Quantum Computing

Alessandra Di Pierro

1 Esercitazione 1

Esercizio 1.1 (Operazioni su un qubit) *Dimostra che ogni matrice unitaria* 2×2, U, *si puó esprimere nella forma*

$$U = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)}\cos(\frac{\gamma}{2}) & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)}\sin(\frac{\gamma}{2}) \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)}\sin(\frac{\gamma}{2}) & e^{i(\alpha+\beta/2+\delta/2)}\cos(\frac{\gamma}{2}) \end{bmatrix}.$$

dove α, β, δ *e* γ *sono numeri reali.*

Esercizio 1.2 (Variante su teletrasporto) *Considera due qubits nello stato* $\alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle$. *Applica Hadamard al primo qubit. Qual è lo stato del secondo qubit dopo aver misurato il primo?*

Esercizio 1.3 (Notazione di Dirac) *Per denotare un registro di due qubits, ad esempio* $|01\rangle$, *si usano spesso notazioni alternative come* $|0,1\rangle$, $|0\rangle\,|1\rangle$ *o* $|0\rangle \otimes |1\rangle$. *Ricordando che il prodotto tensore è associativo e distributivo, calcola* $|\psi\rangle^{\otimes 4} \equiv |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$, *dove* $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.
Qual è la relazione del valore trovato con la formula:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x=0}^{q-1} |x\rangle \,, \ \textit{per } q = 2^4?$$

Esercizio 1.4 (Prodotto tensore) *Verifica che*

1. $H^{\otimes n}\,|0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle$.

2.
$$\begin{aligned} H\,|x\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \textstyle\sum_{y \in \{0,1\}} (-1)^{xy}\,|y\rangle \\ H^{\otimes n}\,|x\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2^n}} \textstyle\sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{x \cdot y}\,|y\rangle \,, \end{aligned}$$

dove $x \in \{0,1\}^n$ *e* $x \cdot y$ *è* $\sum_{j=1}^{n} x_i y_i$ *modulo* 2.

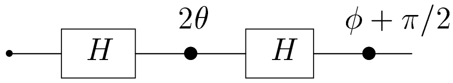

Figure 1:

Esercizio 1.5 (Circuiti quantistici) *Considera il circuito in Figura 1 dove* $0 \leq \theta \leq \pi/2$ *e per ogni angolo* α*, l'operazione* α *é definita dalla matrice*

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{bmatrix}.$$

Verifica che su input $|0\rangle$ *il circuito calcola* $\cos\theta\,|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta\,|1\rangle$ *(a meno di un fattore di fase globale).*