Problemi di localizzazione impianti

Laura Galli
Dipartimento di Informatica
Largo B. Pontecorvo 3, 56127 Pisa
laura.galli@unipi.it
http://www.di.unipi.it/~galli

2 Dicembre 2014
Ricerca Operativa 2
Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
A.A. 2014/15

Introduzione

I problemi di *facility location* riguardano il posizionamento ottimale di servizi.

Molte Applicazioni sia nel settore pubblico che in quello privato:

- porti, aeroporti, scuole, ospedali, fermate autobus, stazioni metropolitana, piscine, ...
- stabilimenti produttivi, magazzini, punti vendita, centri di calcolo ...

Problemi di copertura

Problema

Dati:
$I =$ insieme di nodi domanda
$J =$ insieme di siti candidati ad ospitare una facility
$c_j =$ costo per aprire una facility nel sito j
$d_{ij} =$ distanza tra nodo di domanda i e sito candidato j
$D =$ distanza di copertura, cioè i è coperto da j se $d_{ij} \leq D$

Decidere in quali siti aprire una facility in modo da coprire tutti i nodi di domanda con l'obiettivo di minimizzare il costo totale.

Esempi

Posizionamento di servizi di emergenza (ambulanze, caserme dei pompieri, . . .)

Modello

Definiamo $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } d_{ij} \leq D, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Variabili: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se nel sito } j \text{ apriamo una facility,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \min \sum_{j \in J} c_j \, x_j & \\ \sum_{j \in J} a_{ij} \, x_j \geq 1 \quad \forall \, i \in I & \qquad (1) \\ x_j \in \{0, 1\} \quad \forall \, j \in J & \end{aligned}$$

(1): ogni nodi di domanda deve essere coperto da almeno una facility

Problemi di massima copertura

Quando il budget a disposizione è limitato, può accadere di non riuscire a coprire tutti i nodi di domanda.

Problema

Dati:
I = insieme di nodi domanda
h_i = domanda associata al nodo i
J = insieme di siti candidati ad ospitare una facility
p = numero prefissato di facility da aprire
d_{ij} = distanza tra nodo di domanda i e sito candidato j
D = distanza di copertura

Decidere in quali siti aprire le p facility in modo da massimizzare la domanda coperta.

Modello

Variabili: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se apriamo una facility nel sito } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$ $z_i = \begin{cases} 1 & \text{se il nodo } i \text{ è coperto,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$$\max \sum_{i \in I} h_i \, z_i$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} \, x_j \geq z_i \quad \forall \; i \in I \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p \tag{3}$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall \; j \in J$$

$$z_i \in \{0,1\} \quad \forall \; i \in I$$

(2): se decidiamo di coprire il nodo i, allora dobbiamo aprire almeno una facility che lo possa coprire
(3): devono essere aperte esattamente p facility

Esempio 6.1

Il dirigente di una ASL ha a disposizione un budget sufficiente per posizionare 2 ambulanze nella città e sa che ci sono 5 siti che possono ospitare un'ambulanza. La città è divisa in 10 zone e i tempi (in minuti) per raggiungere le zone da ogni sito sono indicati nella tabella dell'esercizio 6.1.
La tabella seguente indica il numero di abitanti che vivono nelle 10 zone della città:

zone	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
abitanti	1500	3000	1000	1800	2500	2100	1900	1700	2200	2700

Il dirigente deve decidere dove posizionare le 2 ambulanze in modo da massimizzare il numero di abitanti che possano essere raggiunti da un'ambulanza entro 10 minuti.

Metodo greedy

1. $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$, $x := 0$.
2. Per ogni $j \in J$ calcola la domanda coperta da j:

$$u_j = \sum_{i \in I : d_{ij} \leq D} h_i$$

3. Trova un indice $k \in J$ tale che $u_k = \max_{j \in J} u_j$

   Poni $x_k := 1$, da J elimina k, da I elimina $\{i : \ d_{ik} \leq D\}$
4. Se $\sum_{j=1}^{n} x_j = p$ allora STOP

   altrimenti torna al passo 2.

Esempio 6.1 cont.

Applichiamo il metodo greedy al problema dell'esempio 6.1.

La domanda coperta da ogni sito è

siti	1	2	3	4	5
domanda coperta	8200	8000	14700	9500	8600

Scegliamo il sito 3 ($x_3 = 1$) e copriamo le zone 2,3,4,6,7,9,10. Per le zone rimanenti 1,5,8 la domanda coperta dai 4 siti rimanenti è:

siti	1	2	4	5
domanda coperta	1500	4000	2500	1700

Scegliamo il sito 2 ($x_2 = 1$) e copriamo le zone 1 e 5. In totale copriamo 18700 abitanti (la zona 8 con 1700 abitanti rimane scoperta).

Rilassamento lagrangiano

Se rilassiamo i vincoli che legano le variabili x e z otteniamo:

$$\begin{cases} \max \sum_{i \in I} h_i z_i + \sum_{i \in I} \lambda_i \left(\sum_{j \in J} a_{ij} x_j - z_i \right) = \\ \qquad = \sum_{i \in I} (h_i - \lambda_i) z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \lambda_i a_{ij} x_j \\ \sum_{j \in J} x_j = p \\ x_j \in \{0,1\} \qquad \forall\, j \in J \\ z_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in I \end{cases} \tag{RL$_\lambda$}$$

E' facile da risolvere perché è un problema separabile nelle variabili x e z.

z ottima: $z_i = \begin{cases} 1 & \text{se } h_i - \lambda_i > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

x ottima: per ogni $j \in J$ calcoliamo $v_j = \sum_{i \in I} \lambda_i a_{ij}$, disponiamo i v_j in ordine decrescente, scegliamo i primi p valori e poniamo a 1 le corrispondenti variabili x_j.

Esempio 6.1 cont.

Consideriamo il problema dell'esempio 6.1.

Se $\lambda = 0$, il valore ottimo del rilassamento lagrangiano è $\sum_{i \in I} h_i = 20400 = v_S(P)$.

Se

$$\lambda = (1600, 0, 0, 0, 1500, 1600, 1600, 1600, 0, 0),$$

i valori v_j sono $(1600, 3200, 3200, 3200, 3200)$, quindi la soluzione ottima del rilassamento lagrangiano è:

$$z = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \qquad x = (0, 1, 1, 0, 0),$$

con valore $12500 + 3200 + 3200 = 18900 = v_S(P)$.

Quindi la soluzione ammissibile di valore 18700 trovata in precedenza ha un errore relativo rispetto alla soluzione ottima minore o uguale a

$$\frac{18900 - 18700}{18700} \simeq 1\%.$$

Problemi di p-center

La distanza di copertura non è fissata a priori.

Problema

Dati:
I = insieme di nodi domanda
h_i = domanda associata al nodo i
J = insieme di siti candidati ad ospitare una facility
p = numero prefissato di facility da aprire
d_{ij} = distanza tra nodo di domanda i e sito candidato j

Decidere in quali siti aprire le p facility in modo che sia minima la distanza massima tra ogni nodo di domanda e la sua facility più vicina.

Modello

Variabili: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se apriamo una facility nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se assegnamo il nodo } i \text{ alla facility nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad D \geq 0$

$$
\begin{aligned}
& \min \; D \\
& D \geq \sum_{j \in J} h_i \, d_{ij} \, y_{ij} \qquad \forall \; i \in I && (4) \\
& \sum_{j \in J} x_j = p && (5) \\
& \sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \qquad \forall \; i \in I && (6) \\
& y_{ij} \leq x_j \quad \forall \; i \in I, \forall \; j \in J && (7) \\
& x_j \in \{0,1\} \qquad \forall \; j \in J \\
& y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall \; i \in I, \forall \; j \in J
\end{aligned}
$$

(4): $D \geq$ massima distanza tra un nodo di domanda e la facility a cui è assegnato
(5): devono essere aperte esattamente p facility
(6): ogni nodo di domanda deve essere assegnato ad una facility
(7): se i è assegnato alla facility nel sito j, allora quest'ultima deve essere aperta

Problemi di p-median

La distanza di copertura non è fissata a priori.

Problema

Dati:
I = insieme di nodi domanda
h_i = domanda associata al nodo i
J = insieme di siti candidati ad ospitare una facility
p = numero prefissato di facility da aprire
d_{ij} = distanza tra nodo di domanda i e sito candidato j

Decidere in quali siti aprire le p facility in modo che sia minima la distanza totale tra ogni nodo di domanda e la sua facility più vicina.

Modello

Variabili: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se apriamo una facility nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se assegnamo il nodo } i \text{ alla facility nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i \, d_{ij} \, y_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p \tag{8}$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \qquad \forall\, i \in I \tag{9}$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad \forall\, i \in I, j \in J \tag{10}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall\, j \in J$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in I, j \in J$$

(8): devono essere aperte esattamente p facility

(9): ogni nodo di domanda deve essere assegnato ad una facility

(10): se i è assegnato alla facility nel sito j, allora quest'ultima deve essere aperta

Rilassamento lagrangiano

Se rilassiamo i vincoli $\sum_{j \in J} y_{ij} = 1$ per ogni $i \in I$ otteniamo:

$$
\begin{cases}
\min \ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i \, d_{ij} \, y_{ij} + \sum_{i \in I} \lambda_i \left(1 - \sum_{j \in J} y_{ij} \right) = \\
\qquad = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (h_i \, d_{ij} - \lambda_i) \, y_{ij} + \sum_{i \in I} \lambda_i \\
\sum_{j \in J} x_j = p \\
y_{ij} \leq x_j \qquad \forall \ i \in I, j \in J \\
x_j \in \{0, 1\} \qquad \forall \ j \in J \\
y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall \ i \in I, j \in J
\end{cases}
\tag{RL_λ}
$$

Calcoliamo i valori $v_j = \sum_{i \in I} \min\{0, h_i \, d_{ij} - \lambda_i\}$, disponiamo i v_j in ordine crescente, scegliamo i primi p valori e poniamo a 1 le corrispondenti variabili x_j. Inoltre

$$
y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j = 1 \text{ e } h_i \, d_{ij} - \lambda_i < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

Osservazione

Se la sol. ottima di (RL_λ) non è ammissibile, possiamo trovarne facilmente una ammissibile assegnando ogni nodo di domanda i alla facility aperta più vicina.

Problemi di fixed charge

Problema

Dati:
$I =$ insieme di nodi domanda
$h_i =$ domanda associata al nodo i
$J =$ insieme di siti candidati ad ospitare una facility
$f_j =$ costo per aprire una facility nel sito j
$C_j =$ capacità di una facility nel sito j
$d_{ij} =$ distanza tra nodo di domanda i e sito candidato j
$\alpha =$ costo di trasporto per unità di domanda e per unità di distanza

Decidere quante facility aprire e dove aprirle in modo da minimizzare il costo totale dovuto all'apertura delle facility e al trasporto della domanda.

Modello

Variabili: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se apriamo una facility nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se assegnamo il nodo } i \text{ alla facility nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\min \sum_{j \in J} f_j\, x_j + \alpha \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i\, d_{ij}\, y_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \qquad \forall\ i \in I \tag{11}$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad \forall\ i \in I, j \in J \tag{12}$$

$$\sum_{i \in I} h_i\, y_{ij} \leq C_j\, x_j \qquad \forall\ j \in J \tag{13}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad \forall\ j \in J$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall\ i \in I, j \in J$$

(11): ogni nodo di domanda deve essere assegnato ad una facility
(12): se i è assegnato alla facility nel sito j, allora quest'ultima deve essere aperta
(13): la domanda totale assegnata ad una facility non può superare la capacità

Problemi di p-dispersion

Problema

Dati:
$J =$ insieme di siti candidati ad ospitare una facility
$p =$ numero prefissato di facility da aprire
$d_{ij} =$ distanza tra il sito i ed il sito j

Decidere dove aprire le p facility in modo da massimizzare la minima distanza tra due facility.

Modello

Variabili: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se apriamo una facility nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, $D \geq 0$

$$\max \ D$$

$$D \leq M + (d_{ij} - M)(x_i + x_j - 1) \quad \forall \ i, j \in J, i < j \tag{14}$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p \tag{15}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad \forall \ j \in J$$

dove M è una costante abbastanza grande (es. $M > \max d_{ij}$)

(14): $D \leq$ minima distanza tra 2 facility
(15): devono essere aperte esattamente p facility