

Il Dipartimento di Informatica intende assegnare  $n$  diversi lavori di preparazione di pagine web a  $m$  ( $m < n$ ) cooperative di studenti di Informatica. La cooperativa  $j$ , per effettuare il lavoro  $i$ , richiede al Dipartimento un pagamento di  $c_{ij}$  Euro,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Inoltre, per ragioni di riservatezza, per ogni lavoro  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , si conosce l'insieme  $C(i)$  dei lavori che possono essere effettuati assieme ad  $i$  dalla stessa cooperativa (ovviamente, se  $h \in C(i)$  allora  $i \in C(h)$ ). Il Dipartimento intende assegnare i lavori delle pagine web alle cooperative al minimo costo con la garanzia di assegnare almeno un lavoro ad ogni cooperativa e facendo sì che alla stessa cooperativa siano assegnati solo lavori compatibili. Formulare in termini di P.L.I. il problema del Dipartimento.

## SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti  $nm$  variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il lavoro } i \text{ è assegnato alla cooperativa } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

I vincoli di semiassegnamento che garantiscono che ogni lavoro sia assegnato ad una ed una sola cooperativa sono:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per garantire che ad ogni cooperativa sia assegnato almeno un lavoro, introduciamo i seguenti vincoli di copertura:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Per garantire che alla stessa cooperativa siano assegnati solo lavori compatibili tra loro (lavori che possono essere effettuati assieme), definiamo, come struttura di dati in input, l'insieme  $L$  di tutte le coppie di lavori incompatibili, cioè lavori che non possono essere assegnati alla stessa cooperativa:

$$L = \{(i, h) : i = 1, \dots, n-1, h > i \text{ e } h \notin C(i)\};$$

(la condizione  $h > i$  viene utilizzata per evitare di inserire in  $L$  la stessa coppia due volte). Mediante l'insieme  $L$  delle coppie incompatibili, possiamo garantire che alla stessa cooperativa siano assegnati solo lavori compatibili in quanto si impedisce di assegnare alla stessa cooperativa coppie di lavori incompatibili:

$$x_{ij} + x_{hj} \leq 1, \quad (i, h) \in L, \quad j = 1, \dots, m.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è data dal costo totale di assegnamento:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}.$$

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} \geq 1 \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} + x_{hj} \leq 1 \quad (i, h) \in L, \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$