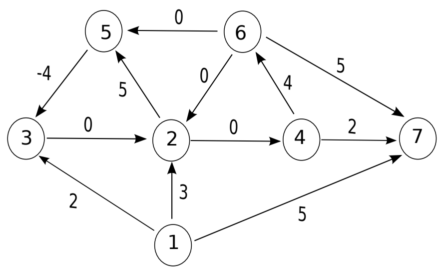
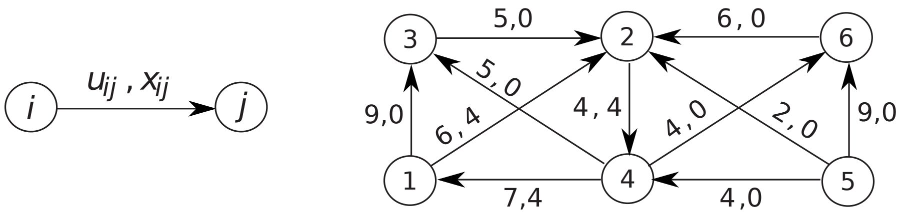
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2013/14)

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato); durante l'algoritmo si esaminando gli archi della stella uscente di u per ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Tale soluzione è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1? Giustificare la risposta.



2) Si individui un flusso massimo dal nodo 5 al nodo 3 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 8$.

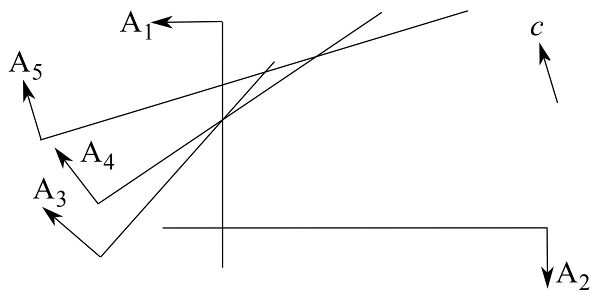


3) Si risolva il seguente problema di PL

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 6x_2 & & \\
& x_1 & & & \leq & 2 \\
& & & x_2 & \leq & 4 \\
& x_1 & - & 2x_2 & \leq & 10 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
& -x_1 & & & \leq & -4 \\
& 2x_1 & - & x_2 & \leq & -1
\end{array}
$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Se l'esito fosse *ottimo non finito* (per il problema duale), quale sarebbe la direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo? Giustificare la risposta.

4) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$; si noti che c è collineare ad A_5. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, se l'algoritmo ha determinato una soluzione ottima si discuta l'unicità della soluzione ottima duale del problema.



5) Bankitalia deve pianificare il trasporto di contante dal suo deposito centrale verso un insieme J di filiali per l'orizzonte di pianificazione $T = \{1, 2, \ldots, m\}$ dei prossimi m giorni lavorativi. Il trasporto deve riguardare l'insieme $H = \{10, 20, 50, 100\}$ di tagli di banconote; per ogni taglio, l'invio deve avvenire mediante *mazzette*, ossia gruppi di 100 banconote del taglio considerato.
Per ogni filiale $j \in J$, per ogni taglio $h \in H$ e per ogni giorno $t \in T$, è nota la quantità q^t_{jh} di mazzette di taglio h richieste da j il giorno t. Tale domanda può essere soddisfatta sia mediante invii effettuati il giorno $t-1$, sia utilizzando mazzette inviate a j in giorni precedenti $t-1$. Per ogni j e ogni h è anche noto il numero d_{jh} di mazzette già presenti il primo giorno dell'orizzonte di pianificazione $t = 1$; si assume ovviamente che $q^1_{jh} \leq d_{jh}$. Il deposito ha una limitata capacità di invio giornaliera, dovuta ai macchinari per il conteggio delle banconote; per ogni $h \in H$, W_h è il massimo numero di mazzette di taglio h inviabili ogni giorno dal deposito alle filiali.
Per motivi di sicurezza, l'invio delle mazzette dal deposito deve essere effettuato attraverso furgoni blindati. Si può inviare al più un furgone al giorno per ogni filiale, ed il valore totale del contante (non mazzette) trasportato da ogni furgone ogni giorno non può superare la soglia U. L'invio di un furgone dal deposito alla filiale j comporta un costo fisso c_{j1} se il valore totale di contante trasportato risulta minore o uguale di un dato valore u_j, mentre il costo del trasporto è c_{j2} se il valore totale di contante trasportato è maggiore di u_j (ma comunque non superiore a U); tali costi non dipendono dal giorno di invio, e si assume $c_{j1} < c_{j2}$. Si formuli in termini di PLI il problema di decidere in quali giorni dell'orizzonte T inviare un furgone dal deposito alle filiali, e quante mazzette di ogni taglio trasportare su ogni furgone inviato, in modo da soddisfare la richiesta giornaliera di mazzette delle filiali, rispettando la capacità di invio giornaliera del deposito e la capacità di trasporto dei furgoni, e minimizzando il costo totale di invio.