Problemi dello zaino e di bin packing

Laura Galli
Dipartimento di Informatica
Largo B. Pontecorvo 3, 56127 Pisa
laura.galli@unipi.it
http://www.di.unipi.it/~galli

2 Dicembre 2014
Ricerca Operativa 2
Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
A.A. 2014/15

Problema dello zaino (knapsack problem)

Problema

Dati: un contenitore di capacità C, n oggetti di valore $v_1, \ldots, v_n$ e peso $p_1, \ldots, p_n$. Quali oggetti inserisco nel contenitore, rispettando la sua capacità, in modo da massimizzare il valore totale?

Teorema

Questo problema è NP-hard.

Esempio

Investire 100 mila euro. Scegliere tra 9 investimenti possibili:

Investimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ricavo atteso (migliaia di euro)	50	65	35	16	18	45	45	40	25
Costo (migliaia di euro)	40	50	25	10	10	40	35	30	20

Modello

Variabili: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se oggetto } j \text{ viene inserito,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$$\max \sum_{j=1}^{n} v_j \, x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \, x_j \leq C$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall \, j = 1, \ldots, n$$

Metodo Branch and Bound

Metodi *greedy* per trovare una soluzione ammissibile.

Metodo 1

Esamino gli oggetti in ordine di valore decrescente.
Ogni oggetto viene inserito purché sia rispettato il vincolo di capacità.

Esempio

Oggetto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Valore	50	65	35	16	18	55	45	40	25	
Peso	31	39	26	21	25	28	29	27	23	$C = 100$

$x_2 = 1$, $x_6 = 1$, $x_1 = 1$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$, $x_3 = 0$, $x_9 = 0$, $x_5 = 0$, $x_4 = 0$.
Quindi $v_I(P) = 170$.

Metodo Branch and Bound

Metodo 2

Esamino gli oggetti in ordine di peso crescente.
Ogni oggetto viene inserito purché sia rispettato il vincolo di capacità.

Esempio

Oggetto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Valore	50	65	35	16	18	55	45	40	25	
Peso	31	39	26	21	25	28	29	27	23	$C = 100$

$x_4 = 1$, $x_9 = 1$, $x_5 = 1$, $x_3 = 1$, $x_8 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.
Quindi $v_I(P) = 94$.

Metodo Branch and Bound

Metodo 3

Esamino gli oggetti in ordine di rendimento decrescente (rendimento=valore/peso).
Ogni oggetto viene inserito purché sia rispettato il vincolo di capacità.

Esempio

Oggetto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Valore	50	65	35	16	18	55	45	40	25	
Peso	31	39	26	21	25	28	29	27	23	$C = 100$

$x_6 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$, $x_3 = 0$, $x_9 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$.
Quindi $v_I(P) = 170$.

Metodo Branch and Bound

Teorema

Supponiamo che le variabili siano in ordine di rendimento decrescente.

Sia h l'indice tale che $\sum_{j=1}^{h} p_j \leq C$ e $\sum_{j=1}^{h+1} p_j > C$.

Allora il rilassamento continuo $\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq C \\ 0 \leq x_j \leq 1 \end{cases}$ ha come soluzione ottima

$$\bar{x}_1 = 1, \ \ldots, \ \bar{x}_h = 1, \ \bar{x}_{h+1} = \frac{C - \sum_{j=1}^{h} p_j}{p_{h+1}}, \ \bar{x}_{h+2} = 0, \ \ldots, \ \bar{x}_n = 0$$

e valore ottimo $v_1 + \cdots + v_h + \dfrac{v_{h+1}}{p_{h+1}} \left(C - \sum_{j=1}^{h} p_j \right)$.

Metodo Branch and Bound

Esempio

Risolviamo con il Branch and Bound il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \ 10\,x_1 + 13\,x_2 + 18\,x_3 + 24\,x_4 \\ \qquad 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + 6\,x_4 \leq 7 \\ x_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

Disponiamo le variabili in ordine di rendimento decrescente:

variabili	1	3	2	4
rendimenti	5	4.5	4.33	4

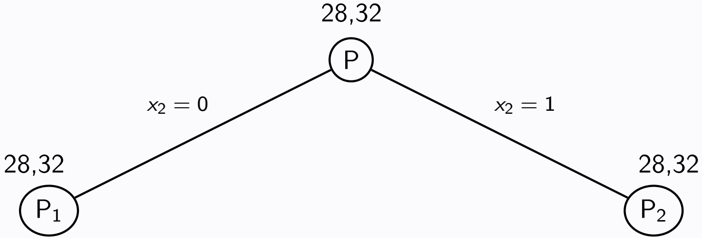
Applicando il terzo algoritmo *greedy* otteniamo la soluzione ammissibile $(1,0,1,0)$ e quindi $v_I(P) = 28$.

L'ottimo del rilassamento continuo è $\left(1, \frac{1}{3}, 1, 0\right)$, quindi $v_S(P) = 32$.

In ogni nodo aperto istanziamo la variabile frazionaria nella soluzione ottima del rilassamento e visitiamo l'albero in ampiezza.

Metodo Branch and Bound

Esempio



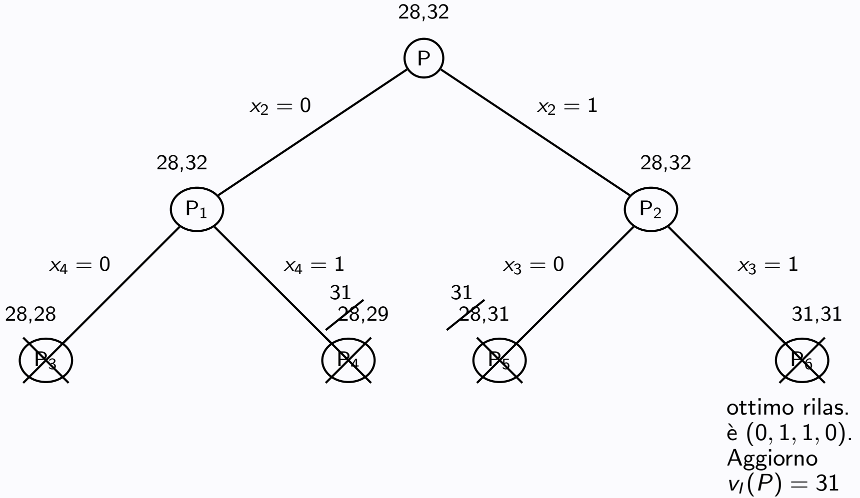
L'ottimo del rilassamento di P_1 è $(1, 0, 1, \frac{1}{6})$, non amm., $v_S(P_1) = 32 > 28$, pertanto il nodo P_1 rimane aperto.

L'ottimo del rilassamento di P_2 è $(1, 1, \frac{1}{2}, 0)$, non amm., $v_S(P_2) = 32 > 28$, pertanto anche P_2 rimane aperto.

Dal nodo P_1 istanziamo la variabile x_4, mentre dal nodo P_2 istanziamo x_3.

Metodo Branch and Bound

Esempio



La soluzione ottima è $(0, 1, 1, 0)$.

Rilassamento Lagrangiano

Dato il problema dello zaino

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le C \\ x_j \in \{0,1\} \end{cases} \tag{P}$$

il rilassamento lagrangiano è:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} v_j x_j + \lambda(C - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j) = \\ \qquad = \sum_{j=1}^{n} (v_j - \lambda p_j) x_j + C\lambda \\ x_j \in \{0,1\} \end{cases} \tag{RL$_\lambda$}$$

Il valore ottimo di (RL$_\lambda$) è uguale al valore ottimo del suo rilassamento continuo. Quindi il valore ottimo del duale lagrangiano di (P) coincide con il valore ottimo del rilassamento continuo di (P).

Cover

Definizione

Un insieme $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ è una *cover* se $\sum_{j \in S} p_j > C$.
Una *cover* S è minimale se $S \setminus \{j\}$ NON è una *cover* per ogni $j \in S$.

Teorema

1. Se S è una *cover*, allora
$$\sum_{j \in S} x_j \leq |S| - 1$$
è una DV.
2. Se S_1, S_2 sono due *cover* e $S_1 \subset S_2$, allora la DV generata da S_1 domina quella generata da S_2.
3. Se S è una *cover* e $E(S) = S \cup \{j : p_j \geq p_i \text{ per ogni } i \in S\}$, allora
$$\sum_{j \in E(S)} x_j \leq |S| - 1$$
è una DV che domina quella generata da S.

Cover

Esempio

$$\begin{cases} \max\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 7x_6 + 6x_7 \\ 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19 \\ x_j \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Alcune DV generate da *cover* minimali:

$$\begin{array}{lcl} S = \{1, 2, 3\} & \rightarrow & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ S = \{1, 2, 6\} & \rightarrow & x_1 + x_2 + x_6 \leq 2 \\ S = \{1, 5, 6\} & \rightarrow & x_1 + x_5 + x_6 \leq 2 \\ S = \{3, 4, 5, 6\} & \rightarrow & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3 \end{array}$$

Dalla cover $S = \{3, 4, 5, 6\}$ si ricava $E(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, quindi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

è una DV che domina $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$.

Problema dello zaino a variabili intere

Problema

Dati: n tipi di oggetti, ognuno di valore v_j peso p_j; un contenitore di capacità C. Quanti oggetti di ogni tipo devo inserire nel contenitore in modo da massimizzare il valore totale?

Modello

Variabili: x_j = numero (intero) di oggetti di tipo j inseriti nel contenitore
Modello:

$$\max \sum_{j=1}^{n} v_j\, x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j\, x_j \leq C$$

$$x_j \in \mathbb{N} \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

Metodo Branch and Bound

Metodi *greedy* per trovare una soluzione ammissibile.

Metodo 1

Esamino gli oggetti in ordine di valore decrescente.
Inserisco ogni oggetto nella massima quantità possibile, purché sia rispettato il vincolo di capacità.

Esempio

Oggetto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Valore	50	65	35	16	18	55	45	40	25	
Peso	31	39	26	21	25	28	29	27	23	$C = 100$

$x_2 = 2$, $x_6 = 0$, $x_1 = 0$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$, $x_3 = 0$, $x_9 = 0$, $x_5 = 0$, $x_4 = 1$.
Quindi $v_I(P) = 146$.

Metodo Branch and Bound

Metodo 2

Esamino gli oggetti in ordine di peso crescente.
Inserisco ogni oggetto nella massima quantità possibile, purché sia rispettato il vincolo di capacità.

Esempio

Oggetto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Valore	50	65	35	16	18	55	45	40	25	
Peso	31	39	26	21	25	28	29	27	23	$C = 100$

$x_4 = 4$, $x_9 = 0$, $x_5 = 0$, $x_3 = 0$, $x_8 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.
Quindi $v_I(P) = 64$.

Metodo Branch and Bound

Metodo 3

Esamino gli oggetti in ordine di rendimento decrescente.
Inserisco ogni oggetto nella massima quantità possibile, purché sia rispettato il vincolo di capacità.

Esempio

Oggetto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Valore	50	65	35	16	18	55	45	40	25	
Peso	31	39	26	21	25	28	29	27	23	$C = 100$

$x_6 = 3$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$, $x_3 = 0$, $x_9 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$.
Quindi $v_I(P) = 165$.

Metodo Branch and Bound

Calcoliamo una $v_S(P)$ risolvendo il rilassamento continuo.

Teorema

Se $\max_j\{\frac{v_j}{p_j}\} = \frac{v_r}{p_r}$, allora il rilassamento continuo

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j\, x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j\, x_j \leq C \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ha come soluzione ottima

$$\bar{x}_1 = 0,\ \ldots,\ \bar{x}_{r-1} = 0,\ \bar{x}_r = \frac{C}{p_r},\ \bar{x}_{r+1} = 0,\ \ldots,\ \bar{x}_n = 0$$

e valore ottimo $C\, v_r / p_r$.

Metodo Branch and Bound

Esempio

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} \max \; 4\,x_1 + 20\,x_2 + 27\,x_3 + 26\,x_4 \\ \qquad 4\,x_1 + 19\,x_2 + 16\,x_3 + 14\,x_4 \leq 32 \\ x_j \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{P}$$

Disponiamo le variabili in ordine di rendimento decrescente:

variabili	4	3	2	1
rendimenti	1.85	1.68	1.05	1

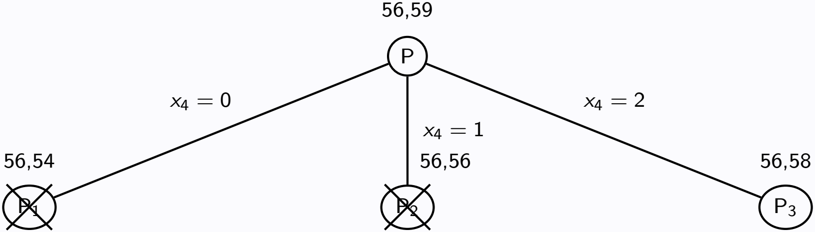
Il terzo algoritmo *greedy* trova la soluzione $(1, 0, 0, 2)$ con $v_I(P) = 56$.

La soluzione ottima del rilassamento continuo è $(0, 0, 0, \frac{32}{14})$, quindi $v_S(P) = 59$.

Metodo Branch and Bound

Esempio (segue)

Istanziamo la variabile x_4 (frazionaria nell'ottimo del rilassamento continuo di P) e facciamo un *branch* non binario in modo che anche i sottoproblemi siano problemi di zaino:

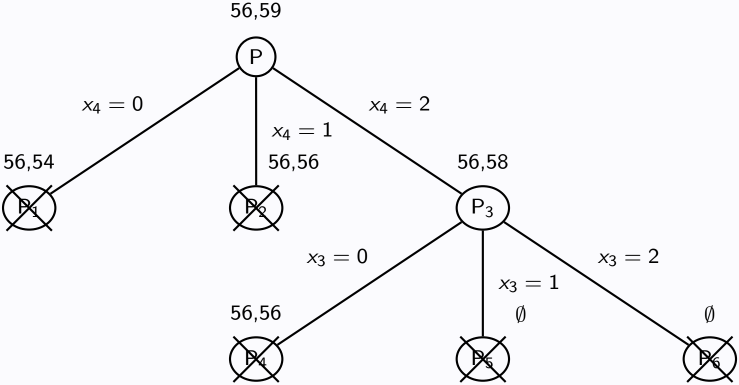


La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_1 è $(0, 0, 2, 0)$, quindi $v_S(P_1) = 54 < 56 = v_I(P)$ e chiudiamo P_1.
La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(0, 0, \frac{9}{8}, 1)$, quindi $v_S(P_2) = 56 = v_I(P)$ e chiudiamo anche P_2.
La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(0, 0, \frac{1}{4}, 2)$, quindi $v_S(P_3) = 58 > 56 = v_I(P)$, pertanto P_3 rimane aperto.

Metodo Branch and Bound

Esempio (segue)

Dal nodo P_3 istanziamo la variabile x_3:



L'ottimo del rilassamento di P_4 è $(0, \frac{4}{19}, 0, 2)$: $v_S(P_4) = 56 = v_I(P)$.
P_5 e P_6 non contengono soluzioni ammissibili, quindi si possono chiudere.
Pertanto la soluzione ottima è $(1, 0, 0, 2)$ con valore 56.

Problema del Bin packing

Problema

Dati: n oggetti di peso $p_1, \ldots, p_n$ e m contenitori ognuno di capacità C.

Trovare il minimo numero di contenitori in cui inserire tutti gli oggetti.

Teorema

Questo problema è NP-hard.

Modello

Variabili: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se oggetto } j \text{ inserito contenitore } i, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$ $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è usato,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall\, j = 1, \dots, n \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j\, x_{ij} \leq C\, y_i \quad \forall\, i = 1, \dots, m \tag{2}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i, j$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i$$

(1): ogni oggetto è inserito in un solo contenitore.
(2): capacità contenitori.

Metodi euristici

Per calcolare una $v_S(P)$ descriviamo 3 algoritmi *greedy*.

Algoritmo Next-Fit Decreasing (NFD)

Esamina gli oggetti in ordine di peso decrescente.
Il primo contenitore è il contenitore corrente.
Se possibile, assegna un oggetto al contenitore corrente;
altrimenti assegnalo ad un nuovo contenitore, che diventa quello corrente.

Esempio

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
p_j	70	60	50	33	33	33	11	7	3	$C = 100$

Contenitori	Oggetti	Capacità residua
1	1	30
2	2	40
3	3 4	50 17
4	5 6 7 8 9	67 34 23 16 13

Metodi euristici

Algoritmo First-Fit Decreasing (FFD)

Esamina gli oggetti in ordine di peso decrescente.
Assegna ogni oggetto al primo contenitore usato che può contenerlo.
Se nessuno di essi può contenerlo, assegna l'oggetto ad un nuovo contenitore.

Esempio

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
p_j	70	60	50	33	33	33	11	7	3	$C = 100$

Contenitori	Oggetti	Capacità residua
1	1 7 8 9	30 19 12 9
2	2 4	40 7
3	3 5	50 17
4	6	67

Metodi euristici

Algoritmo Best-Fit Decreasing (BFD)

Esamina gli oggetti in ordine di peso decrescente.
Tra tutti i contenitori usati che possono contenere un oggetto, scegli quello con la minima capacità residua.
Se nessuno di essi può contenerlo, assegna l'oggetto ad un nuovo contenitore.

Esempio

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
p_j	70	60	50	33	33	33	11	7	3	$C = 100$

Contenitori	Oggetti	Capacità residua
1	1	30
2	2 4 8	40 7 0
3	3 5 7 9	50 17 6 3
4	6	67

Rilassamento continuo

Teorema

Il rilassamento continuo di (P):

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall\, j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^{n} p_j\, x_{ij} \le C\, y_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n \\ 0 \le x_{ij} \le 1 \quad \forall\, i, j \\ 0 \le y_i \le 1 \quad \forall\, i \end{cases} \tag{RC}$$

ha come soluzione ottima $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad y_i = \dfrac{p_i}{C}$ per ogni i.

Quindi $L_1 = \left\lceil \sum_{i=1}^{n} p_i / C \right\rceil$ è una $v_I(P)$.