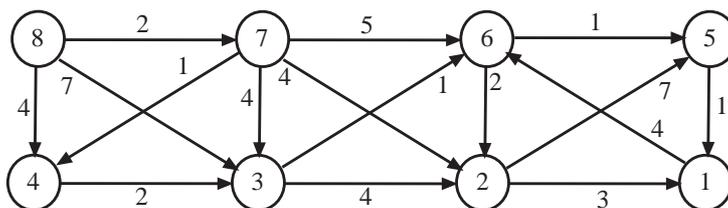


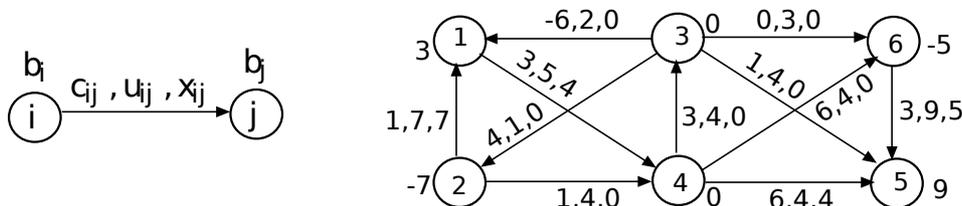
### RICERCA OPERATIVA (a.a. 2013/14)

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 7 sul grafo in figura



utilizzando l’algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato  $u$ , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l’insieme dei nodi candidati  $Q$ . Al termine si disegni l’albero dei cammini minimi individuato. L’albero determinato è l’unico albero dei cammini minimi di radice 7? Giustificare le risposte.

2) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all’istanza in figura utilizzando l’algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato di costo  $cx = 58$ . Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità e la soluzione ottenuta dopo l’applicazione dell’operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima, e si discuta se è l’unica soluzione ottima del problema.

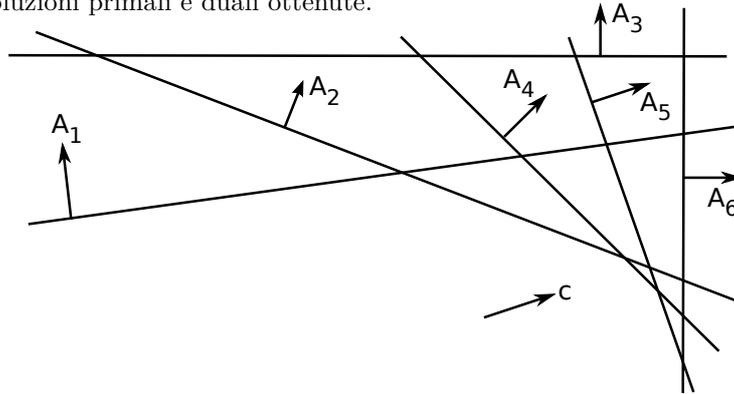


3) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -x_1 - 2x_2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & \phantom{-x_1} + x_2 \leq 4 \\
 & -x_1 - x_2 \leq 2 \\
 & \phantom{-x_1} - x_2 \leq 0 \\
 & -x_1 \phantom{- x_2} \leq 2
 \end{aligned}$$

applicando l’algoritmo del Simpleso Primale, per via algebrica, a partire dalla base  $B = \{1, 5\}$ . Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l’indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l’indice entrante. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima duale individuata dall’algoritmo sia unica. Giustificare le risposte.

4) Si risolva graficamente il problema di  $PL$  in figura, utilizzando l'algoritmo del Simpleso Duale a partire dalla base  $B = \{ 3, 6 \}$ ; si noti che  $c$  ed  $A_5$  sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante  $k$ , i segni delle componenti dei vettori  $\bar{y}_B$  e  $\eta_B$ , l'indice uscente  $h$ , giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine si discuta l'unicità delle soluzioni primali e duali ottenute.



5) Dopo aver subito pesanti attacchi da parte di hackers cinesi in cerca di informazioni riservate, il Dipartimento della Difesa (DoD) degli Stati Uniti ha effettuato una revisione dei propri sistemi informatici volta ad eliminare almeno le principali debolezze prima del prossimo, devastante attacco, che si suppone avverrà tra  $T$  istanti di tempo. È dato un insieme  $H$  di hosts; per ciascun host  $h \in H$  è noto il tempo di servizio  $f_h$  (non trascurabile) che si paga per iniziare ad installarci *patches*, indipendentemente dal loro numero. È dato inoltre l'insieme  $P$  delle patches da passare per eliminare vulnerabilità note, partizionato in sottoinsiemi  $P_h$ , ciascuno pertinente ad uno specifico host  $h \in H$ ; per ciascuna patch  $p \in P$  è noto il tempo di installazione  $t_p$  sull'host corrispondente (univocamente determinato), in aggiunta al tempo fisso di cui sopra. È dato infine un insieme  $S$  di servizi di rete vulnerabili; per ciascun servizio  $s \in S$  è noto lo score  $c_s > 0$  che ne determina l'importanza, e l'insieme delle patches che sono necessarie per proteggerlo. Queste informazioni possono essere rappresentate sotto la forma di un *grafo di attacco* (bipartito)  $G = (N, A)$ , dove  $N = P \times S$  ed  $A$  è l'insieme delle coppie  $(p, s)$  tali per cui se non viene passata la patch  $p$  è possibile attaccare il servizio  $s$ . Si formuli come  $PLI$  il problema del DoD, che è quello di decidere quali patches passare entro il tempo limite  $T$  per massimizzare lo score dei servizi protetti, ossia tali per cui sono state passate tutte le patches necessarie; i servizi "parzialmente coperti", ossia per i quali non sono state passate tutte le patches (basta che ne manchi una), sono ancora vulnerabili e quindi non contribuiscono allo score. Per motivi di sicurezza, le operazioni sui server non possono essere parallelizzate e devono quindi essere svolte in maniera rigidamente sequenziale.