Soluzione esercizio 3.1.7

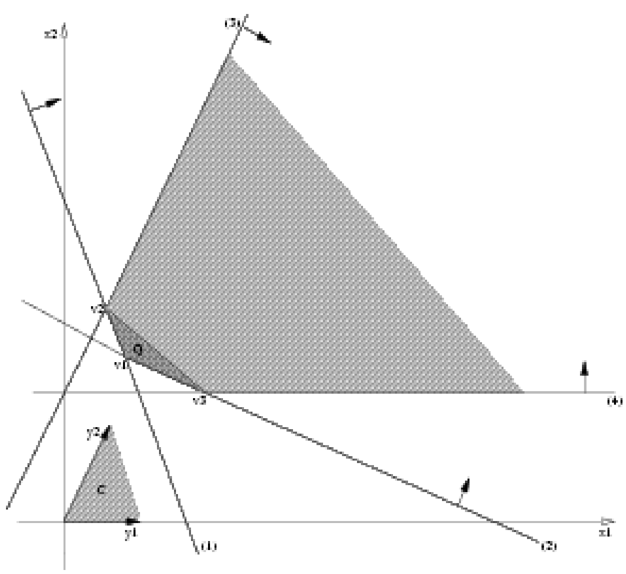
Dobbiamo determinare $X = \{v^1, ..., v^s\}$ e $Y = \{y^1, ..., y^t\}$ tali che $P = \operatorname{conv} X + \operatorname{cono} Y$. Ricordiamo che è possibile prendere come X l'insieme dei vertici, se il poliedro ne possiede, e che $\operatorname{cono} Y = \{x \ : \ Ax \leq 0\}$ qualora il poliedro sia espresso nella forma matriciale $P = \{x \ : \ Ax \leq b\}$. Nel nostro caso abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -7 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -10 \\ -21 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I vertici del poliedro sono le facce $P_B = \{x \ : \ A_B x = b_B, \ A_{\bar{B}} x \leq b_{\bar{B}}\}$ dove B è una base; quindi, risulta

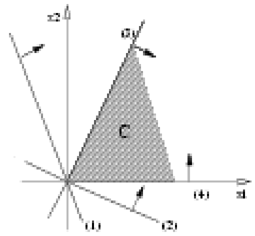
$$\begin{array}{ll} P_{\{1,2\}} = \{v^1 := (28/29, 75/29)\}, & P_{\{2,3\}} = \emptyset, \\ P_{\{1,3\}} = \{v^2 := (2/3, 10/3)\}, & P_{\{2,4\}} = \{v^3 := (7/3, 2)\}, \\ P_{\{1,4\}} = \emptyset, & P_{\{3,4\}} = \emptyset. \end{array}$$

Ad alcune basi non corrisponde un vertice del poliedro, in quanto la corrispondente soluzione di base non è ammissibile; ad esempio, la soluzione associata a $B = \{1, 4\}$ risulta essere $x = A_B^{-1} b_B = (6/5, 2)$ ma non soddisfa il vincolo $A_2 x \leq b_2$, come è anche geometricamente evidente in figura.



Possiamo perciò scegliere $X = \{v^1, v^2, v^3\}$; si osservi inoltre che X costituisce una rappresentazione minimale del politopo $Q = \operatorname{conv} X$.

Osserviamo che $C := \{x \ : \ Ax \leq 0\} = \{x \ : \ A_I x \leq 0\}$ con $I = \{3, 4\}$, come anche illustrato nella seguente figura.



Quindi C risulta essere un cono simpliciale e conseguentemente è generato dai vettori

$$y^j = -\alpha A_I^{-1} u_j, \quad j = 1, 2$$

con $\alpha > 0$ fissato. Essendo

$$A_I^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e scegliendo $\alpha = 2$, otteniamo

$$y^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo perciò $C = \text{cono}\,\{y^1, y^2\}$ e la rappresentazione è minimale per costruzione.

In conclusione, la decomposizione minimale del poliedro è

$$P = Q + C$$

con

$$Q = \text{conv}\,\{(28/29, 75/29), (2/3, 10/3), (7/3, 2)\},$$
$$C = \text{cono}\,\{(1, 0), (1, 2)\}.$$