


**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

---

## Esempi di simulazione

Simulazione – Esercitazione n. 1  
Corso di Laurea in Informatica Applicata  
Università di Pisa, sede di La Spezia

---

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 1/20 


**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

---

## Contenuti

- Un caso di balistica
- Modello statico e modello dinamico
- Studi di popolazioni
- La mappa logistica
- Determinismo e caos

---

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 2/20 

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia


---

## Moto di un proiettile

- Studiare gittata e traiettoria
  - Semplificazioni: 2D, niente attrito dell'aria, suolo piatto
  - Sistema deterministico, continuo, chiuso
  - Equazioni del moto in  $x, y$ , con parametri
    - $g$  accelerazione di gravità
    - $v$  velocità iniziale del proiettile
    - $\alpha$  alzo
    - $t$  tempo

$$x = v \cos \alpha t$$
$$y = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

---

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 3/20 

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

## Primo modello, statico

- Per la gittata
  - Non interessa il tempo, basta sapere dove arrivo ( $x_a$ )
  - Il tempo comunque nel modello c'è (e serve)
- Costruzione del modello
  - Il sistema è riscritto sostituendo  $t$  come espressione di  $x$
  - Si pone  $y$  a 0 ottenendo un'equazione di II grado in  $x$
  - Una soluzione è 0 (il punto di partenza), ci interessa l'altra
- Il simulatore, una formula
$$x_a = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

Giovanni A. Cignoni - Simulazione - [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 4/20

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

## I passaggi (per gli scettici)

- Dalle equazioni, sostituendo  $t$ 
$$x = v \cos \alpha t \quad t = \frac{x}{v \cos \alpha}$$
$$y = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \quad y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x - \frac{g}{2(v \cos \alpha)^2} x^2$$
- Risolvendo  $x(ax + bx)$ , con radice  $-a/b$ 
$$x_a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{2(v \cos \alpha)^2}{g} = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

Giovanni A. Cignoni - Simulazione - [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 5/20

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

## Secondo modello, dinamico

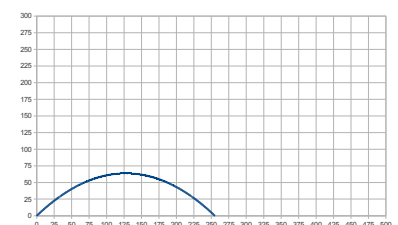
- Per la traiettoria
  - Calcolare le posizioni nel tempo (un insieme di dati)
  - Eseguire (osservare) il modello rispetto al tempo
  - Si possono usare direttamente le equazioni "normali"
- Un approccio tipico
  - Funzioni dello stato corrente e del tempo (discretizzato) trascorso dal precedente stato
$$x_{i+1} = x_i + v \cos \alpha dt$$
$$y_{i+1} = y_i + \left( v \sin \alpha - \frac{\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_i}{2} \right) dt \quad \text{con } \bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i + g dt$$


Giovanni A. Cignoni - Simulazione - [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 6/20

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

## Traiettoria, disegnata per punti $(x, y)$

- Parametri (per es. di un foglio di calcolo)
  - $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$
  - $v = 50 \text{ m/s}$
  - $\alpha = 45^\circ$
  - $dt = 0.25 \text{ s}$
- Risultati
  - $x, y$
  - UdM m




Giovanni A. Cignoni - Simulazione - [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 7/20 

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

## Motivazioni e svantaggi


- Poter considerare parametri che variano
  - Ad esempio: attrito dell'aria, o anche la gravità
  - Dipendono dallo stato (una parte, nell'esempio da  $y$ )
  - Considerarli in funzioni "assolute" spesso è complicato
  - Impossibile quando la parte di stato è un risultato da scoprire
  - Oppure quando ci sono interazioni imprevedibili
  - Da parte di altre entità del sistema o dall'esterno (utenti)
- Problemi di integrazione
  - Il tempo avanza per passi discreti (eventualmente piccoli)
  - Le funzioni sono continue

Giovanni A. Cignoni - Simulazione - [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 8/20 

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

## Studio di una popolazione

- Logistic map
  - È un caso di studio di biologia (Robert May, 1976)
  - Deriva da un modello demografico (Pierre F. Verhulst, 1838)
  - È un esempio ricco di comportamenti diversi
  - Studiabile solamente con l'esecuzione del modello
- Modello concettuale
  - L'ecosistema ha una capacità fissa di sostentamento
  - La popolazione cresce in proporzione al numero di individui (+ individui, + nascite)
  - La popolazione decresce in proporzione inversa (+ individui, - risorse, + morti di inedia)

Giovanni A. Cignoni - Simulazione - [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 9/20 

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

## Logistic map: modello

- Modello deterministico e chiuso
  - Popolazione come funzione della generazione precedente
  - Impostazione dinamica e discreta tipica di questo dominio
- Parametri e convenzioni
  - Popolazione espressa rispetto alla capacità dell'ecosistema, 1 corrisponde alla massima popolazione sostenibile
  - Tasso di crescita o di fertilità della specie, espresso da un parametro costante  $\alpha$
  - Tasso di decrescita, funzione della disponibilità di risorse, espresso come distanza dalla max popolazione sostenibile

$$x_{n+1} = f(x_n) = \alpha x_n (1 - x_n)$$

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 10/20 

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia


## Altri modelli

- Modello di Ricker (W. Ricker, 1954)
  - Tasso di natalità ( $r$ ) e capacità di sostentamento ( $k$ )

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n e^{r(1 - \frac{x_n}{k})}$$

- Prede e predatori (A. Lotka e V. Volterra, ~1925)
  - Nascite e morti, naturali o determinate dagli incontri

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n) = \alpha x_n - \beta x_n y_n \quad (\text{prede})$$
$$y_{n+1} = g(x_n, y_n) = \gamma x_n y_n - \delta y_n \quad (\text{predatori})$$

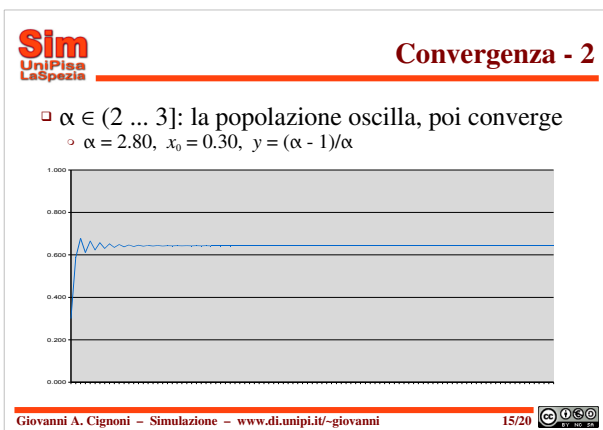
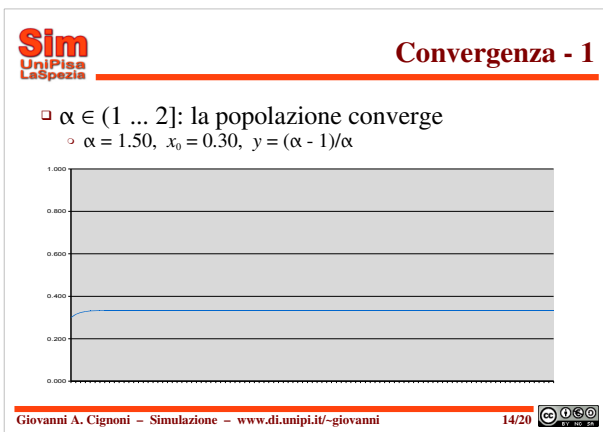
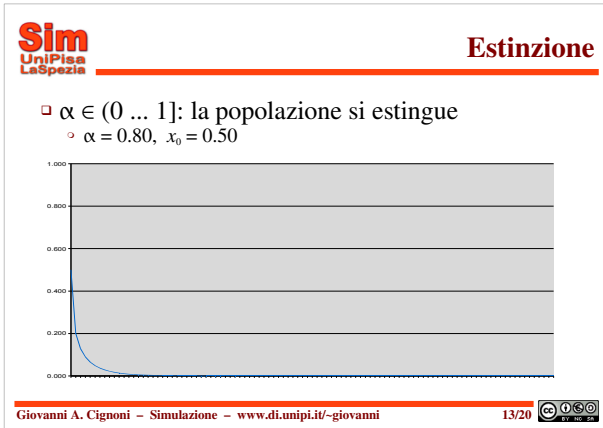
Giovanni A. Cignoni – Simulazione – [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 11/20 

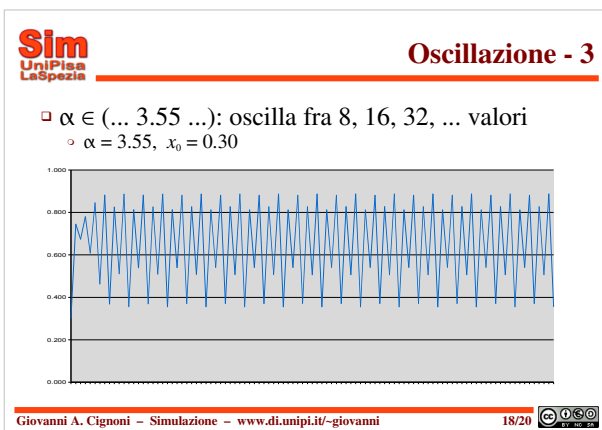
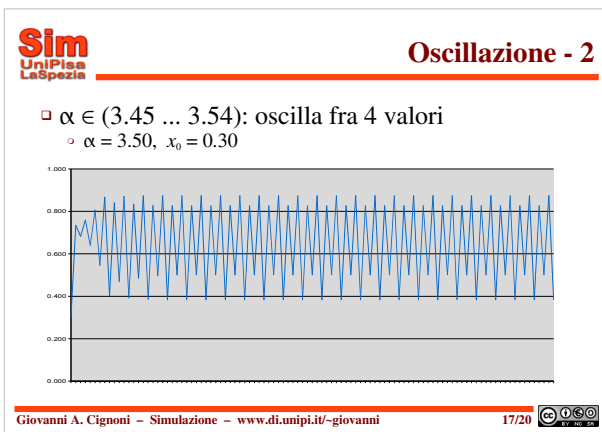
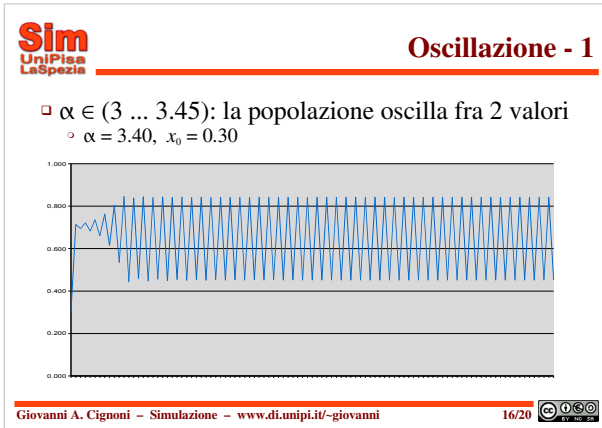
**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

## Logistic map: studio

- Realizzazione del simulatore
  - Con un foglio di calcolo
  - Parametri  $\alpha$  e  $x_0$
- Comportamenti osservabili
  - Dipendenti soprattutto dal parametro  $\alpha$
  - Estinzione
  - Convergenza monotona a un valore noto, funzione di  $\alpha$
  - Convergenza dopo un numero finito di oscillazioni
  - Oscillazioni periodiche, con diversi periodi
  - Comportamenti caotici
  - Divergenza

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 12/20 

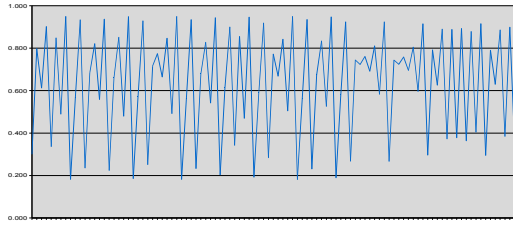





**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

**Caos**

- $\alpha \in (3.57 \dots 4]$ : nessun periodo
  - $\alpha = 3.80, x_0 = 0.30$



Giovanni A. Cignoni - Simulazione - [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 19/20 

**Sim**  
UniPisa  
LaSpezia

**Altre note**

- I comportamenti per  $\alpha \leq 4$  sono indipendenti da  $x_0$
- Ci sono isole di stabilità per  $\alpha \in (3.57 \dots 4)$
- Nelle isole di stabilità si trovano oscillazioni per tutti i periodi (3, 6, 12, ...; 5, 10, 20, ...)
- Per  $\alpha > 4$  diverge ( $x > 1$ ) e poi si estingue ...  
... ma non per tutti gli  $x_0$

Giovanni A. Cignoni - Simulazione - [www.di.unipi.it/~giovanni](http://www.di.unipi.it/~giovanni) 20/20 