, specificando la sua capacità. Qualora la capacità dell'arco $(1, 3)$ fosse pari a 9 invece che a 16, la soluzione individuata sarebbe ancora un flusso massimo? Giustificare la risposta.



3) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL di figura a partire dalla base $B = \{1, 5\}$; si noti che A_1 ed A_4 sono collineari (ma di verso opposto). Per ogni iterazione si forniscano la base, il segno delle variabili duali in base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (direttamente sulla figura), e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



4) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & & & \leq & -4
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo non finito, qual è la direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo? Giustificare la risposta.

5) Si consideri la rete stradale di Milano, descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. Per rimpinguare le casse meneghine, la nuova giunta comunale individua alcuni varchi stradali, corrispondenti ad un sottoinsieme C di nodi del grafo, e molto attraversati dai commercianti della città, e decide di far pagare una tassa per il transito di pacchi attraverso ogni varco di C. Precisamente, ogni commerciante che faccia transitare pacchi attraverso il varco $i \in C$ (percorrendo un qualsiasi arco della stella entrante del nodo i) deve pagare una tassa (una tantum) α_i. Il numero di pacchi inviati attraverso gli archi della stella entrante di i non può comunque eccedere il limite superiore d_i, $i \in C$. Il Signor Furbini, esperto di Ricerca Operativa, dovendo inviare pacchi dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$, e avendo un budget pari a B per il pagamento delle tasse, decide allora di utilizzare le proprie competenze per riuscire ad inviare il maggior numero possibile di pacchi da s a t nei limiti consentiti dal suo budget.

Si formuli mediante un adeguato modello di PLI il problema del Signor Furbini, ovvero organizzare l'invio di pacchi da s a t lungo la rete stradale rappresentata da G in modo da massimizzare il numero di pacchi inviati, nel rispetto dei limiti superiori di invio associati ai varchi in C, e senza superare il budget disponibile per il pagamento delle tasse.