Quantum Computing

Alessandra Di Pierro

1 Esercitazione 2

Esercizio 1.1 *Dimostra che se un'operazione unitaria su un singolo qubit U é tale che $U = V^2$ dove V é un'altra operazione unitaria su un singolo qubit, allora l'operazione $C^2(U)$ puó essere implementata mediante il circuito in Figura 1. Verifica inoltre che per $V = (1-i)(I+iX)/2$ questo circuito implementa il gate di Toffoli.*

Soluzione

Otteniamo le seguenti trasformazioni dell'input:

$$
\begin{gathered}
|00x\rangle \mapsto |00x\rangle \mapsto |00x\rangle \mapsto |00x\rangle \mapsto |00x\rangle \mapsto |00x\rangle\,. \\
|01x\rangle \mapsto |01Vx\rangle \mapsto |01Vx\rangle \mapsto \left|01VV^\dagger x\right\rangle \mapsto |01x\rangle \mapsto |01x\rangle\,. \\
|10x\rangle \mapsto |10x\rangle \mapsto |11x\rangle \mapsto \left|11V^\dagger x\right\rangle \mapsto \left|10V^\dagger x\right\rangle \mapsto \left|10VV^\dagger x\right\rangle = |10x\rangle\,. \\
|11x\rangle \mapsto |11Vx\rangle \mapsto |10Vx\rangle \mapsto |10Vx\rangle \mapsto |11Vx\rangle \mapsto |11VVx\rangle = |11Ux\rangle\,.
\end{gathered}
$$

Quindi il circuito implementa $C^2(U)$. Se $V = (1-i)(I+iX)/2$, allora $V^2 = (1-i)^2(I - X^2 + 2iX)/4 = -2i(2iX)/4 = X$. Pertanto il circuito implementa $C^2(NOT)$, cioé il gate di Toffoli.

Esercizio 1.2 *Verifica che $XYX = -Y$ e $XZX = -Z$. Quindi dimostra che $XR_y(\theta)X = R_y(-\theta)$ e $XR_z(\theta)X = R_z(-\theta)$.*

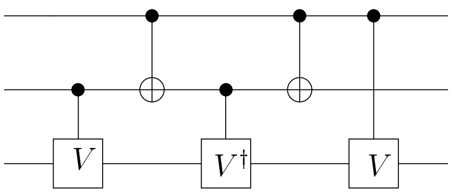

Figure 1: Circuito che realizza $C^2(U)$ per $U = V^2$

Soluzione

Le prime due equazioni si verificano facilmente. Ricordiamo la proprietá dell'esponenziale di una matrice:

$$\text{se } C \text{ é invertibile, allora } e^{CAC^{-1}} = Ce^{A}C^{-1},$$

da cui si ottiene immediatamente (dato che X é invertibile)

$$XR_y(\theta)X = e^{-i\theta XYX/2} = e^{i\theta Y/2} = R_y(-\theta).$$

Analogamente si ottiene l'equazione per $XR_z(\theta)X$.

Esercizio 1.3 *Considera la seguente matrice unitaria a due livelli:*

$$U = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

I due livelli effettivi corrispondono a $s = 000$ e $t = 111$.

(i) *Costruire il circuito corrispondente applicando l'algoritmo visto a lezione con il codice di Gray $000 \to 001 \to 011 \to 111$.*

(ii) *Verifica direttamente che il circuito costruito implementa U.*

(iii) *Qual é la matrice per il cambio di base corrispondente alle due operazioni controllate presenti nel circuito?*

Esercizio 1.4 *Dimostra che ogni operazione $C^n(U)$, dove U é una matrice unitaria su un singolo qubit, puó essere implementata usando $O(n)$ operazioni su singolo qubit e* `CNOT`.