

Appunti del corso di **Mercati Finanziari**

Lorenzo Cioni

Dottorato di Ricerca in Matematica per le Decisioni Economiche

a.a. 2004/2005

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa

e-mail: lcioni@di.unipi.it

Sommario

Questi appunti contengono un sunto delle lezioni di Finanza tenute dal Professor Barucci nel mese di Aprile del 2005 nell'ambito dei corsi del primo anno del Dottorato di Ricerca in *Matematica per le Decisioni Economiche*, sunto integrato da osservazioni ed aggiunte personali. Ovviamente *all errors are mine*.

Indice

1	Prima Lezione	4
1.1	Introduzione	4
1.2	Avversione al rischio di un soggetto	7
1.3	Problema delle scelte del portafoglio	12
1.4	Principio di diversificazione	19
2	Seconda Lezione	24
2.1	Economia a due istanti	25
2.2	La scatola di Edgeworth	28
2.3	Equilibrio Arrow-Debreu	33
2.4	Condizioni di equilibrio	34
3	Terza Lezione	46
3.1	Il modello CAPM	46
3.2	Arbitraggio	49
3.3	Modelli APT e CAPM	55
3.4	Arbitraggio asintotico	57
4	Quarta Lezione	58
4.1	Modelli multiperiodali	58
4.2	Modello ed evoluzione	63
A	Appendice	70
A.1	Scelta in condizioni di incertezza	70
A.1.1	Lotterie e teoria dell'utilità attesa	70
A.1.2	Lotterie monetarie e avversione al rischio	73
A.1.3	Utilità dipendente dallo stato (cenni)	78
A.2	Equilibrio generale in condizioni di incertezza	80
A.2.1	Esempi di teoria generale dell'equilibrio	81
A.2.2	Economia di puro scambio	81
A.2.3	Equilibrio generale in condizioni di incertezza: introduzione	89
A.2.4	Equilibrio generale in condizioni di incertezza: economia di mercato con commodity contingenti	89
A.2.5	Equilibrio Arrow-Debreu	91
	Riferimenti Bibliografici	94

Elenco delle figure

1	<i>Continuità delle relazioni di preferenza (sugli assi si hanno le probabilità degli eventi)</i>	5
2	Avversione al rischio e premio per il rischio (dettagli nel testo)	8
3	Gradi di avversione al rischio (dettagli nel testo)	11
4	Funzione di utilità quadratica (dettagli nel testo)	12
5	Portafoglio con due titoli (dettagli nel testo)	15
6	$E[\tilde{r} - r_f] > 0$ sse $w^* > 0$ (dettagli nel testo)	20
7	Esempio di lotteria (dettagli nel testo)	24
8	La scatola di Edgeworth 1 (dettagli nel testo)	28
9	La scatola di Edgeworth 2 (dettagli nel testo)	29
10	La scatola di Edgeworth 3 (dettagli nel testo)	31
11	La scatola di Edgeworth: soggetto neutro al rischio (dettagli nel testo)	33
12	Mercato e individuo (dettagli nel testo)	36
13	Modello CAPM (dettagli nel testo)	48
14	Albero degli eventi (dettagli nel testo)	59
15	Albero degli eventi (dettagli nel testo)	61
16	Albero degli eventi (dettagli nel testo)	63
17	Albero degli eventi e backward induction (dettagli nel testo)	64
18	Avversione al rischio (dettagli nel testo)	75
19	Neutralità al rischio (dettagli nel testo)	76
20	Scatola di Edgeworth (dettagli nel testo)	83
21	Insiemi di bilancio (dettagli nel testo)	84
22	Curve di indifferenza (dettagli nel testo)	85
23	Curve di certezza e dei contratti (dettagli nel testo)	87
24	Allocazioni Pareto ottime e no (dettagli nel testo)	88
25	Ecconomia biperiodale (dettagli nel testo)	93

1 Prima Lezione

Durante le lezioni saranno trattati i seguenti temi:

1. scelte di portafoglio,
2. modelli di equilibrio con arbitraggio.

Per poter trattare tali temi definiremo una *modellistica* che ci permetterà di interpretare i fatti e che è basata su un certo numero di ipotesi che, però, prevedono il ricorso a un apparato matematico ridotto dove l'enfasi è posta sulle questioni economiche.

1.1 Introduzione

L'idea di base è di avere due istanti di tempo, indicati con t_0 e t_1 : nel primo si sceglie cosa fare riguardo al futuro (secondo istante), futuro il cui esito è incerto. Per la descrizione si fa uso di *variabili aleatorie* (in breve *v.a.*) e di uno *spazio di probabilità* ovvero della terna eventi, σ -algebra sugli eventi e *distribuzione di probabilità*:

$$(\Omega, \Theta, \mu) \tag{1}$$

Le v.a. che utilizzeremo sono definite nel discreto su un insieme $\tilde{X}$ in modo da definire:

1. un numero finito di eventi elementari ω_i , $i = 1, \dots, S$,
2. a ciascun evento è assegnata una probabilità π_i , $i = 1, \dots, S$.

Le v.a. sono definite come coppie di S -uple (con S grande a piacere), una dei valori possibili (x_i) e una delle relative probabilità (π_i):

$$a = [x_1, \dots, x_S, \pi_1, \dots, \pi_S] \tag{2}$$

$$a : (\Omega, \Theta) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3}$$

In tal modo si fissano sia lo spazio degli eventi sia l'insieme dei valori x_i assumibili dalle v.a. facendo variare solo le probabilità π_i degli eventi. Si definisce lo *spazio delle lotterie* su supporto monotono μ oggetto delle scelte. Il legame fra le grandezze introdotte è il seguente:

1. ω_i sono gli eventi,
2. x_i rappresenta il livello di soddisfazione di ognuno degli ω_i ,

3. π_i rappresenta la probabilità che una v.a. $\mathbf{a}$ assuma il valore x_i .

Si sceglie in quest'ambito e si sceglie in base alla logica della *teoria del consumatore*. A tal fine si usano *relazioni di preferenza* di tipo *binario* rappresentate mediante *funzioni di utilità*

Definizione 1.1 (Teoria assiomatica della utilità attesa) *È alla base della scelta in condizioni di incertezza ([MCWG95]) e si basa sulla definizione di alternative con risultati incerti descritti per mezzo di probabilità oggettivamente conosciute definite su un insieme astratto di possibili risultati. Le rappresentazioni di alternative rischiose sono dette lotterie e su di esse sono definite relazioni di preferenza razionali rappresentate da funzioni di utilità sotto forma di utilità attese.*

Definizione 1.2 (Composizione di lotterie) *Date due lotterie a e $b \in \mathcal{M}$*

$$a = [x_1, \dots, x_S, \pi_1^a, \dots, \pi_S^a] \quad (4)$$

$$b = [x_1, \dots, x_S, \pi_1^b, \dots, \pi_S^b] \quad (5)$$

e dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si definisce

$$\alpha a + (1 - \alpha)b = [x_1, \dots, x_S, \alpha\pi_1^a + (1 - \alpha\pi_1^b), \dots, \alpha\pi_S^a + (1 - \alpha\pi_S^b)] \quad (6)$$

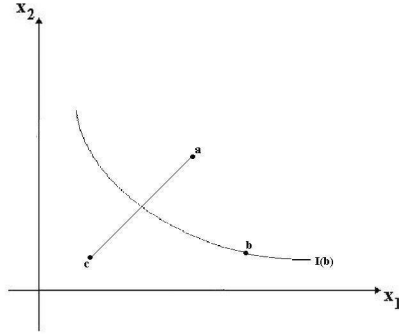


Figura 1: *Continuità delle relazioni di preferenza (sugli assi si hanno le probabilità degli eventi)*

Definizione 1.3 (Ipotesi sulle relazioni di preferenza) *Sulle relazioni di preferenza su un insieme $\mathcal{M}$ si fanno le seguenti ipotesi:*

1. **razionalità**, una relazione di preferenza è razionale se è

- (a) **riflessiva**, ovvero $\forall a \in \mathcal{M} \ a \mathcal{R} a$,
- (b) **completa**, ovvero $\forall a, b \in \mathcal{M}$ si ha $a \mathcal{R} b$ oppure $b \mathcal{R} a$ oppure entrambe,
- (c) **transitiva**, ovvero $\forall a, b, c \in \mathcal{M}$ si ha $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$;

2. **continuità**, una relazione di preferenza è continua se date tre lotterie (vedi la definizione 1.2) a , b e $c \in \mathcal{M}$ tali che

$$a \mathcal{R} b \ b \mathcal{R} c \Rightarrow \exists \alpha \in [0, 1] \text{ tale che si ha } (\alpha a + (1 - \alpha)c) I b \quad (7)$$

con I che rappresenta una relazione di indifferenza (vedi la figura 1 in cui $I(b)$ rappresenta l'insieme di indifferenza della lotteria b);

3. **indipendenza**, una relazione di preferenza gode della proprietà di indipendenza sse $\forall a^1, a^2 \in \mathcal{M}$ con $a^1 \mathcal{R} a^2$ comunque scelgo $a^3 \in \mathcal{M}$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$ si ha:

$$\alpha a^1 + (1 - \alpha) a^3 \mathcal{R} \alpha a^2 + (1 - \alpha) a^3 \quad (8)$$

Nota 1.1 La relazione $a \mathcal{R} b$ significa che a è almeno tanto buona quanto b . Si noti che se si hanno entrambe le $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} a$ si ha una indifferenza fra le due alternative a e b .

Nota 1.2 È molto difficile che la proprietà di indipendenza sia verificata da una relazione di preferenza perchè la presenza di a^3 modifica le preferenze di a^1 e a^2 rispetto al caso in cui sono da sole. In questi casi si parla di contestualizzazione dal momento che la lotteria a^3 cambiano sia il contesto sia le attitudini.

Se la relazione di preferenza $\mathcal{R}$ soddisfa le proprietà della definizione 1.3 si può passare dalla $\mathcal{R}$ alla funzione utilità attesa u per cui si ha la seguente definizione.

Definizione 1.4 Se $\mathcal{R}$ soddisfa le proprietà della definizione 1.3

$\exists u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall a^1, a^2 \in \mathcal{M}$ vale la seguente relazione:

$$a^1 \mathcal{R} a^2 \text{ sse } \sum_{s=1}^S \pi_s^1 u(x_s) \geq \sum_{s=1}^S \pi_s^2 u(x_s) \quad (9)$$

Si deve, pertanto, scegliere:

- 1. cosa volere e
- 2. la sua utilità ovvero il livello di soddisfazione x_i e il valore relativo della funzione utilità $u(x_i)$.

1.2 Avversione al rischio di un soggetto

Si introducono le seguenti definizioni di *lotteria attuarialmente equa* e di *avversione al rischio*.

Definizione 1.5 Una v.a.o gioco o lotteria sono **attuarialmente eque o giuste** se il loro valore atteso è nullo.

Definizione 1.6 Un soggetto è **avverso al rischio** se, per ogni livello di ricchezza detenuto con certezza, rifiuterà qualunque lotteria attuarialmente equa e quindi, partendo da una situazione di certezza, non vuole introdurre una componente di rumore.

Un soggetto è **neutrale al rischio** se è indifferente rispetto all'accettare o rifiutare una lotteria attuarialmente equa.

Un soggetto è **amante del rischio** se preferisce giocare a testa o croce.

Se un soggetto possiede X e si definisce una v.a.¹ $\tilde{\varepsilon}$ con $E(\tilde{\varepsilon}) = 0$ le tre categorie individuate nella definizione 1.6 sono caratterizzate nel modo seguente:

1. avverso al rischio (AvR) se $u(x) \geq E[u(X + \tilde{\varepsilon})]$,
2. neutro al rischio (NR) se $u(x) = E[u(X + \tilde{\varepsilon})]$,
3. amante del rischio (AmR) se $u(x) < E[u(X + \tilde{\varepsilon})]$,

Definizione 1.7 (Caratterizzazione analitica dell'avversione al rischio)

Il soggetto parte da

$$\tilde{X} = X + \tilde{\varepsilon} \quad (10)$$

$$E[\tilde{\varepsilon}] = 0 \quad (11)$$

ovvero $\tilde{X}$ ha media X . Si parla di contratto di assicurazione e di premio per il rischio. Data la v.a. $\tilde{X}$ ed una funzione $G()$ concava (ovvero tale che $g''() < 0$) si ha che:

$$E[g(\tilde{x})] \leq g(E[\tilde{x}]) \quad (12)$$

per cui si hanno le seguenti condizioni:

1. $AvR \iff u()'' < 0$ ovvero u concava,
2. $NR \iff u()'' = 0$ ovvero u lineare,

¹Nelle presenti note le grandezze caratterizzate dalla presenza del carattere $\tilde{}$ sono da intendersi essere v.a.

3. $AmR \iff u'' > 0$ ovvero u convessa,

Definizione 1.8 (Premio per il rischio) Lo si indica con $\rho_u(\tilde{X})$ e stà ad indicare il massimo quantitativo di denaro che un agente può voler pagare per passare dalla incertezza al suo valor medio. la definizione dipende dalla v.a. $\tilde{X}$ di cui si vuole il valor medio. In termini di premio per il rischio le condizioni suddette si trasformano nelle seguenti:

1. $AvR \iff \rho_u(\tilde{X}) > 0$,
2. $NR \iff \rho_u(\tilde{X}) = 0$,
3. $AmR \iff \rho_u(\tilde{X}) < 0$.

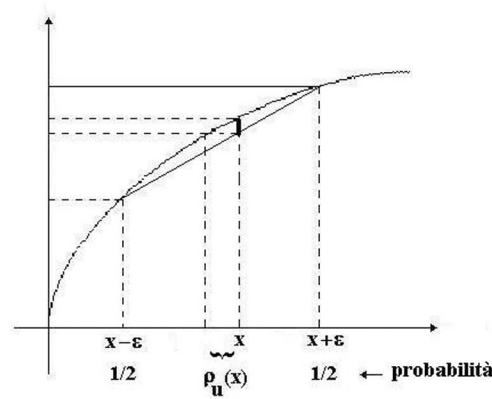


Figura 2: Avversione al rischio e premio per il rischio (dettagli nel testo)

La figura 2 illustra come l'utilità attesa nel punto di ascissa x sia inferiore al valore in x sulla curva (la differenza è rappresentata dal tratto in grassetto). Sull'asse delle ascisse si misura il *prezzo per il rischio* $\rho_u(x)$ come l'ammontare di denaro che rende un agente indifferente alla condizione di partenza. Si ha:

$$u(x - \rho_u(\tilde{x})) = E[u(\tilde{x})] \quad (13)$$

$$x - \rho_u(\tilde{x}) = CE_u(x) \quad (14)$$

dove $CE_u(x)$ si dice **cerchio equivalente della lotteria**. Volendo misurare l'avversione al rischio degli agenti si può far uso delle espansioni in serie di

Taylor. A tal fine si prende una v.a. $[x_1, \dots, x_S, \pi_1, \dots, \pi_S]$ e si definisce la v.a.

$$\tilde{x} = x + \tilde{\varepsilon} \quad (15)$$

come (componente per componente)

$$\tilde{x}_s = x + \tilde{\varepsilon}_s \quad (16)$$

in modo che sia

$$E[\tilde{\varepsilon}] = \sum_{s=1}^S \pi_s \varepsilon_s = 0 \quad (17)$$

Si definisce la seguente uguaglianza:

$$\sum_{s=1}^S \pi_s u(x + \varepsilon_s) = u(x - \rho_u(\tilde{x})) \quad (18)$$

e si passa

1. ad uno sviluppo in serie di Taylor fino al secondo ordine per il primo membro (considerando ε_s come il δ dello sviluppo in serie) e
2. ad uno sviluppo in serie di Taylor fino al primo ordine per il secondo membro (considerando $\rho_u(\tilde{x})$ come il δ dello sviluppo in serie).

Tenuto conto del fatto che sono lotterie vicine ad x ovvero che ci si sposta localmente con lotterie diverse attorno ad x si ha:

Definizione 1.9 Si definisce il **coefficiente assoluto di avversione al rischio** la seguente quantità:

$$\tau_u^a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \quad (19)$$

Tale coefficiente rappresenta una misura della avversione al rischio dei soggetti.

Nota 1.3 Fra il **coefficiente assoluto di avversione al rischio** e la derivata seconda della funzione utilità $u''(x)$ si hanno le relazioni seguenti:

1. $\tau_u^a(x) > 0 \Leftrightarrow u''(x) < 0$ in caso di soggetti *AvR*,
2. $\tau_u^a(x) = 0 \Leftrightarrow u''(x) = 0$ in caso di soggetti *NR*,
3. $\tau_u^a(x) < 0 \Leftrightarrow u''(x) > 0$ in caso di soggetti *AmR*,

legate al fatto che $u'(x) > 0$ per la funzione utilità. Al variare della curvatura della funzione u ovvero al variare di u'' , tenendo conto delle variazioni di u' , si hanno variazioni del coefficiente $\tau_u^a(x)$.

L'ammontare che pago cresce con la varianza della lotteria e con la misura della mia avversione al rischio ovvero al crescere di $\tau_u^a(x)$.

Teorema 1.1 (Teorema di Arrow-Pratt) Il coefficiente $\tau_u^a(x)$ dà una misura locale della avversione al rischio che diventa globale sotto certe opportune ipotesi.

Cosa si intende per un soggetto più o meno avverso al rischio di un altro? Si introducono al proposito degli acronimi che descrivono l'avversione assoluta al rischio (*ARA*) come *crescente* (*I* per increasing), *decrecente* (*D* da decreasing) o costante (*C* da constant) in funzione del segno della derivata parziale del **coefficiente assoluto di avversione al rischio** $\tau_u^a(x)$. Si ha:

1. un soggetto è *DARA* se $\frac{\partial \tau_u^a(x)}{\partial x} < 0$,
2. un soggetto è *IARA* se $\frac{\partial \tau_u^a(x)}{\partial x} > 0$,
3. un soggetto è *CARA* se $\frac{\partial \tau_u^a(x)}{\partial x} = 0$

Nota 1.4 Considero due soggetti a e b con una uguale ricchezza iniziale x e con funzioni utilità rispettivamente u^a e u^b . Come posso affermare che a è più avverso al rischio (*AvR*) di b ? Si ha che a è più *AvR* di b se b accetta sempre una lotteria equa accettata da a ma non vale il viceversa.

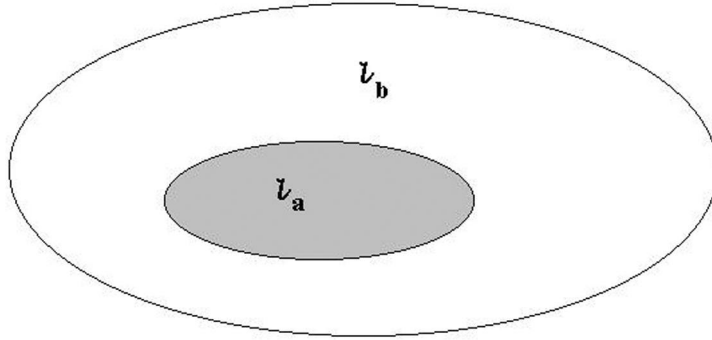


Figura 3: Gradi di avversione al rischio (dettagli nel testo)

Se rappresento graficamente le lotterie accettate da a (l_a) e da b (l_b) ho la situazione della figura 3: Da tale figura si ha:

$$a \text{ accetta una lotteria } \ell \Rightarrow b \text{ accetta la lotteria } \ell \quad (20)$$

ma

$$b \text{ accetta una lotteria } \ell \not\Rightarrow a \text{ accetta la lotteria } \ell \quad (21)$$

Si dice che a è più AvR sse

$$\tau_{u^a}^a(x) \geq \tau_{u^b}^a(x) \quad (22)$$

*ovvero se il **coefficiente assoluto di avversione al rischio** di a non è inferiore a quello di b. Un'altra grandezza che in qualche modo rappresenta una misura dell'avversione al rischio è la varianza.*

1.3 Problema delle scelte del portafoglio

Si considera un soggetto *AvR* di fronte a delle scelte, soggetto caratterizzato da varie funzioni utilità $u()$.

1. Primo caso: funzione di utilità quadratica (vedi la figura 4).

$$u(x) = x - \frac{b}{2}x^2 \quad b > 0 \quad (23)$$

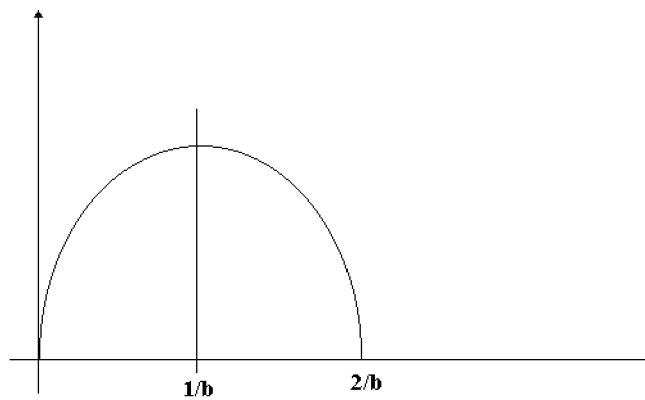


Figura 4: Funzione di utilità quadratica (dettagli nel testo)

Il vantaggio di tale funzione utilità risiede nella sua semplice formulazione gli svantaggi sono i seguenti:

- (a) è decrescente per $x > 1/b$ e ciò non la rende molto adatta come funzione utilità,
- (b) è *IARA* mentre una buona funzione utilità dovrebbe essere *DARA* al crescere della ricchezza x del soggetto.

Si ha:

- (a) $u(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = \frac{2}{b}$,
- (b) $u'(x) = 1 - bx = 0$ per $x = \frac{1}{b}$,
- (c) $u'(x) > 0$ per $x < \frac{1}{b}$,
- (d) $u'(x) < 0$ per $x > \frac{1}{b}$,
- (e) $u''(x) = -b < 0$ ovvero $u()$ è strettamente concava.

2. altre funzioni utilità che si usano nelle applicazioni:

- (a) $u(x) = e^{-ax}$, funzione utilità esponenziale, *CARA*,
- (b) $u(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ con $\alpha \neq 1$, funzione utilità potenza, *DARA*,
- (c) $u(x) = \ln x$, funzione utilità logaritmica, *IARA*.

ma che noi useremo di rado.

Si introduce ora una **economia** caratterizzata da due istanti di tempo ovvero:

- 1. $t = 0$ in cui si prendono le decisioni e
- 2. $t = 1$ in cui si scoprono le conseguenze di tali decisioni.

Il soggetto è descritto dalla sua **funzione utilità** $u()$ che lo descrive come *AvR* ovvero è tale che:

- 1. $u'() > 0$ e
- 2. $u''() < 0$

e dalla sua ricchezza iniziale W_0 . Si vuole la massima utilità attesa finale derivata dalla ricchezza iniziale detta ricchezza finale e indicata come $\tilde{W}$. Il soggetto investe in titoli: al tempo $t = 0$ investe 1 nel titolo n e al tempo $t = 1$ ottiene $\tilde{r}_n$.

In generale si hanno N titoli individuati da un indice $n = 1, \dots, N$. Con $\tilde{r}_n$ si indica il rendimento del titolo generico definito come:

$$\tilde{r}_n = \frac{\text{dividendo domani}}{\text{prezzo oggi}} = \frac{\tilde{d}_n}{p_n} \quad (24)$$

Il prezzo p_n è definito in modo che con una ricchezza pari a 1 si possano comprare $1/p_n$ titoli. Oltre ai titoli a rischio si ha un titolo **privo di rischio** (tipo un Conto Corrente Bancari o Postale) il cui rendimento è r_f . I titoli a rischio sono caratterizzati dalla quantità w_n del titolo n . Si hanno i seguenti tre casi:

- 1. $w_n > 0$, il soggetto possiede il titolo in quantità w_n ,
- 2. $w_n < 0$, il soggetto vende il titolo allo scoperto, ovvero senza possederlo,
- 3. $w_n = 0$, il soggetto non possiede il titolo e nemmeno lo negozia.

La ricchezza del soggetto $\tilde{W}$ è data dalla somma di ciò che il soggetto ottiene dai titoli a rischio (o rischiosi) e di ciò che non investe in titoli a rischio e, quindi, ottiene dal titolo privo di rischio. Formalmente si ha:

$$\tilde{W} = \sum_{n=1}^N w_n \tilde{r}_n + (W_0 - \sum_{n=1}^N w_n) r_f \quad (25)$$

Il soggetto deve risolvere un problema di massimo che possiamo formulare come segue:

$$\max_{W \in \mathbb{R}^N} E[u(\tilde{W})] \quad (26)$$

Il problema consiste nel determinare la massima utilità attesa della ricchezza finale considerando la presenza di titoli a rischio.

Nota 1.5 *La funzione obiettivo che si deve massimizzare è una funzione di N variabili (tante quanti i titoli a rischio). Si hanno derivate parziali e il segno di derivata parziale “passa dentro” il segno di valore atteso e, quindi, dentro la sommatoria (caso discreto) oppure dentro l'integrale (caso continuo).*

Nota 1.6 *La condizione $u''(x) < 0$ ci permette di dire che le condizioni del primo ordine sono sia necessarie sia sufficienti per l'ottimo essendo la funzione utilità concava.*

Si considera il valore atteso dell'utilità associata alla ricchezza finale $\tilde{W}$ ovvero $E[u(\tilde{W})]$ si deriva rispetto a w_n ($n = 1, \dots, N$) e si uguaglia a 0 (condizioni del primo ordine) e si ottiene:

$$E[u'(\tilde{W})(\tilde{r}_n - r_f)] = 0 \quad (n = 1, \dots, N) \quad (27)$$

in cui $(\tilde{r}_n - r_f)$ rappresenta la $\frac{d\tilde{W}}{dw_n}$ ottenuta dalla (25). Quante informazioni sono nascoste nella 27 e quali sono? Le informazioni sono di due tipi:

1. scelte di portafoglio, ovvero dati i rendimenti quale è il portafoglio ottimo,
2. come sono i rendimenti dei titoli in particolare all'equilibrio.

La (25) all'equilibrio deve valere per ogni soggetto e ciò mi permette di capire i rendimenti dei titoli e come si comporta un soggetto in condizioni di incertezza. Si utilizza la (25) per affrontare il seguente problema: come un soggetto avverso al rischio affronta il seguente problema a due dimensioni

1. guadagnare il massimo (massimizzare l'utilità attesa),

2. minimizzare il rischio.

Si può indicare come è fatto il portafoglio che risolve tale problema utilizzando solo le condizioni del primo ordine? Quasi mai. Si può vedere ([Bar03]) come ragionare in termini di momenti primi (o del primo ordine) sia fuorviante per la scelta del portafoglio ottimo.

Per poter procedere è necessario introdurre alcune ipotesi. Se tutti i titoli hanno $E[\tilde{r}_n] = r_f > 0$ ($n=1, \dots, N$) quale è il portafoglio ottimo $w^* \in \mathbb{R}^N$? Si può dire ben poco. Vediamo il caso più semplice di due soli titoli.

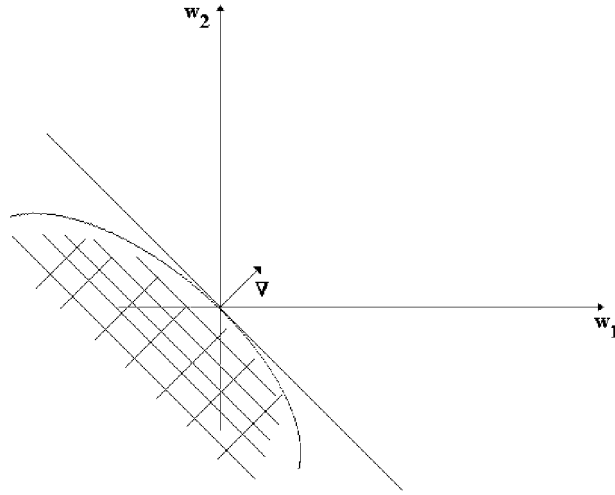


Figura 5: Portafoglio con due titoli (dettagli nel testo)

Nel caso di due soli titoli a rischio con w_i ($i = 1, 2$) indico la quantità acquistata del titolo i -esimo e considero il gradiente nel punto $(w_1, w_2) = (0, 0)$ (vedi la figura 5). Il gradiente ∇ è perpendicolare alle rette tangenti alle curve di livello che individuano i portafogli dispreferiti (vedi l'area a tratteggio della figura 5). Si ha:

$$u'(W_0)E[\tilde{r}_1 - r_f] > 0 \quad (28)$$

$$u'(W_0)E[\tilde{r}_2 - r_f] > 0 \quad (29)$$

dove $\tilde{r}_i$ è il rendimento del titolo rischioso i -esimo e r_f è il rendimento del titolo privo di rischio e si ha il > 0 perchè i termini che compaiono nei prodotti sono tutti > 0 . Si può dimostrare ([Bar03]) che la scelta ottima non è detto che sia in $\mathbb{R}_+^2$. Si può solo dire che w_1^* e w_2^* non sono tutti e due < 0 ovvero non posso vendere titoli allo scoperto ma non è detto che li compri tutti.

Si riprende la

$$E[u'(\tilde{W})(\tilde{r}_n - r_f)] = 0 \quad (n = 1, \dots, N) \quad (30)$$

nel caso generale di N titoli, $N > 2$. Si fa uso di una relazione di validità generale che lega fra di loro la covarianza di due v.a. e i valori attesi:

$$\text{cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = E[\tilde{X}\tilde{Y}] - E[\tilde{X}]E[\tilde{Y}] \quad (31)$$

con

$$\tilde{X} = u'(\tilde{W}) \quad (32)$$

$$\tilde{Y} = \tilde{r}_n - r_f \quad (33)$$

Se uso la (31) per la (30) con le (32) e (33) ottengo la seguente relazione:

$$\text{cov}(u'(\tilde{W}), \tilde{r}_n - r_f) + E[u'(\tilde{W})]E[\tilde{r}_n - r_f] = 0 \quad (34)$$

ma se ciò è vero in corrispondenza della scelta ottima di portafoglio W^* ho che:

$$E[\tilde{r}_n - r_f] = -\frac{\text{cov}(u'(\tilde{W}^*), \tilde{r}_n - r_f)}{E[u'(\tilde{W}^*)]} \quad (35)$$

La (35) non ci dice quale sia il portafoglio ottimo W^* ovvero non ci permette di conoscere le quantità w_i ma ci dice che il **premio per il rischio** ($E[\tilde{r}_n - r_f]$) e la ricchezza ottima sono tali che il premio per il rischio è positivo se la covarianza è negativa e viceversa, come si deduce considerando i segni delle grandezze coinvolte nella (35) tenuto conto che $u'() > 0$ e che il valore atteso di una grandezza strettamente > 0 non può che essere > 0 . Si ha quindi:

$$E[\tilde{r}_n - r_f] > 0 \Leftrightarrow \text{cov}(u'(\tilde{W}^*), \tilde{r}_n - r_f) < 0 \quad (36)$$

da cui si deduce che il portafoglio è tale che la covarianza fra la derivata dell'utilità della ricchezza e il rendimento del titolo n -esimo ha segno opposto rispetto al premio di rischio. Vediamo ora alcuni **casi particolari** di funzione utilità. Negli sviluppi algebrici sfrutteremo alcune proprietà della covarianza ovvero:

1. le costanti additive vengono cancellate,
2. le costanti moltiplicative sono portate fuori dall'operatore covarianza

per cui $\text{cov}(k + \beta\tilde{x}) = \beta\text{cov}(\tilde{x})$.

Se si ha la **funzione utilità quadratica** ovvero

$$u(x) = x - \frac{b}{2}x^2 \quad (37)$$

considerando la ricchezza del portafoglio finale $\tilde{W}^*$ si ha:

$$u(\tilde{W}^*) = \tilde{W}^* - \frac{b}{2}(\tilde{W}^*)^2 \quad (38)$$

e quindi

$$u'(\tilde{W}^*) = 1 - b\tilde{W}^* \quad (39)$$

per cui il membro destro della (35) può essere scritto come

$$-\frac{\text{cov}(1 - b\tilde{W}^*, \tilde{r}_n - r_f)}{E[1 - b\tilde{W}^*]} \quad (40)$$

Il portafoglio ottimo deve essere tale che la ricchezza finale ha covarianza positiva con un titolo sse

$$E[\tilde{r}_n - r_f] > 0 \text{ sse } \text{cov}(\tilde{W}, \tilde{r}_n) > 0 \quad (41)$$

per cui si ha

$$-\frac{\text{cov}(1 - b\tilde{W}^*, \tilde{r}_n - r_f)}{E[1 - b\tilde{W}^*]} = \frac{b \text{cov}(\tilde{W}^*, \tilde{r}_n)}{E[1 - b\tilde{W}^*]} \quad (42)$$

e quindi si sceglie il portafoglio in modo da avere $\text{cov}(\tilde{W}^*, \tilde{r}_n) > 0$ sse $E[\tilde{r}_n - r_f] > 0$ cioè se il titolo contribuisce ad aumentare la covarianza e, quindi, la ricchezza.

Se si ha

$$\text{var}(a\tilde{x} + b\tilde{y}) = a^2\sigma_{\tilde{x}}^2 + b^2\sigma_{\tilde{y}}^2 + 2ab \text{cov}(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (43)$$

ci si colloca in una situazione in cui i titoli sono covarianti positivi per il portafoglio ottimo e per tali titoli si chiede un premio per il rischio positivo. Se il titolo è correlato con covarianza positiva con la ricchezza (ovvero varia in modo simile alla ricchezza) lo si accetta se il premio per il rischio corrispondente ha media positiva ovvero se $E[\tilde{r}_n - r_f] > 0$. Se, invece, il titolo è correlato con covarianza negativa con la ricchezza (ovvero varia in modo opposto alla ricchezza) lo si accetta anche se il premio per il rischio corrispondente ha media negativa e ciò perchè il titolo contribuisce ad accrescere la ricchezza nei periodi in cui questa calerebbe.

Nota 1.7 Data una funzione utilità $u()$ si vuole vedere come varia la derivata prima $u'()$ rispetto alla ricchezza. Se $u''() < 0$ allora la $u'()$ è decrescente.

Nota 1.8 Si hanno tre stati:

1. uno in cui non si dice nulla

$$E[\tilde{r}_n - r_f] \geq 0 \Leftrightarrow \text{cov}(u'(\tilde{W}^*), \tilde{r}_n - r_f) < 0 \quad (44)$$

2. uno in cui si dice qualcosa ma il portafoglio non è noto,

3. *uno stato in cui la funzione utilità dei soggetti è quadratica.*

Considero il caso di N titoli nessuno dei quali è privo di rischio sotto l'ipotesi che i rendimenti sono identicamente e indipendentemente distribuiti ovvero le quantità

$$\tilde{r}_n \quad n = 1, \dots, N \quad (45)$$

sono come lanci di dadi indipendenti. Si vuole la varianza di

$$w_1 \tilde{r}_1 + w_2 \tilde{r}_2 + \dots + w_N \tilde{r}_N \quad (46)$$

sotto l'ipotesi che, se w_i sono le quantità dei beni i per $i = 1, \dots, N$, sia

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (47)$$

Si impone che la covarianza sia nulla e si ha

$$\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma^2(\tilde{r}_i) \quad (48)$$

La scelta ottima che massimizza la (48) è (nel caso di rendimenti uguali ovvero se $\tilde{r}_i \quad i = 1, \dots, N$)

$$w_i = \frac{1}{N} \quad (49)$$

per cui si ha

$$\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma^2(\tilde{r}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \sigma^2(\tilde{r}) = \frac{1}{N^2} \sigma^2(\tilde{r}) \sum_{i=1}^N 1 = \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{N} \quad (50)$$

1.4 Principio di diversificazione

Si considera la varianza di un portafoglio composto di due soli titoli ovvero si ha una diversificazione su due titoli. Si ha:

$$w_1^2 \sigma^2(\tilde{r}_1) + w_2^2 \sigma^2(\tilde{r}_2) + 2w_1 w_2 \text{cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \quad (51)$$

in cui compaiono i contributi dei singoli titoli e il contributo della loro composizione.

Nota 1.9 Si noti che se $w_1 < 1$ allora $w_1^2 < 1$ e in più $w_1^2 < w_1$

Il *principio di diversificazione* vale per ogni soggetto AvR caratterizzato da una funzione utilità $u()$ tale che $u'() > 0$ e $u''() < 0$ e che in presenza di più titoli investe in tutti i titoli allo stesso modo.

Nel caso di due titoli

1. uno rischioso con rendimento $\tilde{r}$,
2. uno privo di rischio con rendimento r_f

si hanno due “pezzi” ovvero l’investimento nel titolo a rischio e l’investimento nel titolo privo di rischio ovvero

$$\tilde{w} = w\tilde{r} + (W_0 - w)r_f \quad (52)$$

in cui W_0 è la ricchezza iniziale.

Si vuole

$$\max_{w \in \mathbb{R}} E[u(\tilde{w})] \quad (53)$$

con le seguenti condizioni al primo ordine, ottenute derivando la $E[u(\tilde{w})]$ rispetto a w e considerando la (52):

$$E[u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_f)] = 0 \quad (54)$$

Si può stabilire che $E[\tilde{r} - r_f] > 0$ sse $w^* > 0$ dove w^* è la ricchezza del portafoglio ottimo. La dimostrazione di tale fatto avviene per assurdo (vedi anche la figura 6) ovvero si nega la tesi e si arriva ad una contraddizione. Si impone pertanto che sia $E[\tilde{r} - r_f] > 0$ ma $w^* < 0$.

Si ha quindi

$$\tilde{w} = w\tilde{r} + (W_0 - w)r_f \quad (55)$$

e

$$\tilde{w}|_{w=0} = W_0 r_f \quad (56)$$

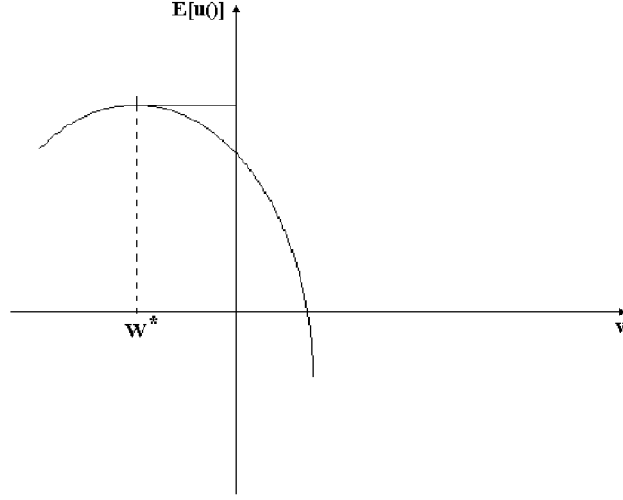


Figura 6: $E[\tilde{r} - r_f] > 0$ sse $w^* > 0$ (dettagli nel testo)

La funzione utilità attesa è strettamente concava (vedi anche la figura 6) per cui la retta tangente è sopra la curva e ciò accade anche in w^* . Si ha:

$$u(w_0 r_f) + w u'(w_0 r_f) E[\tilde{r} - r_f] > E[u(\tilde{w}^*)] \geq u(w_0 r_f) \quad (57)$$

dove l'ultima disequaglianza discende dal fatto che w^* è la scelta ottima. dalla (57) si ha, con semplici semplificazioni:

$$w^* u'(w_0 r_f) E[\tilde{r} - r_f] > 0 \quad (58)$$

ma ciò non può essere perchè, per ipotesi, $w^* < 0$ mentre si ha $u'(w_0 r_f) > 0$ e $E[\tilde{r} - r_f] > 0$. Si ha una contraddizione per cui vale la proprietà negata e cioè che in presenza di due titoli di cui uno rischioso e uno privo di rischio si ha la $E[\tilde{r} - r_f] > 0$ sse $w^* > 0$.

Se considero una funzione utilità quadratica

$$u(x) = x - \frac{b}{2} x^2 \quad (59)$$

con $b > 0$ e in cui $x = \tilde{w}^*$ è il portafoglio ottimo. Se si considera

$$E[u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_f)] = 0 \quad (60)$$

con $\tilde{w}^*$ pari al valore della (52) all'ottimo e se come funzione utilità si considera la (59) si ottiene (sostituendo anche la 52) la seguente equazione:

$$E[(1 - b w \tilde{r} - b(w_0 - w) r_f)(\tilde{r} - r_f)] = 0 \quad (61)$$

ovvero

$$E[(1 - br_fw_0)(\tilde{r} - r_f)] + E[(-bw\tilde{r} + br_fw)(\tilde{r} - r_f)] = 0 \quad (62)$$

e infine

$$(1 - br_fw_0)E[(\tilde{r} - r_f)] + E[-bw(\tilde{r} - r_f)(\tilde{r} - r_f)] = 0 \quad (63)$$

in cui il primo termine non dipende da w mentre il secondo è funzione di w e, inoltre, il termine $(1 - br_fw_0)$ è > 0 dato che ci si trova a sinistra di $1/b$ (vedi la figura 4) mentre, come al solito, il termine $E[(\tilde{r} - r_f)]$ individua il premio per il rischio.

Se si considera solo il termine funzione di w ovvero

$$-bE[w(\tilde{r} - r_f)^2] \quad (64)$$

utilizzando la seguente relazione di validità generale

$$\sigma^2(\tilde{x}) = E[\tilde{x}^2] - E[\tilde{x}]^2 \quad (65)$$

con $\tilde{x} = \tilde{r} - r_f$ e sostituendo nella (64) si ha

$$-bw\sigma^2(\tilde{r} - r_f) + E[\tilde{r} - r_f]^2 \quad (66)$$

L'ultimo passo prevede la sostituzione di tutti i “pezzi” nella (63) e nell'esplicitare w in modo da avere:

$$w = \frac{(1 - br_fw_0)E[(\tilde{r} - r_f)]}{b(\sigma^2(\tilde{r} - r_f) + E[\tilde{r} - r_f]^2)} \quad (67)$$

Si vede facilmente come sia $\frac{(1 - br_fw_0)}{b(\sigma^2(\tilde{r} - r_f) + E[\tilde{r} - r_f]^2)} > 0$ dal momento che numeratore e denominatore sono positivi. Sulle relazioni così ricavate si possono fare alcune considerazioni:

1. l'agente compra se il titolo ha un premio per il rischio > 0 in quanto il segno di w coincide con il segno del premio per il rischio $E[(\tilde{r} - r_f)]$,
2. tanto maggiore è b (misura di avversione al rischio, tale condizione di “tanto maggiore” la si indica con $b \uparrow$) tanto minore è $|w|$ (tale condizione di “tanto minore” la si indica con $b \downarrow$ cioè il quanto l'agente compra o vende è decrescente con l'avversione al rischio,
3. se $\sigma^2 \uparrow$ allora $|w| \downarrow$.

Tutto quanto abbiamo visto è valido nel caso la funzione di utilità dell'agente sia di tipo quadratico. Se si hanno più di due titoli si può scrivere una relazione simile, sempre nel caso di funzione di utilità dell'agente sia di tipo quadratico.

Supponiamo di avere N titoli acquistati in quantità $w_1, \dots, w_N$ con rendimenti $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N$. Si vogliono:

1. il valore atteso e
2. la varianza.

Determino

$$E[w_1\tilde{r}_1 + \dots + w_N\tilde{r}_N] = \sum_{i=1}^N E[w_i\tilde{r}_i] \quad (68)$$

Per la varianza ho

$$var(w_1\tilde{r}_1 + \dots + w_N\tilde{r}_N) = w_1\sigma_1^2 + \dots + w_N\sigma_N^2 + 2w_1w_2cov(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) + 2w_1w_3cov(\tilde{r}_1, \tilde{r}_3) + \dots \quad (69)$$

Tale relazione la posso scrivere in modo più sintetico usando la matrice varianza-covarianza avente ordine $N \times N$ e struttura:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \quad (70)$$

dove le σ_{ij} sono le covarianze fra le v.a. i e j . la matrice V è simmetrica ed è tale che

$$var(w) = w^T V w \quad (71)$$

Agendo in tal modo si ha che il portafoglio ottimo nel caso della funzione utilità quadratica è $w^* \in \mathbb{R}^N$ e inoltre ponendo:

$$\mathbb{E}[\tilde{r}] = \begin{pmatrix} E[\tilde{r}_1] \\ \vdots \\ E[\tilde{r}_N] \end{pmatrix} \quad (72)$$

e

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (73)$$

si ottiene

$$w^* = \frac{1 - bw_0 E[\tilde{r}^*]}{b} V^{-1} (\mathbb{E}[\tilde{r}] - r_f \mathbf{1}) \quad (74)$$

dove V^{-1} è l'inversa della matrice varianza-covarianza, $\mathbb{E}[\tilde{r}] - r_f \mathbf{1}$ sono i premi per il rischio e $\tilde{r}^*$ sono i rendimenti per il portafoglio ottimo definiti come $\tilde{r}^* = \frac{\tilde{w}^*}{w_0}$

Nota 1.10 *Si ha:*

1. *la media è crescente,*
2. *la varianza non è una misura esaustiva del rischio e cioè non è vero che se $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ sono due v.v. con $E[\tilde{X}] \geq E[\tilde{Y}]$ e $\sigma_{\tilde{X}}^2 \leq \sigma_{\tilde{Y}}^2$ allora ho $E[u(\tilde{X})] \geq E[u(\tilde{Y})]$ e non vale neanche il viceversa.*

La condizione è verificata nel caso di una funzione utilità $u()$ con derivata prima positiva ($u'() > 0$) e derivata seconda negativa ($u''() < 0$) ovvero nel caso di un soggetto AvR e vale nei due casi seguenti:

1. *v.a. normali multivariate,*
2. *quando la funzione di utilità è quadratica ovvero è del tipo*

$$u(x) = x - \frac{b}{2}x^2 \quad (75)$$

(con $b > 0$), in questo caso se si calcola $E[u(x)]$ si ha

$$E[\tilde{X}] - \frac{b}{2}E[\tilde{X}^2] = E[\tilde{X}] - \frac{b}{2}(\sigma^2(\tilde{X}) + E[\tilde{X}]^2) \quad (76)$$

e la $E[u(x)]$ decresce con la varianza e cresce con il valore atteso se sono a sinistra del punto di massima che ha ascissa $1/b$ (vedi la figura 4).

2 Seconda Lezione

Si prende in considerazione il funzionamento del mercato nel caso i cui gli agenti sono **esposti al rischio**. Si è supposto che, sotto certe condizioni, un agente descrive le proprie preferenze tramite l'utilità attesa. Se $\tilde{X}$ è il consumo di un bene ad esso è associata una utilità attesa $E[u(\tilde{X})]$. Nel caso discreto si ha:

$$\sum_{s=1}^S \pi_s u(x_s) \quad (77)$$

e si richiede che la funzione utilità abbia derivata prima positiva ($u'() > 0$, ovvero $u()$ è crescente) e derivata seconda negativa ($u''() < 0$, ovvero $u()$ è strettamente concava) in modo da definire un agente *AvR*. Si ha il seguente problema: in che modo un agente decide di scambiare la sua dotazione iniziale con altro? la situazione, data una dotazione iniziale, è tale che un soggetto *AvR* preferisce la certezza all'incertezza.

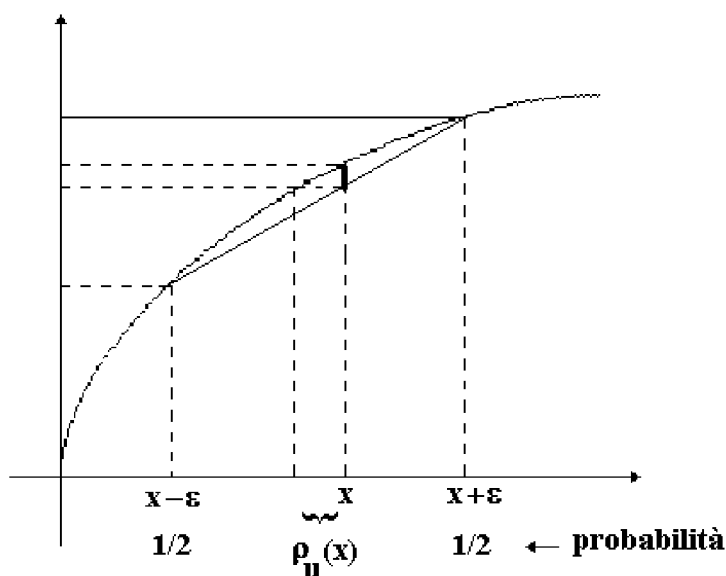


Figura 7: Esempio di lotteria (dettagli nel testo)

Si può avere una lotteria del tipo di figura 7 con $u(x) > E[u(\tilde{x})]$. Il soggetto può scambiare perché non ha una dotazione che lo soddisfa come profilo di rischio.

Si hanno due casi:

1. gestione rischio, in questo caso lo scambio fra due agenti avviene perchè così diminuisce la rischiosità
2. motivi speculativi o speculazione, qualche soggetto ne sa più di altri ovvero ha informazioni privilegiate anche se non è detto che chi ha più informazioni sia sempre avvantaggiato.

Vedremo solo il caso della gestione rischio.

Esempio 2.1 *Un esempio è quello di due contadini, ciascuno con un campo e un raccolto, che vanno al mercato e scambiano le merci fra di loro.*

2.1 Economia a due istanti

Si prende in esame una **economia semplice** con due istanti di tempo:

1. $t = 0$ ovvero oggi, il presente e
2. $t = 1$ ovvero domani, il futuro

Si fanno alcune ipotesi semplificative e si suppone di essere in due ambienti mutuamente esclusivi:

1. si ha consumo solo nel futuro, ovvero in $t = 1$, con
 - (a) tanti beni, $L > 1$,
 - (b) tanti stati del mondo, $S > 1$, specificazioni di eventi aleatori,
 - (c) molti agenti, $I > 1$;
2. si ha consumo sia nel presente ($t = 0$) sia nel futuro ($t = 1$) con
 - (a) un solo bene, $L = 1$,
 - (b) tanti stati del mondo, $S > 1$, specificazioni di eventi aleatori,
 - (c) molti agenti, $I > 1$.

Nel primo caso si consuma in $t = 1$ ma le scelte vengono fatte in $t = 0$. Facendo le scelte in $t = 0$ si distinguono i beni in $t = 1$ non solo per le specifiche comuni. L'agente i ha una dotazione di beni descritta da una matrice $e^i \in \mathbb{R}^{LS}$ dove L è il numero dei beni e S il numero degli stati del mondo. Si hanno quindi le seguenti grandezze matriciali:

1. dotazione iniziale $e^i \in \mathbb{R}^{LS}$,
2. paniere di consumo $X^i \in \mathbb{R}^{LS}$,

3. scelte $E[u(\tilde{x})]$ con

$$u : \mathbb{R}^L \longrightarrow \mathbb{R} \quad (78)$$

Se siamo in dimensione finita si ha:

$$E[u(x^i)] = \sum_{s=1}^S \pi_s u(x_s^i) \text{ con } x_s^i \in \mathbb{R}^L \quad (79)$$

Se ho un solo bene la funzione utilità è di tipo **separabile** ovvero è del tipo

$$u'(x_i) + \delta E[u(\tilde{x}_i)] \quad (80)$$

dove $\delta \in (0, 1)$ è il *fattore di sconto*. Lo scopo è massimizzare quello che si consuma in $t = 1$.

Se il numero di eventi è finito si ha che $X \in \mathbb{R}^S$. Si ipotizza di avere due tipi di mercato:

1. a pronti: all'istante $t = 1$ si ha uno scambio se i beni sono diversi e nessuno scambio se i beni sono uguali,
2. a termine: al tempo $t = 0$ si ha uno scambio di beni e di titoli che danno un rendimento al tempo $t = 1$.

Come funzionano i mercati? dipende da vari fattori quali:

1. numero dei mercati,
2. tipo dei mercati,
3. razionalità degli agenti.

Si deve entrare nella logica di ricercare criteri per valutare i risultati.

Nota 2.1 *Un mercato funziona bene se raggiunge una allocazione **Pareto ottima**.*

Definizione 2.1 *Una allocazione si dice **Pareto ottima** se è una allocazione che non può essere migliorata da tutti i soggetti.*

Si ha una *situazione iniziale* in cui N soggetti ($i = 1, \dots, N$) si dotano di beni $e^i \in \mathbb{R}^{LS}$. Come si può affermare che una situazione è **Pareto ottima**? Si hanno funzioni di utilità

$$u^L : \mathbb{R}^L \longrightarrow \mathbb{R} \quad (81)$$

e distribuzioni di probabilità credute da tutti i soggetti: $\pi - s$, $s = 1, \dots, S$ dove S individua il numero di stati del mondo. la distribuzione complessiva dell'economia è data dalla seguente sommatoria:

$$\sum_{i=1}^I e^i \quad (82)$$

e la distribuzione dei beni è tale da soddisfare un vincolo di bilancio:

$$\sum_{i=1}^I x_{ls}^i \leq \sum_{i=1}^I e_{ls}^i \quad (83)$$

in cui $l = 1, 2$ sono i beni, $s = 1, \dots, S$ sono gli stati del mondo e $x^i \in \mathbb{R}^{LS}$ per $i = 1, \dots, I$. Si ha che x_{ls}^i rappresenta la quantità del bene l nello stato del mondo s per il soggetto i . Si parla di dotazioni di beni al tempo $t = 0$ e_{ls}^i in funzione di s (stato del mondo al tempo $t = 0$) e di consumo x_{ls}^i . L'allocazione x^i ($i = 1, \dots, I$) è **ex ante** Pareto ottima sse:

1. è fattibile ovvero soddisfa la (83)
2. non è migliorabile per tutti i soggetti cioè non esiste un'altra allocazione fattibile $x^{i'}$ tale che

$$\sum_{i=1}^I \pi_s u(x^{i'}) \geq \sum_{i=1}^I \pi_s u(x^i) \quad (84)$$

con la disuguaglianza stretta per almeno un agente ovvero $x^{i'}$ non fa peggiorare nessuno e fa stare meglio almeno un soggetto.

Nota 2.2 Si parla di:

1. **ex ante**: ottimalità a $t = 0$,
2. **ex post**: ottimalità a $t = 1$.

Esempio 2.2 Vediamo un esempio semplice ovvero il caso di due soggetti a e b con funzioni di utilità u_a e u_b , un solo bene l e due stati del mondo $s = 1, 2$. Ad esempio si possono avere due contadini con un campo esposto a nord e un campo esposto a sud, un solo bene e 2 stati del mondo: vento da nord e vento da sud. Le dotazioni sono:

1. per a (e_1^a, e_2^a) ,
2. per b (e_1^b, e_2^b)

Per a si ha la dotazione del solo bene nei due stati del mondo 1 e 2 e lo stesso vale per b . La descrizione la si fa con uno strumento analitico noto come **scatola di Edgeworth**.

2.2 La scatola di Edgeworth

La scatola di Edgeworth (vedi la figura 8) consente di descrivere tutte le dotazioni fattibili nel caso di due soggetti a e b .

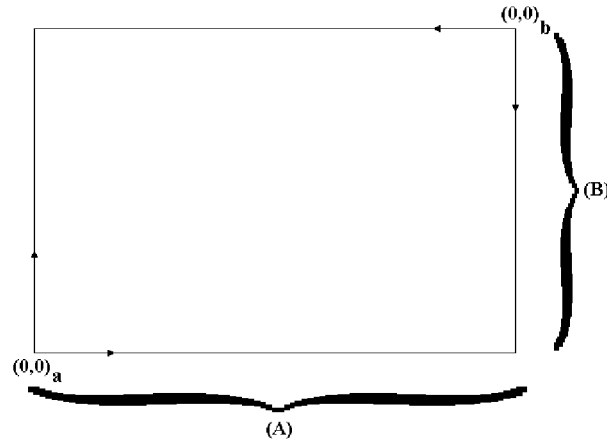


Figura 8: La scatola di Edgeworth 1 (dettagli nel testo)

Le sue ampiezze (A) e (B) sono definite come:

1. $(A) = e_1^a + e_1^b$, rappresenta le dotazioni nello stato 1,
2. $(B) = e_2^a + e_2^b$, rappresenta le dotazioni nello stato 2,

mentre le curve di indifferenza di a sono orientate nel verso degli assi uscenti dal punto $(0,0)_a$ e le curve di indifferenza di b sono orientate nel verso degli assi uscenti dal punto $(0,0)_b$.

La figura 9 illustra altre proprietà salienti della scatola di Edgeworth. Nella parte (α) della figura sono illustrate le curve di indifferenza di due soggetti AvR con la concavità verso l'alto se riferita agli orientamenti stabiliti per i singoli soggetti. Inoltre in tale parte (α) è dato un esempio di allocazione con un punto di coordinate (e_1^a, e_2^a) per il soggetto a e (e_1^b, e_2^b) per il soggetto b legate fra di loro dalle dotazioni totali nei due stati 1 e 2.

Nella parte (β) della figura 9 si illustra il concetto di allocazione non Pareto ottima con due curve di indifferenza, una per a e una per b con i rispettivi orientamenti, con la direzione di spostamento mostrata dalla freccia e lungo la quale entrambi i soggetti possono migliorare la propria situazione.

Le allocazioni Pareto ottime sono illustrate nella parte (γ) della figura 9 in cui si fanno vedere curve di indifferenza fra di loro tangenti. In quel caso non

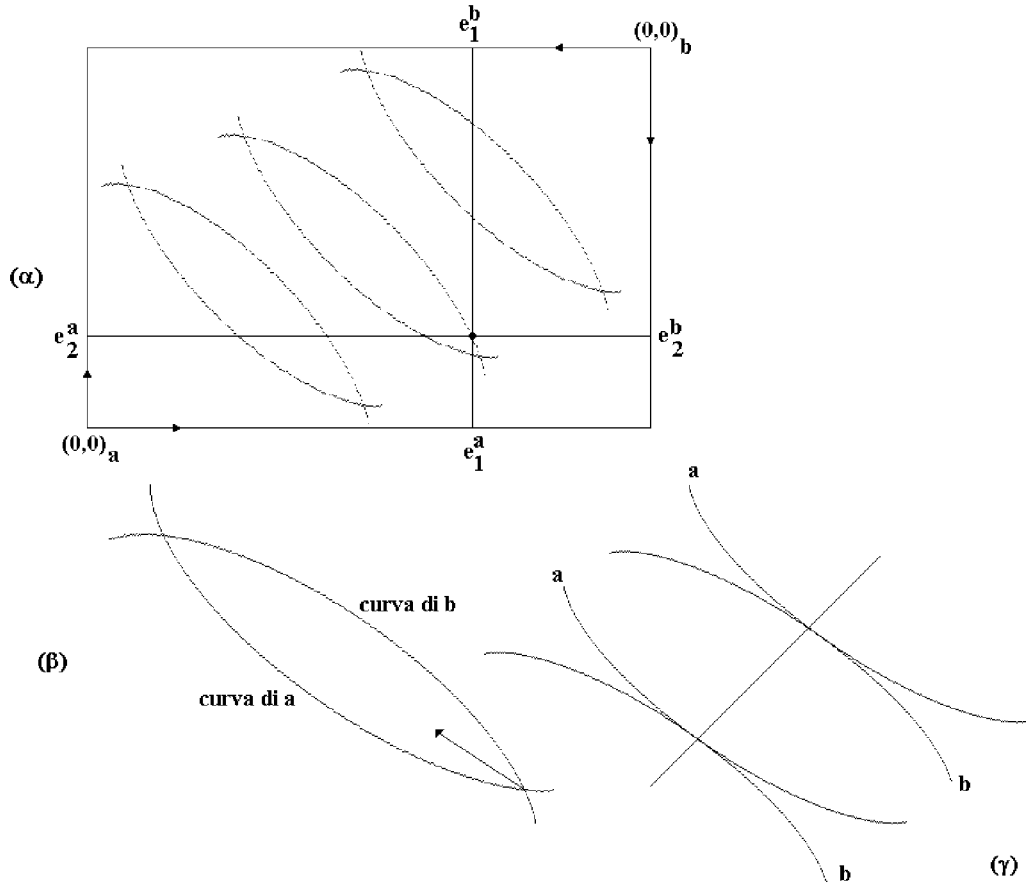


Figura 9: La scatola di Edgeworth 2 (dettagli nel testo)

sono possibili miglioramenti. I punti di tangenza sono sulla cosiddetta **curva dei contratti** o **curva delle allocazioni Pareto ottime**. La condizione di Pareto ottimalità prevede che le curve di indifferenza dei due agenti siano tangenti fra di loro ovvero che i saggi marginali di sostituzione siano uguali.

Definizione 2.2 (Saggio marginale di sostituzione) Come **saggio marginale di sostituzione** si definisce il rapporto fra le derivate dell'utilità attesa nei due stati del mondo.

Definizione 2.3 (Condizione di Pareto ottimalità) La condizione di Pareto ottimalità è che i due saggi marginali di sostituzione siano uguali ovvero che sia:

$$\frac{\pi_1 u^{a'}(x_1^a)}{\pi_2 u^{a'}(x_2^a)} = \frac{\pi_1 u^{b'}(x_1^b)}{\pi_2 u^{b'}(x_2^b)} \quad (85)$$

dove l'apice ' indica una derivata rispetto a x_1^a , x_2^a oppure x_1^b , x_2^b . Tale relazione (85) la ottengo dalle

$$\pi_1 u^a(x_1^a) + \pi_2 u^b(x_2^a) \quad (86)$$

$$\pi_1 u^a(x_1^a) + \pi_2 u^b(x_2^a) \quad (87)$$

derivando rispetto alle x , uguagliando a 0 e ricavando il rapporto (RIVEDERE).

Si hanno i seguenti problemi aperti:

1. come è fatta la **curva dei contratti**?
2. i mercati relizzano o no le allocazioni Pareto ottime?

Prima di rispondere a tali domande si esamina un esempio.

Esempio 2.3 Si hanno due agenti, il primo a con un campo esposto al vento del nord e il secondo b con un campo esposto al vento del sud, e due stati del mondo (1 e 2).

La **produzione aggregata** è costante in ciascuno dei due stati del mondo ovvero siamo in assenza di rischio aggregato ovvero si ha:

$$e_1^a + e_1^b = e_2^a + e_2^b \quad (88)$$

dove e_j^i rappresenta la dotazione del soggetto i nello stato j . In questo caso (vedi la figura 10) la scatola di Edgeworth è un quadrato, perchè ha i lati uguali, e le due bisettrici coincidono individuando quella che viene detta la **retta della certezza**. La **retta della certezza** è il luogo dei punti in cui la dotazione di ogni agente è la stessa nei due stati. Nel caso del soggetto a tale retta ha equazione:

$$x_1^a = x_2^a \quad (89)$$

mentre, nel caso del soggetto b ha equazione:

$$x_1^b = x_2^b \quad (90)$$

In tali casi il saggio marginale di sostituzione è dato dal rapporto delle probabilità dei due stati del mondo all'istante $t = 1$ ovvero è dato dalla

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} \quad (91)$$

In tale situazione se uno degli agenti si muove lungo la retta della certezza lo fa anche l'altro perchè le due ricchezze aggregate sono uguali per cui la

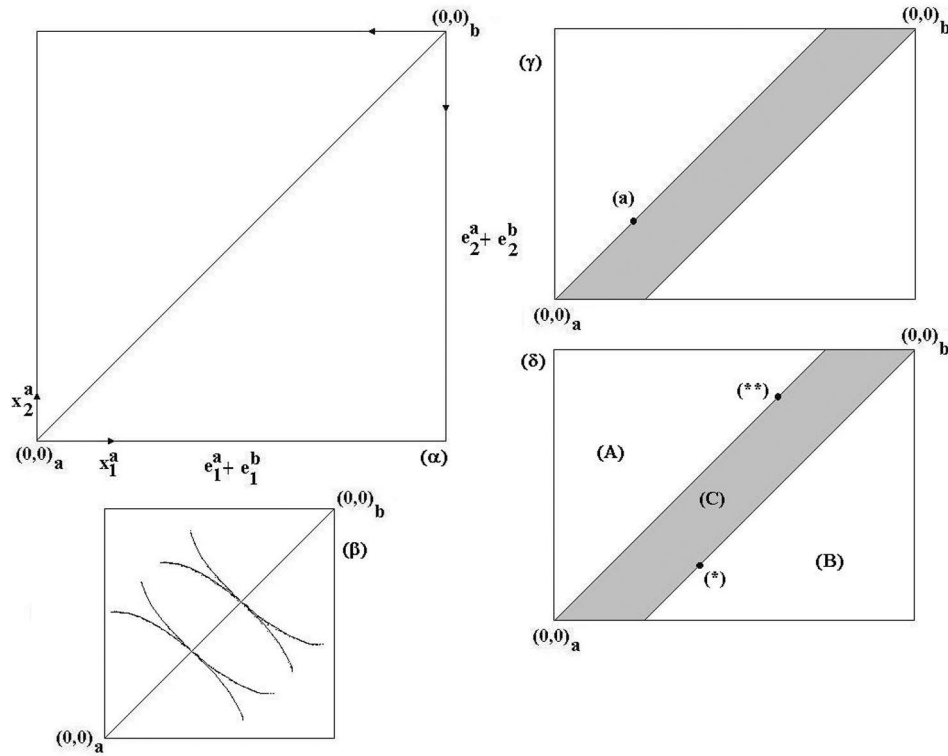


Figura 10: La scatola di Edgeworth 3 (dettagli nel testo)

(91) vale per entrambi i soggetti e coincide con la **retta dei contratti** (vedi la figura 10,(β): la retta dei contratti è il luogo dei punti in cui le famiglie delle curve di indifferenza sono fra loro tangenti. Se i due agenti possono scambiare quote dei loro campi è possibile che si arrivi ad una situazione di annullamento del rischio in quanto entrambi arrivano a detenere con certezza certe quantità del bene. L'ipotesi sottostante è che le distribuzioni di probabilità sono uguali e ciò implica che si è in assenza di speculazione.

In generale, come illustra la figura 10,(γ) e (δ), la scatola di Edgeworth è un rettangolo per cui le bisettrici non coincidono. In tali casi si ha che è presente un **rischio sistemico** perchè si ha:

$$e_1^a + e_1^b > e_2^a + e_2^b \quad (92)$$

In questo caso si hanno due rette della certezza che individuano un'area della scatola al cui interno si trova la retta dei contratti. Se i due agenti sono in (a) vale la (91) solo per l'agente a ma non per b.

Nella figura 10,(δ) si hanno due punti indicati con (*) e (**). Per il soggetto

b il saggio marginale di sostituzione in $(*)$ è pari a

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} \quad (93)$$

e lo stesso vale per *a* in $(**)$. Sempre dalla figura 10, (δ) , si ha che nella zona (A) per il soggetto *a* si ha:

$$\frac{\pi_1 u^{a'}(x_1^a)}{\pi_2 u^{a'}(x_2^a)} > \frac{\pi_1}{\pi_2} \quad (94)$$

ovvero si ha più del primo bene e meno del secondo ovvero l'utilità marginale del primo bene va su e quella del secondo va giù. Nella zona (B) per il soggetto *a* si ha:

$$\frac{\pi_1 u^{a'}(x_1^a)}{\pi_2 u^{a'}(x_2^a)} < \frac{\pi_1}{\pi_2} \quad (95)$$

Per il soggetto *b* in modo analogo si ha:

$$\frac{\pi_1 u^{b'}(x_1^b)}{\pi_2 u^{b'}(x_2^b)} > \frac{\pi_1}{\pi_2} \quad (96)$$

e

$$\frac{\pi_1 u^{b'}(x_1^b)}{\pi_2 u^{b'}(x_2^b)} < \frac{\pi_1}{\pi_2} \quad (97)$$

e l'unica area della figura in cui vale per entrambi la condizione di $< \frac{\pi_1}{\pi_2}$ è nella zona (C) in cui si trova la curva dei contratti.

Nota 2.3 (Soggetto neutro al rischio) Nel caso uno dei due soggetti, ad esempio *b*, sia neutro al rischio aggregato (vedi la figura 11) le sue curve di indifferenza risultano essere delle rette ovvero sono tali che

$$1. u' > 0$$

$$2. u'' = 0$$

Se scrivo la

$$u^b(x) = \pi_1 u^b(x_1) + \pi_2 u^b(x_2) = \pi_1(a + bx_1) + \pi_2(a + bx_2) \quad (98)$$

e derivo rispetto a x_1 e x_2 ottengo di nuovo la (93) mentre per il saggio marginale di sostituzione si ha

$$-\frac{\pi_2}{\pi_1} \quad (99)$$

Per il soggetto *a* si ha che i punti in cui le sue curve di indifferenza sono tangenti alle curve di indifferenza di *b* (che sono rette) sono sulla curva della certezza per *a*: in questa situazione il soggetto *b* neutro al rischio si prende il rischio di tutti e la curva dei contratti coincide con la curva della certezza di *a*. Nel caso di tre soggetti, uno neutro al rischio e due no, si ha un piano che descrive la situazione.

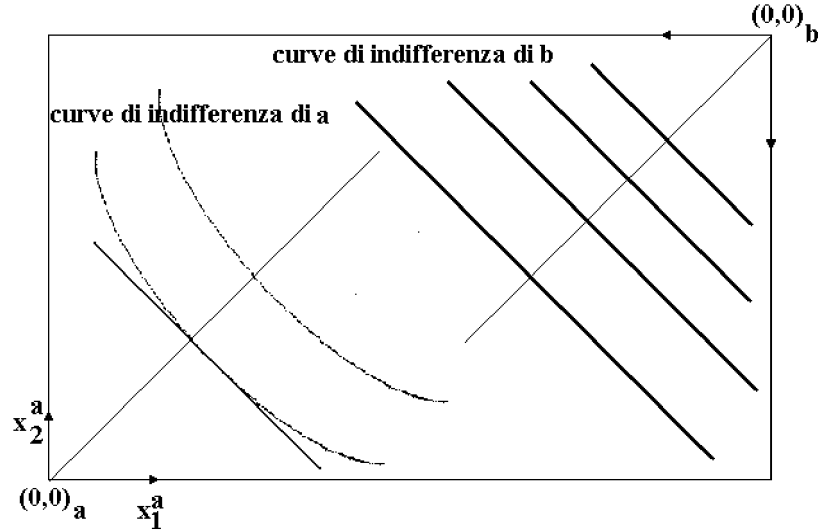


Figura 11: La scatola di Edgeworth: soggetto neutro al rischio (dettagli nel testo)

2.3 Equilibrio Arrow-Debreau

A questo punto ci si pongono le seguenti domande:

1. il mercato può raggiungere una allocazione Pareto ottima o non ci riesce?
2. quanti mercati si possono usare?

Si hanno tante dotazioni e^i quanti gli agenti ovvero $i = 1, \dots, I$ ed ogni dotazione tiene conto sia dei beni (che sono L) sia degli stati del mondo all'istante $t = 1$ (che sono S) per cui si ha che $e^i \in \mathbb{R}^{LS}$. Ognuno degli agenti i è caratterizzato da una funzione utilità

$$u^i: \mathbb{R}^L \longrightarrow \mathbb{R} \quad (100)$$

e da una utilità attesa

$$\sum_{s=1}^S \pi_s u^i(x_s^i) \quad (101)$$

Si hanno così tutti gli elementi base della economia che ci si propone di descrivere. Si ricorda che una ipotesi base è che ci siano due istanti ovvero:

1. il presente $t = 0$,
2. il futuro, $t = 1$.

Si fanno degli scambi in $t = 0$ e si vede cosa succede. L'ipotesi è che all'istante $t = 0$ si possa scambiare un bene contingente in ogni stato del mondo. Si hanno $L \times S$ mercati in cui L sono le merci che possono essere scambiate e S sono gli stati del mondo (i possibili futuri).

Se le cose stanno così si può risolvere il seguente problema di ottimizzazione

$$\max_{x^i \in \mathbb{R}^{LS}} \sum_{s=1}^S \pi_s u^i(x_{ls}^i) \quad (102)$$

sotto il seguente vincolo di bilancio:

$$\sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^L x_{ls}^i p_{ls} \leq \sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^L e_{ls}^i p_{ls} \quad (103)$$

in cui il secondo membro esprime la dotazione iniziale globale. L'idea è quella di considerare il prezzo oggi dei beni nei vari stati del mondo domani. Per risolvere il problema (102) si imposta il *Lagrangiano* e si impongono le condizioni del primo ordine ovvero si scrive la:

$$\sum_{s=1}^S \pi_s u^i(x_s^1) + \lambda \left(\sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^L e_{ls}^i p_{ls} - \sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^L x_{ls}^i p_{ls} \right) \quad (104)$$

e si calcolano le derivate rispetto alle x_{ls}^i che si pongono uguali a zero in modo da ricavare i saggi marginali di sostituzione uguali ai rapporti dei prezzi:

$$\frac{\pi_s u^{i'}(x_{ls}^i)}{\pi_r u^{i'}(x_{mr}^i)} = \frac{p_{ls}}{p_{mr}} \quad (105)$$

in cui compaiono il bene l nello stato s e il bene m nello stato r e le derivate della funzione utilità.

2.4 Condizioni di equilibrio

La condizione di **equilibri** è una condizione in cui la **domanda** uguaglia l'**offerta** ed ogni soggetto massimizza la propria funzione utilità per cui vale la seguente eguaglianza:

$$\sum_{i=1}^I x_{ls}^i = \sum_{i=1}^I e_{ls}^i \quad (106)$$

con $l = 1, \dots, L$ e $s = 1, \dots, S$.

Se vale la (106) ogni soggetto ha un saggio marginale di sostituzione pari al rapporto dei prezzi per cui si è in una situazione ex ante Pareto ottima: se si hanno tanti mercati quanti sono i beni si ha una Pareto ottimalità.

Nota 2.4 *In realtà non si ha un mercato per ogni bene per ogni stato del mondo e perciò esistono i mercati finanziari in cui si hanno dividendi nei vari stati del mondo ovvero un vettore di richieste per ogni stato del mondo.*

Si ha una situazione con molti beni (ovvero $L > 1$) in cui avviene uno scambio di titoli ed inoltre:

1. un numero finito di stati del mondo $s = 1, \dots, S$,
2. un numero finito di agenti $i = 1, \dots, I$,
3. un numero finito di titoli $n = 1, \dots, N$.

Ad ogni titolo n è associata una **matrice dei dividendi** $a^n \in \mathbb{R}^{LS}$ strutturata nel modo che segue:

$$a^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & a_{12}^n & \dots & a_{1S}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{L1}^n & a_{L2}^n & \dots & a_{LS}^n \end{pmatrix} \quad (107)$$

in cui la riga i -esima dà il rendimento del bene i -esimo nei diversi stati del mondo mentre la colonna j -esima dà il rendimento dei beni nel j -esimo stato del mondo.

La domanda è sempre la stessa: si realizza o no una allocazione Pareto ottima? La risposta dipende da come sono strutturati i titoli.

Si hanno n titoli che sono scambiati ai prezzi q_n su **mercati spot** con prezzi $p_s \in \mathbb{R}$, $s = 1, \dots, S$. In questo caso il **problema di massimo** presenta una difficoltà sostanziale in merito al vincolo di bilancio che dipende sia dai prezzi oggi sia dai prezzi domani. In assenza di risorse si ha:

$$q^T z \leq 0 \quad (108)$$

Il **vincolo di bilancio** al tempo $t = 1$ dipende dallo stato del mondo e dalle dotazioni iniziali dei singoli agenti $e^i \in \mathbb{R}^{LS}$. Al tempo $t = 1$ si ha sia e^i sia quello che è stato scambiato sul mercato a termine ovvero si ha:

$$\sum_{l=1}^L p_{ls} (e_{ls}^i + \sum_{N=1}^N) a_{ls}^n z^n \quad (109)$$

in cui $\sum_{N=1}^N a_{ls}^n z^n$ rappresenta ciò che si ottiene dallo scambio al tempo $t = 1$. Si scambiano quantità z^n del titolo n con dividendi $a_{ls}^n, \forall s \in [1, \dots, S]$. Sotto il vincolo:

$$\sum_{l=1}^L p_{ls} x_{ls}^i \leq \sum_{l=1}^L p_{ls} (e_{ls}^i + \sum_{N=1}^N a_{ls}^n z^n) \quad (110)$$

si vuole la soluzione di

$$\max_{z, \tilde{x}^i} E[u^i(\tilde{x}^i)] \quad (111)$$

con due vincoli di bilancio: uno per $t = 0$ e uno per $t = 1$. Nel problema di ottimo si suppone di conoscere i prezzi. In una economia basata su due

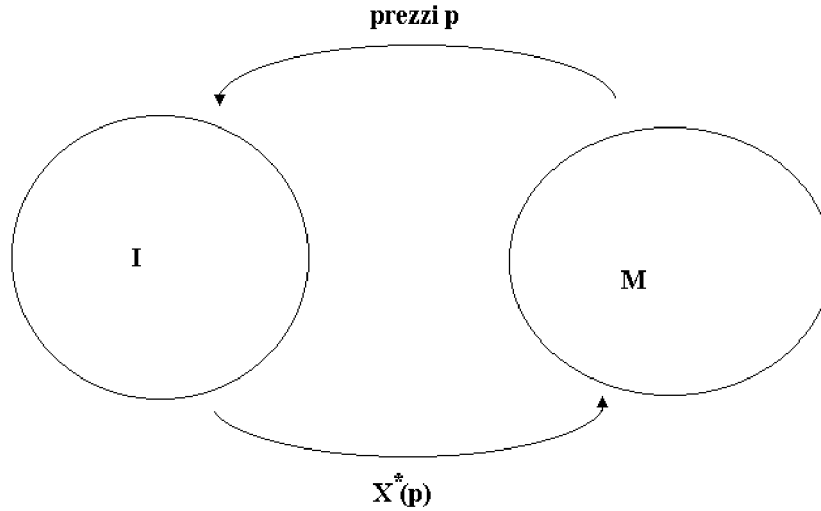


Figura 12: Mercato e individuo (dettagli nel testo)

istanti di tempo è come avere due mondi (vedi la figura 12 in cui I stà per individuo M per mercato e $X^*(p)$ è la domanda in eccesso).

Si ha che $\sum_i x^{*i} = 0$.

Si parla di analisi all'equilibrio in condizioni di **perfetta concorrenzialità**. Nel caso di perfetta concorrenzialità (in cui nessuno dei soggetti influenza i prezzi) sotto quali condizioni le scelte dei soggetti (in termini di dotazioni, richieste e utilità) sono compatibili fra di loro? Si ha una **interpretazione minimalista**. Un'altra domanda è la seguente: esiste un vettore dei prezzi che coordina le richieste dei soggetti? La risposta può essere sì, esiste ed è unico oppure no, non esiste. Si hanno due approcci basati su richieste molto

diverse in termini di conoscenza che i soggetti devono avere del modello. Si richiede che i soggetti siano *razionali* ovvero che conoscano i prezzi e le proprie funzioni utilità. Il vettore dei prezzi coordina tutti i risultati: lo scopo è massimizzare l'utilità dati i prezzi. Nel caso **positivo** o **normativo** si presuppone di conoscere tutto il mondo e di avere capacità di calcolo infinita. È necessario che tutti conoscano il vettore dei prezzi e, in più, devono conoscere la domanda aggregata per poter scrivere la $\sum_i x^{*i} = 0$.

Si fa l'ipotesi che i consumi siano conoscenza comune in tutti i loro aspetti ovvero che i soggetti conoscano tutto su tutto. Nel nostro caso si ha il vincolo di bilancio in cui si osservano i prezzi correnti q e si devono prevedere i prezzi futuri (ovvero si deve generare una aspettativa) e scrivere la (110) avendo formulato ipotesi su come i soggetti si formano le aspettative e quindi ipotesi sulla conoscenza del mondo da parte dei soggetti.

Si ha un legame fra osservazione e aspettativ. Ci richiede sotto quali condizioni le scelte dei soggetti sono compatibili fra di loro. L'ipotesi che si fa è che i soggetti agiscano in modo sostanzialmente razionale ovvero che abbiano aspettative razionali. I soggetti hanno due prerogative:

1. conoscono il modello nella sua completezza,
2. usano tutta l'informazione nel modo miglior epossibile.

La scelta cade sull'ipotesi di aspettative razionali che rappresenta il meglio che si possa avere. Sotto tale ipotesi si può costruire la funzione **eccesso di domanda** oggi e domani in ogni stato del mondo per risolvere il problema dell'ottimo domani, in ogni stato del mondo. Si ha una sequenza di problemi basati sull'oggi e sul domani. Considero la domanda di titoli oggi e so risolvere il problema perchè (vedi la (110)) le e_{ls}^i sono note come le $e_{ls}^n x^a$ per cui si trovano le p_{ls}^e e cioè i prezzi attesi. Si calcola l'equilibrio in due tempi:

1. si fissa z e si calcola p_{ls} ,
2. si usa p_{ls} per calcolare z

cioè si individua il comportamento ottimo oggi conoscendo i prezzi domani come conseguenza del mio comportamento di oggi e questo ci permette di togliere l'aspettativa dai prezzi calcolati in tutti gli stati del mondo. Si ha:

1. per ogni decisione in $t = 0$ conosco il comportamento dei soggetti e i prezzi in $t = 1$ ovvero al tempo $t = 0$ in funzione di z determino sia p sia x all'istante $t = 1$ ovvero all'equilibrio;
2. torno a $t = 0$ e massimizzo rispetto a z sapendo che in $t = 1$ e, quindi, all'equilibrio avrò p e x .

L'ipotesi delle aspettative razionali è l'unico strumento che abbiamo a disposizione che ci consenta di fare qualche affermazione. Si ha che ogni soggetto risolve un problema di massimo in una condizione in cui la domanda uguaglia l'offerta ovvero si ha il seguente problema di massimo:

$$\max_{z, x^i} E[u^i(\tilde{x})] \quad (112)$$

sotto i vincoli:

$$\sum_{i=1}^I z^i = 0 \quad (113)$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ls}^i = \sum_{i=1}^I e_{ls}^i \quad (114)$$

con $ss = 1, \dots, S$ (equilibrio di Radner e relativa equazione). Ci si chiede a questo di quanti mercati si abbia bisogno per la Pareto ottimalità. Per avere una risposta si semplifica e si considerano solamente titoli che pagano solo il primo bene ovvero considero vettori

$$a^n \in \mathbb{R}^S \quad (115)$$

ovvero del tipo

$$a^n = [a_1^n, \dots, a_S^n] \quad (116)$$

in cui il primo bene equivale ad un **bene numerario** o di riferimento. Si hanno due passi:

1. si ipotizza che i titoli siano $N = S$ ovvero ho tanti titoli quanti gli stati del mondo;
2. ogni titolo si suppone sia una Arrow security ovvero sia del tipo

$$[1, 0, 0, \dots, 0] \quad (117)$$

$$[0, 1, 0, \dots, 0] \quad (118)$$

$$[0, 0, \dots, 0, 1] \quad (119)$$

dove con 1 si indica l'appartenenza ad uno stato del mondo e con 0 la non appartenenza.

In questo modo si hanno S titoli e S stati del mondo e ciò ci permette di definire la matrice dei dividendi (di ordine $S \times S$) mettendo i vettori in colonna:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (120)$$

L'equilibrio di Radner che si ottiene è del tutto equivalente all'equilibrio di Arrow-Debreau che abbiamo visto in precedenza per cui anche in questo caso si ha una allocazione Pareto ottima.

Si ipotizza ora che i titoli che si scambiano non diano luogo ad una matrice identità ma ad una matrice rettangolare (ovvero sia anche $N \neq S$) in modo che la D sia del tipo:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{S1} & d_{S2} & \dots & d_{SN} \end{pmatrix} \quad (121)$$

D ha dimensione $S \times N$ e descrive per riga i titoli nei vari stati del mondo. Che interpretazione dare alla matrice D ? Si ricordi che ad ogni matrice è associata una applicazione lineare. Se con y si indica il vettore ricchezza nei vari stati del mondo (di dimensione $S \times 1$) e con z il vettore scelte di portafoglio (di dimensione $N \times 1$) si può scrivere la seguente equazione matriciale:

$$y = Dz \quad (122)$$

che rappresenta una applicazione lineare. Ci si chiede dove ci si sposti negli stati del mondo in base alle scelte fatte dai soggetti ovvero quale sia l'insieme dei valori che si possono raggiungere. Ciò richiede che il rango di D sia almeno pari a S . Se prendo y^C qualunque sono sicuro di trovare z^C tale che

$$y^C = Dz^C \quad (123)$$

Sono sicuro se $y^C \in I(D)$ ovvero se y^C appartiene all'immagine di D ovvero al sottoinsieme in cui vengono mappati da D i vettori z . Si ha:

1. $I(D) = \mathbb{R}^S \Leftrightarrow \text{Rank}(D) = S$,
2. $I(D) \subset \mathbb{R}^S \Leftrightarrow \text{Rank}(D) < S$

nel secondo caso si ha un sottospazio lineare di dimensione $\text{Rank}(D)$. Tali condizioni si traducono nelle seguenti condizioni sufficienti:

1. $\text{Rank}(D) = S$: si parla di mercati completi ovvero si può andare in $\mathbb{R}^S$. In tale condizione l'equilibrio di Radner mi dà una allocazione Pareto ottima;
2. $\text{Rank}(D) < S$: si parla di mercati incompleti ovvero si può andare in un sottospazio di $\mathbb{R}^S$. In tale condizione l'equilibrio di Radner mi dà una allocazione in generale **non** Pareto ottima.

Lo si dimostra in un contesto semplificato caratterizzato da:

1. un solo bene,
2. due istanti di tempo e
3. S stati del mondo.

Ogni soggetto i ha una dotazione di beni nei diversi stati del mondo ovvero

$$e_0^i, e_1^i, \dots, e_S^i \quad (124)$$

e si scambiano titoli che sono Arrow securities ovvero passo da q_s a 1_s . Il problema di ottimizzazione che si deve risolvere è il seguente

$$\max_{x_0, x_1, \dots, x_S} u^i(x_0) + \delta \sum_{s=1}^S \pi_s u^i(x_s) \quad (125)$$

in cui compaiono l'utilità attesa e il fattore di sconto δ . Si ha in più il seguente vincolo di bilancio:

$$x_0 + \sum_{s=1}^S q_s x_s = e_0^i + \sum_{s=1}^S q_s e_s^i \quad (126)$$

che equivale a dire che viene scambiato tutto. per risolvere la (126) si impongono le condizioni del primo ordine ovvero si deriva la Lagrangiana e si ottengono le seguenti relazioni:

$$u^{i'}(x_i) + \lambda = 0 \quad (127)$$

$$\delta \pi_s U^{i'}(x_s) + \lambda q_s = 0 \text{ per } i = 1, \dots, S \quad (128)$$

da cui discende che l'equilibrio di Radner è soddisfatto. Risolvendo le (127) e (128) per ricavare q_s si ha

$$q_s = \frac{\delta \pi_s u^{i'}(x_s)}{u^{i'}(x_i)} \quad (129)$$

e cioè in un equilibrio semplice tutto va bene e quindi si ha:

$$\frac{q_s}{p_r} = \frac{\delta \pi_s u^{i'}(x_s)}{\delta \pi_r u^{i'}(x_r)} \quad (130)$$

per $r, s = 1, \dots, S$. Se invece suppongo che i titoli non sono Arrow security allora ho che risulta definita la seguente matrice dei dividendi:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{S1} & d_{S2} & \dots & d_{SN} \end{pmatrix} \quad (131)$$

L'allocazione in generale non è Pareto ottima e il soggetto i ha le dotazioni

$$e_0^i, e_1^i, \dots, e_N^i \quad (132)$$

con al primo relativa al tempo $t = 0$ e le altre relative ai vari titoli. In queste condizioni si ha il seguente problema di ottimizzazione

$$\max_z u^i(x_i) + \delta \sum_{s=1}^S \pi_s u^i(x_s) \quad (133)$$

con

$$x_s = \sum_{n=1}^N d_{ns} z_n \quad (134)$$

Si deve risolvere un problema con il seguente vincolo di bilancio

$$x_0 + \sum_{n=1}^N z_n q_n \leq e_0^i + \sum_{n=1}^N e_n^i q_n \quad (135)$$

in cui si deve massimizzare sia rispetto a x sia rispetto a z . le condizioni del primo ordine risultano essere le seguenti

$$u^{i'}(x_0) + \lambda = 0 \quad (136)$$

Se si deriva rispetto a z_n e si tiene conto del fatto che si ha una funzione di funzione si ha

$$\delta \sum_{s=1}^S \pi_s u^{i'} d_{ns} + \lambda q_n = 0 \text{ per } n = 1, \dots, N \quad (137)$$

Se si mette tutto insieme si ha la seguente espressione per q_n che è molto diversa da quella ricavata in precedenza per cui non si può dire che l'allocazione di equilibrio è Pareto ottima:

$$q_n = \frac{\delta \sum_{s=1}^S \pi_s u^{i'}(x_s) d_{ns}}{u^{i'}(x_0)} \quad (138)$$

Nel caso in cui il rango della D sia pari a S posso scrivere le condizioni per tutti i titoli in forma matriciale e riscrivere le (138) come

$$D^T \begin{pmatrix} \frac{\delta \pi_1 u^{i'}(x_1)}{u^{i'}(x_0)} \\ \dots \\ \frac{\delta \pi_S u^{i'}(x_S)}{u^{i'}(x_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix} \quad (139)$$

Se il rango di D è S si ha che i soggetti hanno lo stesso **saggio marginale di sostituzione**. L'esistenza della soluzione è assicurata e se passo all'equilibrio posso avere più di una soluzione. Ne ho una sola se $\text{rank}(D) = S$ nel qual caso l'equilibrio è unico ed è Pareto ottimo. Se ho più di una soluzione non posso dire se i saggi marginali di sostituzione sono uguali o no e quindi non ho la Pareto ottimalità assicurata. Nella (129) i q_s sono associati alla condizione di equilibrio e se $\text{rank}(D) = S$ posso considerare i vettori riga che sono linearmente indipendenti in modo da individuare un minore non nullo di ordine $S \times S$ cui associare la matrice $\underline{D}$. Tale matrice è invertibile per cui esiste la $\underline{D}^{-1}$ e quindi si può scrivere che si ha

$$\underline{D}^{-1} \underline{D} \begin{pmatrix} \frac{\delta \pi_1 u^{i'}(x_i)}{u^{i'}(x_0)} \\ \dots \\ \frac{\delta \pi_S u^{i'}(x_i)}{u^{i'}(x_0)} \end{pmatrix} = \underline{D}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix} \quad (140)$$

ovvero i saggi marginali di sostituzione sono pari a

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_s \end{pmatrix} = \underline{D}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix} \quad (141)$$

Cosa sono gli m_i ? Sono i prezzi delle Arrow securities impliciti nei prezzi osservati. A questo punto si vuole calcolare z in modo che sia:

$$\underline{D}^T z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (142)$$

con 1 in s -esima posizione, per cui si ha:

$$z = \underline{D}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (143)$$

e infine

$$q^T z = q^T \underline{D}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (144)$$

dove $q^T z$ rappresenta il valore del portafoglio e $q^T \underline{D}^{-1}$ coincide con m^T in modo che sia

$$m^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = m_s \quad (145)$$

ovvero i prezzi degli stati.

Le formule di q_n e q_s sono le più generali per i modelli di **asset pricing**. Si ha:

$$q_n = E\left[\frac{\delta u'(\tilde{x})}{u'(x_0)} \tilde{d}_n\right] \quad (146)$$

e se pongo $\tilde{r}_n = \frac{\tilde{d}_n}{q_n}$ (rendimento del titolo) si ha:

$$E\left[\frac{\delta u'(\tilde{x})}{u'(x_0)} \tilde{r}_n\right] = 1 \quad (147)$$

Se scrivo i valori q_n in funzione dell'aspettazione $E[\cdot]$

$$q_n = E\left[\frac{u'(\tilde{x})\tilde{r}_n}{u'(x_0)}\right] \quad (148)$$

ottengo una relazione valida per ogni soggetto all'equilibrio. Il punto cruciale sono i **saggi marginali di sostituzione** che possono essere diversi fra loro dal momento che tutto dipende dal rango di D che può essere massimo o no. SE ho

$$Rank(D) = S \quad (149)$$

i **saggi marginali di sostituzione** sono gli stessi per tutti gli agenti mentre se

$$Rank(D) < S \quad (150)$$

i **saggi marginali di sostituzione** sono diversi fra di loro.

Nel caso della (149) ho che il vettore $y = Dw$ è tale che l'immagine di D

$(I(D))$ coincide con $\mathbb{R}^S$ ovvero $\forall$ piano di consumo $c \in \mathbb{R}^S \exists w^c$ tale che $c = Dw^c$.

Nel caso della (150) ho che il vettore $y = Dw$ è tale che l'immagine di D ($I(D)$) è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^S$ per cui se $c \in I(D)$ allora $\exists w^c$ tale che $c = Dw^c$.

Esempio 2.4 *Se ad esempio ho:*

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (151)$$

ho $\text{Rank}(D) = 1$ e quindi mi sposto sulle retta di equazione $y = 2x$ in $\mathbb{R}^2$ mentre se ho

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (152)$$

ho $\text{Rank}(D) = 2$ e mi sposto in tutti $\mathbb{R}^2$.

Nota 2.5 *Si hanno due casi:*

1. mercati completi ovvero $\text{Rank}(D) = S$,
2. mercati incompleti ovvero $\text{Rank}(D) < S$.

Nel primo caso tutti i **piani di consumo** e i **payoff** sono replicabili e i **saggi marginali di sostituzione** sono identici mentre nel secondo caso ciò non accade e i **saggi marginali di sostituzione** sono fra loro diversi. La (146) determina il prezzo in funzione di:

1. titoli e
2. rendimenti

e può essere riscritta come segue:

$$q_n = E\left[\frac{\delta u'(\tilde{d}_n)}{u'(c_0)} \tilde{d}_n\right] \quad (153)$$

Sotto l'ipotesi di **mercati completi** se si divide m. a m. per q_n portandolo dentro l'operazione di aspettazione (che è lineare) e ricordando che si ha $\tilde{r}_n = \frac{\tilde{d}_n}{q_n}$ si ottiene:

$$E\left[\frac{\delta u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)} \tilde{r}_n\right] = 1 \quad (154)$$

Se considero $\frac{\delta u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}$ come una v. a. $\tilde{X}$ e $\tilde{r}_n$ come un'altra v.a. $\tilde{Y}$ e sfrutto la seguente relazione di validità generale fra la covarianza e i valori attesi:

$$\text{cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = E[\tilde{X}\tilde{Y}] - E[\tilde{X}]E[\tilde{Y}] \quad (155)$$

la (154) può essere riscritta come segue:

$$\text{cov}\left(\frac{\delta u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}, \tilde{r}_n\right) + E\left[\frac{\delta u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}\right]E[\tilde{r}_n] = 1 \quad (156)$$

Nota 2.6 Se si ha un titolo privo di rischio, ovvero tale che

$$E\left[\frac{\delta u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}r_f\right] = 1 \quad (157)$$

sfruttando la linearità di E e il fatto che r_f è costante si ha:

$$E\left[\frac{\delta u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}\right] = \frac{1}{r_f} \quad (158)$$

Sostituendo la (158) nella (156), sfruttando la linearità di E e il fatto che r_f è costante, si ha:

$$E[\tilde{r}_n - r_f] = -r_f \text{cov}\left(\frac{\delta u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}, \tilde{r}_n\right) \quad (159)$$

ovvero il premio per il rischio del titolo n -esimo è proporzionale all'opposto della covarianza fra il saggio marginale di sostituzione e il rendimento del titolo stesso e il fattore di proporzionalità è il rendimento del titolo privo di rischio r_f . tale relazione vale per ogni tipo di mercato e, nel caso di mercati completi per i quali i saggi marginali di sostituzione sono gli stessi per tutti i soggetti, ci riconduce alla **teoria dell'agente rappresentativo**.

3 Terza Lezione

3.1 Il modello CAPM

Si hanno due formule, una per il prezzo p_n e una per il valore atteso di $\tilde{r}_n - r_f$, all'interno di un modello noto come *CCAPM* o **Consumption Capital Asset Pricing Model**. Se si fa uso della teoria dell'**agente rappresentativo** si ha uguaglianza fra il consumo all'istante $t = 1$ e la ricchezza sempre all'istante $t = 1$ in modo da scrivere:

$$\tilde{c}_1 = \tilde{w}_1 \quad (160)$$

Ci si trova nel caso della **one consumption economy** che rappresenta una eventualità sempre possibile nel caso di mercati completi, eventualità in cui si ha un agente solo che consuma tutta la dotazione.

Dati una ricchezza iniziale W_0 e un rendimento di mercato

$$\tilde{r}^m = \frac{\tilde{w}_1}{W_0} \quad (161)$$

nel caso di una economia chiusa con mercati completi è possibile definire il **portafoglio di mercato** in modo da determinare la ricchezza finale all'istante $t = 1$:

$$w_1^F = (W_0 - \sum_{n=1}^N w_n^m) r_f - \sum_{n=1}^N w_n^m \tilde{r}_n \quad (162)$$

in cui w^m è un vettore di N elementi. Il portafoglio di mercato è una ricchezza che viene allocata nei vari titoli. nel caso dei mercati completi si ha un portafoglio w^m che produce una ricchezza all'istante $t = 1$ pari a $\tilde{w} - 1$.

Dato un portafoglio si possono considerare le condizioni di ottimo rispetto ad esso per cui si deve avere:

$$E[\tilde{r}^m - r_f] = -r_f \text{cov}\left(\frac{\delta u'(\tilde{w})}{u'(c_0)}, \tilde{r}_n\right) \quad (163)$$

in cui $E[\tilde{r}^m - r_f]$ è il premio per il rischio e $\tilde{w}$ è un titolo che l'agente può acquistare o vendere.

Il soggetto può comprare o vendere il portafoglio di mercato e lo fa usando sia il premio per il rischio $E[\tilde{r}_n - r_f]$ sia i prezzi q_n in modo che sia valida la (163).

Per scendere in dettaglio si ipotizza che il soggetto sia caratterizzato da una funzione utilità di tipo quadratico (con $b > 0$):

$$u(x) = x - \frac{b}{2}x^2 \quad (164)$$

$$u'(x) = 1 - bx \quad (165)$$

$$u''(x) = -b \quad (166)$$

e sostituendo nella (163) si ottengono le seguenti equazioni:

$$E[\tilde{r}_n - r_f] = -r_f \text{cov}\left(\frac{\delta(1 - b\tilde{w}_1)}{1 - bc_0}, \tilde{r}_n\right) \quad (167)$$

$$E[\tilde{r}^m - r_f] = -r_f \text{cov}\left(\frac{\delta(1 - b\tilde{w}_1)}{1 - bc_0}, \tilde{r}^m\right) \quad (168)$$

dove $\tilde{r}^m$ è dato dalla (161). Se nell'operatore di covarianza elimino le costanti additive e porto a moltiplicare le costanti moltiplicative ho:

$$E[\tilde{r}^m - r_f] = r_f \frac{\delta b}{(1 - bc^0)W_0} \text{cov}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_1) \quad (169)$$

in cui $\text{cov}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_1)$ è la varianza di $\tilde{w}_1$. Risolvendo la (169) per r_f ho:

$$r_f = E[\tilde{r}^m - r_f] \frac{(1 - bc^0)W_0}{\delta b \text{var}(\tilde{w}_1)} \quad (170)$$

in cui $\tilde{r}^m$ è il portafoglio di mercato (ne esiste solo uno) dato dalla (161). Sostituendo la (170) nella espressione di $E[\tilde{r}_n - r_f]$ si ottiene, dopo semplici calcoli algebrici, la seguente equazione:

$$E[\tilde{r}_n - r_f] = \frac{W_0}{\text{var}(\tilde{w}_1)} \text{cov}(\tilde{w}_1, \tilde{r}_1) E[\tilde{r}^m - r_f] \quad (171)$$

da cui si può ricavare la seguente relazione fra il premio per il rischio di un titolo (a primo membro) e il premio per il rischio del portafoglio di mercato (a secondo membro):

$$E[\tilde{r}_n - r_f] = \frac{\text{cov}(\tilde{r}^m, \tilde{r}_n)}{\text{var}(\tilde{r}^m)} E[\tilde{r}^m - r_f] \quad (172)$$

La (172) rappresenta il modello CAPM o **Capital Asset Pricing Model** in cui $\beta = \frac{\text{cov}(\tilde{r}^m, \tilde{r}_n)}{\text{var}(\tilde{r}^m)}$ rappresenta il cosiddetto **coefficiente di regressione lineare**.

Nota 3.1 (Caratteristiche del modello) Il modello **Capital Asset Pricing Model** è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1. è un modello all'equilibrio,

2. vale solo se si possono fare ipotesi forti sulla funzione di utilità degli agenti ovvero se si può ipotizzare che $u()$ sia di tipo quadratico.

Se $u()$ è di tipo quadratico e il mercato è in equilibrio allora il premio per il rischio di un titolo si esprime con la seguente relazione:

$$E[\tilde{r}_n - r_f] = \beta_{nm} E[\tilde{r}^m - r_f] \quad (173)$$

dove per β_{nm} si ha:

$$\beta_{nm} = \frac{\text{cov}(\tilde{r}^m, \tilde{r}_n)}{\text{var}(\tilde{r}^m)} \quad (174)$$

Nota 3.2 Il modello **Capital Asset Pricing Model** è il modello di equilibrio di una economia chiusa in cui gli agenti sono caratterizzati da una funzione utilità di tipo quadratico ed è valido anche nel caso di mercati incompleti.

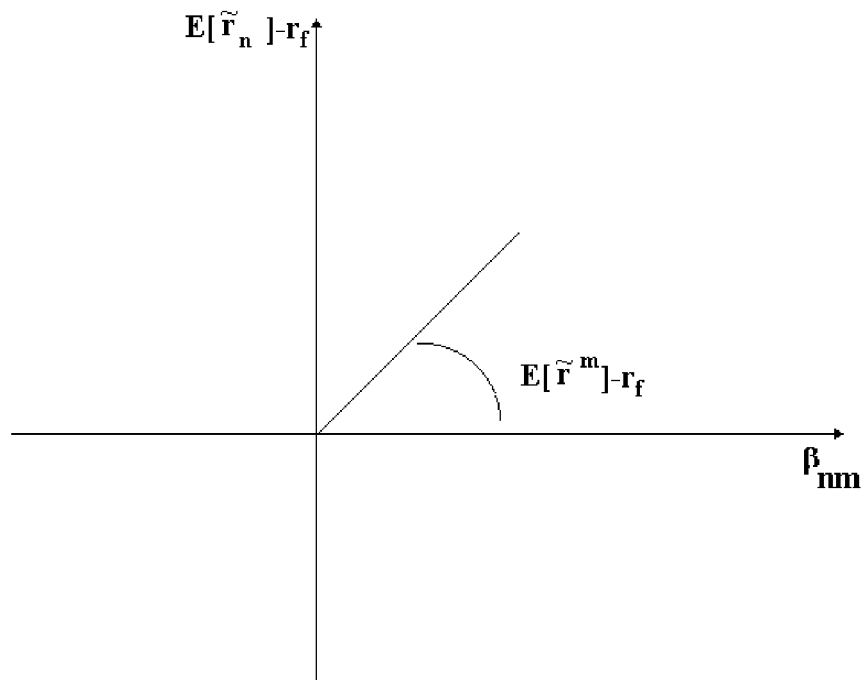


Figura 13: Modello CAPM (dettagli nel testo)

Il modello asserisce che se si prendono i rendimenti attesi e li stimo come osservati questi devono stare sulla semiretta di figura 13. Il modello è ad

un fattore di rischio e il premio per il rischio è legato al rapporto fra la covarianza e la varianza che permette di individuare il premio per il rischio nel portafoglio di mercato.

3.2 Arbitraggio

Sino ad ora si è esaminata una situazione in cui gli agenti, ognuno dei quali massimizza l'utilità attesa $E[u(\tilde{x})]$ vanno al mercato e scambiano merci in una situazione di equilibrio in cui si hanno informazioni sui prezzi q e sui rendimenti $\tilde{r}$.

A questo punto si devono introdurre restrizioni sul comportamento degli agenti. Si adotta una spiegazione di tipo induttivo in cui si ipotizza che nel mercato non ci possano essere arbitraggi².

Al proposito si parla di **assenza di opportunità di arbitraggio**. La situazione in cui ci si pone è quella di avere dei prezzi osservati $q \in \mathbb{R}^N$ e una matrice $D \in \mathbb{R}^{S \times N}$. Si hanno arbitraggi di due tipi:

1. arbitraggi del **primo tipo** in cui si guadagna oggi,
2. arbitraggi del **secondo tipo** in cui si guadagna domani.

Definizione 3.1 (Arbitraggio del primo tipo) *Dato un portafoglio w si parla di **arbitraggio del primo tipo** se il costo del portafoglio è non positivo (per cui o non si spende o non si guadagna) e in più si ha una condizione sul vettore Dw che deve contenere tutti numeri non negativi con almeno uno strettamente positivo. Formalmente ciò si traduce nelle seguenti relazioni:*

$$q^T w \leq 0 \quad (175)$$

$$Dw > 0 \quad (176)$$

ovvero al tempo $t = 0$ non si spende nulla e al tempo $t = 1$ c'è almeno uno stato del mondo in cui si guadagna.

Definizione 3.2 (Arbitraggio del secondo tipo) *Dato un portafoglio w si parla di **arbitraggio del primo tipo** se il costo del portafoglio è negativo (per cui oggi si guadagna e domani si può guadagnare o no) e in più si ha*

²Con il termine **arbitraggio** si intende una operazione commerciale o finanziaria effettuata per trarre profitto da una differenza di prezzo che esiste su due o più mercati acquistando un bene dove la quotazione è minore e rivendendolo simultaneamente dove la quotazione è maggiore.

una condizione sul vettore Dw che deve contenere tutti numeri non negativi. Formalmente ciò si traduce nelle seguenti relazioni:

$$q^T w < 0 \quad (177)$$

$$Dw \geq 0 \quad (178)$$

Che implicazioni hanno queste restrizioni che abbiamo posto sugli elementi q e D ? Come sono legati fra di loro q e D ? Siamo nel caso di mancanza di opportunità di arbitraggio. Se si scrive:

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} q^T \\ D \end{pmatrix} \quad (179)$$

un arbitraggio è un vettore portafoglio w tale che

$$\overline{D}w > 0 \quad (180)$$

Si procede per passi. Il primo passo prevede che si definisca il **funzionale del prezzo**

$$q : \mathbb{R}^S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (181)$$

in modo che, se c è separabile (cioè $\exists w^c$ tale che $c = w^c$), si ha:

$$q(c) = q^T w^c \quad (182)$$

si richiede che il funzionale del prezzo q goda delle seguenti proprietà:

1. sia lineare ovvero $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}^S$ si ha:

$$q(\alpha c_1 + \beta c_2) = \alpha q(c_1) + \beta q(c_2) \quad (183)$$

2. sia strettamente positiva ovvero $\forall c \geq 0$ si ha $q(c) \geq 0$ e $\forall c > 0$ si ha $q(c) > 0$.

Il funzionale del prezzo q è tale che $q(c) = q^T w$ sse la $q = D^T m$ ha soluzioni ovvero q è strettamente positivo sse $\exists m > 0$ soluzione di $q = D^T m$ per cui $m \in \mathbb{R}_{++}^S$. La dimostrazione di tale fatto la si fa considerando $q(c)$ con $c = (c_1, \dots, c_S)$ e $c_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, S$. Si ha

$$q\left(c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad (184)$$

che equivale alla seguente, per la linearità della q :

$$c_1 q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_S q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (185)$$

per cui $q(C)$ è strettamente positivo sse

$$q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} > 0 \quad (186)$$

e lo stesso vale per gli altri ovvero sse $m_1 > 0$ e così via. In generale si ha:

$$q(d_n) = q_n \quad (187)$$

ovvero il rendimento di un titolo è il suo prezzo per cui si ha $q(c) = d_1 m_1 + \dots + d_s m_s$.

Se ora si considerano i valori $m_i > 0$, $i = 1, \dots, S$ si ha il funzionale lineare del prezzo $q(c)$ definito come segue:

1. si determina $\sum_c c_i m_i$,
2. si determina $q(c)$ e si verifica che soddisfa le proprietà dei funzionali del prezzo.

Supponiamo di avere la:

$$q = D^T m \quad (188)$$

In **assenza di opportunità di arbitraggio** la (188) ha una soluzione strettamente positiva (esistenza) e si ha l'unicità se i **mercati sono completi** ovvero se:

$$\text{Rank}(D) = S \quad (189)$$

cioè se la matrice dei dividendi ha un rango pari al numero degli stati del mondo all'istante $t = 1$. Il vettore m ci dà una condizione per stabilire se

siamo in condizione di assenza di opportunità di arbitraggio in quanto si verifica tale eventualità sse

$$\exists m \gg 0 \text{ tale che } q = D^T m \quad (190)$$

La dimostrazione di tale equivalenza viene fatta in due passi. La dimostrazione del fatto che $m \gg 0 \Rightarrow$ assenza di arbitraggio la si fa per assurdo ovvero si suppone che esista un arbitraggio e quindi che esista un portafoglio w tale che $\overline{D}w > 0$ e che esista una soluzione della $q = D^T m$. Trasponendo e postmoltiplicando per w si ha:

$$q^t w = m^t D w \quad (191)$$

ovvero:

$$-q^t w + m^t D w = 0 \quad (192)$$

da cui:

$$(-q^T + m^T D)w = 0 \quad (193)$$

e infine:

$$[1, m^T] \begin{bmatrix} -q^T \\ D \end{bmatrix} w = 0 \quad (194)$$

Le grandezze a primo membro della (194) sono tutte strettamente positive per cui il loro prodotto matriciale non può mai essere nullo. Si ha quindi una contraddizione e perciò non può esserci arbitraggio.

Si passa ora a dimostrare che assenza di arbitraggio $\Rightarrow m \gg 0$. Per la dimostrazione si definiscono due insiemi disgiunti e si fa ricorso ai teoremi di separazione. Si definiscono, infatti, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{S+1}$, chiusi e convessi:

$$H = \mathbb{R}_+^{S+1} \text{ (ortante positivo)} \quad (195)$$

$$M = \overline{D}w \text{ con } w \in \mathbb{R}^N \quad (196)$$

Essendo $M < 0$ e $H > 0$ per costruzione i due sottoinsiemi sono disgiunti per cui esiste un iperpiano separatore e quindi

$$\exists u \in \mathbb{R}_{++}^{S+1} \text{ tale che } u^T z > 0 \geq u^T y \quad (197)$$

La (197) è valida $\forall z \in H \setminus \{0\}$ e $\forall y \in M$. In più y è del tipo $y = \overline{D}w$ e la seconda delle disequazioni della (197) deve valere in senso stretto ovvero deve essere $u^T y = 0$. A questo punto posso definire

$$m_i = \frac{u_i}{u_0} \quad i = 1, \dots, S \quad (198)$$

(in cui u_0 è la prima componente) per poi dimostrare che

1. gli m_i sono tutti > 0 ,
2. gli m_i sono una soluzione del sistema $u^T y = 0$.

Per costruzione gli m_i sono tutti strettamente positivi perchè se anche solo uno non lo fosse non avrei $u^T z > 0$. In merito alla seconda proprietà devo dimostrare che le m_i sono soluzioni del sistema $u^T y = 0$ con $y = \bar{D}w$ ovvero del sistema equivalente

$$u^T \bar{D}w = 0 \quad (199)$$

Esplicitando la (199) si ha:

$$(u_0, u_1, \dots, u_S) \begin{pmatrix} -q^T \\ D \end{pmatrix} w = 0 \quad (200)$$

e, svolgendo i calcoli ed esplicitando il primo titolo, si ha:

$$-q_1 u_0 + \sum_{s=1}^S d_{1s} u_s = 0 \quad (201)$$

e, dividendo m. a m. per u_0 si arriva alla:

$$q_1 = \frac{\sum_{s=1}^S d_{1s} u_s}{u_0} \quad (202)$$

che conclude la dimostrazione.

Nota 3.3 *Siamo arrivati così al seguente risultato: non esistono opportunità di arbitraggio sse esiste un vettore $m \gg 0$ tale che $q = D^T m$ ovvero i **prezzi liberi** sono sottoposti a delle restrizioni e non possono fluttuare a piacere.*

Nota 3.4 *In merito alle soluzioni si ha che:*

1. se $\text{Rank}(D) = S$ si ha una soluzione unica,
2. se $\text{Rank}(D) < S$ si hanno più soluzioni.

Si deve tenere conto del fatto che i prezzi determinati dai dividendi non possono generare arbitraggio. Per ognuno dei titoli si ha:

$$q_n = \sum_{s=1}^S d_{ns} m_s \text{ per } n = 1, \dots, N \quad (203)$$

$$m_0 = \sum_{s=1}^S m_s = \frac{1}{r_f} \quad (204)$$

se si è in presenza del titolo privo di rischio. In presenza del titolo privo di rischio si può scrivere:

$$\sum_{s=1} m_s = \frac{1}{r_f} \quad (205)$$

Se divido e moltiplico la (203) per m_0 e tengo presente la (204) arrivo ad avere:

$$q_n = \frac{1}{r_f} \sum_{s=1} \frac{m_s}{m_0} d_{ns} \text{ per } n = 1, \dots, N \quad (206)$$

Se nella (206) introduco una distribuzione di probabilità³:

$$\pi_s^* = \frac{m_s}{m_0} \quad (207)$$

ottengo la seguente espressione:

$$q_n = \frac{1}{r_f} E^*[\tilde{d}_n] \quad (208)$$

(caratterizzata da una probabilità e che si applica ad ogni piano di consumo) che differisce da quella vista all'equilibrio:

$$q_n = \frac{1}{r_f} E\left[\frac{\delta u'(\tilde{w}_1)}{u'(w_0)} \tilde{d}_n\right] \quad (209)$$

in cui compaiono il saggio marginale di sostituzione ($\frac{\delta u'(\tilde{w}_1)}{u'(w_0)}$) e il dividendo ($\tilde{d}_n$). si hanno pertanto due modi per descrivere i prezzi q_n in assenza di opportunità di arbitraggio. Secondo la (208) in assenza di opportunità di arbitraggio i prezzi nascondono delle probabilità π_s^* tali che il prezzo di un titolo coincide con il valore atteso del dividendo del titolo stesso.. In questo modo si definiscono i prezzi in funzione di una probabilità neutrale al rischio che può pagare un prezzo stabilito dalla (208). Cosa si può dire del saggio marginale di sostituzione nel caso di un soggetto NR ? In questo caso la funzione di utilità ha un andamento rettilineo ed è sufficiente che sia $\delta = \frac{1}{r_f}$ perchè le cose vadano a posto. Che interpretazione si può dare a m_s ? Per tali grandezze si ha:

$$m_s = \frac{\pi_s^*}{r_f} \quad (210)$$

che è il prezzo di 1 nello stato s e 0 in ogni altro stato: m_s è il prezzo dello stato ovvero un prezzo in cui ho 1 solo in uno stato del mondo. Dato un

³Le π_s^* sono una distribuzione di probabilità perchè assumono valori compresi fra 0 e 1 e la loro somma vale 1.

payoff $c \in \mathbb{R}^S$ si ha:

$$q(c) = \sum_{s=1}^S m_s e_s = \frac{1}{r_f} E^*[\tilde{c}] \quad (211)$$

A questo punto si deve dare una interpretazione a $q(c)$. È facile capire che $q(c)$ è un prezzo e il suo interesse risiede nel fatto che è ciò che un agente paga per avere il payoff c ovvero è il prezzo di c in assenza di opportunità di arbitraggio.

Nel caso di **mercati completi** si ha:

$$\forall c \in \mathbb{R}^S \quad q(c) = q^T w^c \quad (212)$$

Se si paga un prezzo A strettamente inferiore a $q(c)$ vuol dire che siamo in presenza di arbitraggio ovvero si paga A per avere c e ciò vuol dire che si vende w^c in modo da incassare $q^T w^c$ e pagare c . In questo modo si realizza un guadagno strettamente positivo pari a $q^T w^c - A$ e pertanto si è in presenza di un arbitraggio del primo tipo. Perchè non ci sia arbitraggio si deve pagare una somma pari a $A = q(c)$. Fino a questo punto si è posto che la soluzione sia unica ma può non esserlo nel qual caso si ha più di una soluzione e, pertanto, $q(c)$ non è univocamente determinato.

Nel caso di **mercati incompleti** si hanno piani di consumo che possono essere replicati perchè si trovano in $I(D)$ e altri che non sono replicabili perchè non stanno in $I(D)$. Nel caso di mercati incompleti se mi trovo in $I(D)$ ho più di una $q(c)$ tale che $q(c) = q^T w^c$ mentre se sono in $I(D)^C$ ho più valori ma non ho un portafoglio di mercato.

3.3 Modelli APT e CAPM

Si presenta ora il modello *APT* ovvero **Arbitrage Pricing Theory** come un superamento del modello *CAPM* con più di un fattore. Si introduce una regressione:

$$\tilde{r}_n(t) = \alpha + p\tilde{r}^m(t) + \tilde{c}(t) \quad (213)$$

Nota 3.5 Si ricorda che nel modello *CAPM* si ha:

$$E[\tilde{r}_n] - r_f = \beta_{nm} E[\tilde{r}^m(t) - r_f] \quad (214)$$

ovvero si ha un modello lineare con un fattore che mi descrive l'andamento del portafoglio di mercato in funzione del fattore di rischio.

Nel caso del modello *APT* i rendimenti dei titoli sono generati da un modello a più fattori:

$$\tilde{r}_n(t) = e_n + \sum_{k=1}^K b_{nk} \tilde{\delta}_k(t) + \varepsilon_{nk}(t) \quad (215)$$

in cui e_n è il valor medio e la sommatoria contiene i K fattori del modello e, in più, si ha:

$$E[\tilde{\delta}_k(t)] = 0 \quad (216)$$

$$E[\tilde{\varepsilon}_{nk}(t)] = 0 \quad (217)$$

I fattori che sono utilizzati nel modello sono ricavati da modelli statistici o da modelli macroeconomici. Per i nostri scopi si assume di avere $N \gg K$ fattori e un titolo privo di rischio che oggi ($t = 0$) vale 1 e domani ($t = 1$) paga r_f . Dato il premio per il rischio $E[\tilde{r}_n - r_f] = e_n - r_f$ si introducono delle restrizioni. Per prima cosa si introduce la matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1K} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NK} \end{pmatrix} \quad (218)$$

e poi si definisce la versione del modello *APT* che andremo a trattare come quella per la quale è $\tilde{\varepsilon} = 0$ per cui in forma vettoriale si ha:

$$\tilde{r}(t) = e + B\tilde{\delta}(t) \quad (219)$$

Se si ha un portafoglio w si ha, quindi:

$$w^T \tilde{r}(t) = w^T e + w^T B \tilde{\delta}(t) \quad (220)$$

La richiesta di opportunità di arbitraggio introduce due elementi:

1. i titoli in $t = 0$ hanno valore unitario,
2. se $w^T \mathbf{1} = 0$ ho $w^T B = 0$ ovvero oggi non spendo nulla e domani non incasso nulla per cui ho:
 - (a) $w^T e = 0$ in assenza di opportunità di arbitraggio oppure
 - (b) $w^T e = < 0 > 0$ in presenza di opportunità di arbitraggio,

dove $\mathbf{1}$ è il vettore con tutte le componenti pari a 1. da ciò discende che l'intersezione dei *kernel* di $\mathbf{1}$ e di B è in *kernel*(e) ovvero $\text{kernel}(\mathbf{1}) \cap \text{kernel}(B) \subset \text{kernel}(e)$. Dal momento che il kernel è un sottospazio lineare si ha che esistono $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^K$ tali che, in assenza di opportunità di arbitraggio, si ha:

$$e = \lambda_0 \mathbf{1} + B\lambda \quad (221)$$

In presenza di un titolo privo di rischio tutti i b_{nk} sono nulli per cui si ha $e - r_f \mathbf{1} = B\lambda$ ovvero:

$$e_n - r_f = \sum_{k=1}^K b_{nk} \lambda_k \quad (222)$$

dove $e_n - r_f$ rappresenta il prezzo di rischio per un titolo e vale anche la (214). Il termine λ_k individua il premio per il rischio del fattore k -esimo. Se si ha $r - e^* = \delta^k$ si ha che λ_k è il premio per il rischio del fattore del portafoglio (che può non esistere) che è esposto solo al fattore δ^k . Sotto l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio posso ripetere l'analisi sui rendimenti ovvero posso ricostruire i λ_k e quindi stimare i rendimenti attesi.

3.4 Arbitraggio asintotico

Il modello è molto più complesso se è $\tilde{\varepsilon}(t) \neq 0$, come accade di solito nella realtà. Nel caso di $\tilde{\varepsilon}(t) \neq 0$ si hanno soluzioni in forma approssimata (in forma vettoriale) ovvero:

$$\tilde{r}_n = e_n + \sum_{k=1}^K \tilde{\delta}_k(t) + \tilde{\varepsilon}(t) \quad (223)$$

In questo caso si ha un arbitraggio asintotico per $N \rightarrow \infty$ valido sotto le ipotesi che sia $E[\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\varepsilon}_j] = 0$ e $\sigma_n^2 \leq \bar{\sigma}$.

Nel caso dell'**arbitraggio asintotico** si ha che esiste un valore N tale che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[w^N \tilde{r}^N] = +\infty \text{ (momento primo)} \quad (224)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}(w^N \tilde{r}^N) = 0 \text{ (momento secondo)} \quad (225)$$

In questo caso non si ha una definizione precisa di arbitraggio. In questo caso si riesce a dimostrare che esistono $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^K$ tali che:

$$\sum_{n=1}^N (e_n - \lambda_0 - \sum_{k=1}^K \lambda_k b_{nk}) \leq A \quad (226)$$

La relazione è quasi lineare con errore quadratico medio non superiore ad A . In questo caso non si ha una stima dell'errore su un titolo ma su tutti. Se nella (226) si divide m. a m. per N e si passa al limite per $N \rightarrow \infty$ si ha:

$$\frac{\sum_{n=1}^N (e_n - \lambda_0 - \sum_{k=1}^K \lambda_k b_{nk})}{N} = 0 \quad (227)$$

4 Quarta Lezione

4.1 Modelli multiperiodali

Si considera una **economia** basata su un numero di istanti maggiore di 2 ma finito su cui si vuole definire una struttura simile a quella introdotta nel caso dei due istanti di tempo ovvero si introduce una tripla (Ω, Θ, μ) che definisce uno spazio probabilizzato che descrive l'incertezza degli agenti. Nella terna suddetta

1. Ω rappresenta gli eventi elementari,
2. Θ rappresenta la σ -algebra su Ω ,
3. μ rappresenta una distribuzione di probabilità.

In questo tipo di economia l'informazione cambia nel corso del tempo e si raffina con il passare del tempo perchè si verificano eventi che aiutano a predire quelli futuri. All'istante $t = 0$ gli agenti sono nella completa ignoranza e gli eventi possibili sono quelli in $(\Omega, \emptyset)$. Le informazioni in possesso degli agenti sono descritte utilizzando il seguente insieme:

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t = 0, \dots, T\} \quad (228)$$

in cui $\mathcal{F}_t$ è una σ -algebra di Ω sull'informazione in possesso dell'agente al tempo t . All'istante $t = 0$ si ha $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$, che sono i soli eventi possibili, mentre all'istante $t = T$ si ha la completa conoscenza del mondo per cui si ha:

$$\mathcal{F}_T = (\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_S\}) \quad (229)$$

dove gli ω_i sono gli eventi elementari. Si vede come passando da $t = 0$ a $t = T$ l'informazione si affina. In più per ogni istante t si ha una σ -algebra su Ω e tali σ -algebre sono legate fra di loro.

Si dice che se $s < t$ si ha $\mathcal{F}_t$ è più fine di $\mathcal{F}_s$ nel senso che:

1. si hanno informazioni più raffinate,
2. ogni elemento di $\mathcal{F}_t$ è un sottoinsieme di un elemento di $\mathcal{F}_s$ cioè $\forall a \in \mathcal{F}_t$ esiste $b \in \mathcal{F}_s$ tale che $a \leq b$.

Per la descrizione si usano i cosiddetti **alberi degli eventi** (vedi la figura 14) Gli eventi raggiungibili sono quelli cui arrivo lungo i rami dell'albero a partire da altri nodi dell'albero. L'albero si percorre in genere dalla radice (in $t = 0$) alle foglie (in $t = T$) e i nodi interni (come a_1 in figura 14) sono posizionati in istanti di tempo fra quello iniziale ($t = 0$) e quello finale ($t = T$). le scelte dei soggetti sono guidate dalla massimizzazione della loro utilità attesa.

Si ipotizza in più che le preferenze dei soggetti siano:

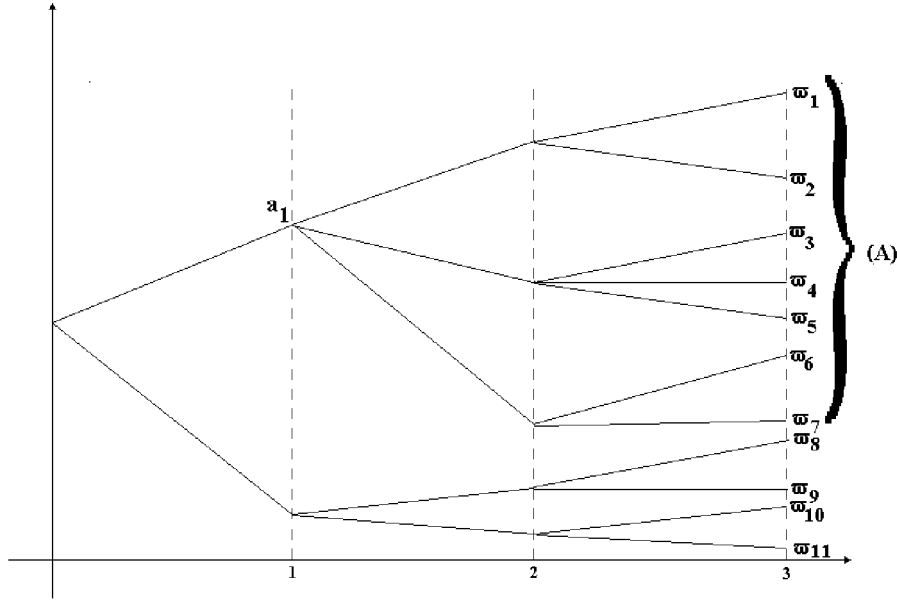


Figura 14: Albero degli eventi (dettagli nel testo)

1. additive nel tempo,
2. invarianti nel tempo.

Il soggetto delle scelte è un **processo stocastico** ovvero un insieme di v.a. rappresentato come segue:

$$C = \{C_0, C_1, \dots, C_T\} \quad (230)$$

in cui T rappresenta l'istante di fine della economia multiperiodale e C_t è una v.a. rispetto a $\mathcal{F}_t$. se ciò è vero si ha che C è un processo stocastico adattato rispetto a $\mathcal{F}_t$.

Si descrive il soggetto come

$$\max_C \sum_{t=0}^T \delta^t \sum_{a_t \in \mathcal{F}_t} \pi_{a_t} u(c(a_t)) \quad (231)$$

in cui δ è il fattore di sconto (in quanto si hanno valori scontati del valore atteso) e $u(c(a_t))$ rappresenta l'utilità del consumo nell'evento a_t . Oltre a tale processo stocastico se ne ha un'altro adattato e cioè il processo di **endowment** e^i oltre ad un vincolo di bilancio sulle risorse iniziali. Con il passare del tempo fra l'istante iniziale $t = 0$ e l'istante finale $t = T$ variano:

1. le informazioni,
2. la distribuzione di probabilità degli eventi $\pi_{a_s}(a_t) = \pi(a_s \mid a_t) = \frac{\pi_{a_s}}{\pi_{a_t}}$ con $a_s \leq a_t$ e $s > t$.

In $t = 1$ (vedi la figura 14) si ha $\frac{\pi_{\omega_5}}{\pi_{a_1}}$. Nel seguito prenderemo in esame:

1. l'efficienza allocativa dell'equilibrio economico,
2. i modelli di equilibrio,
3. una analisi della assenza di opportunità di arbitraggio

facendo in pratica riferimento soltanto al modello di equilibrio. Da ora in poi si cambia la notazione e ci si immerge nel mondo dei mercati finanziari in cui si ha un soggetto il cui obbiettivo è

$$\max_{C(t)} \sum_{t=0}^T \delta^t \sum_{a_t \in \mathcal{F}_t} \pi_{a_t} u(c(a_{ts})) \quad (232)$$

Si ha una utilità attesa e si considera un albero degli eventi, come quello illustrato in figura 14 o nella figura 15. Una applicazione possibile è la seguente: si scambiano N titoli ognuno dei quali, al tempo generico t , è descritto da:

1. un prezzo S ,
2. un dividendo D

con S e D processi stocastici adattati. Se considero $s \in S \subset \mathbb{R}^N$ e $d \in D \subset \mathbb{R}^N$ ho che $\forall t$ tali processi mi danno il prezzo e il dividendo di un titolo all'istante t : il prezzo è calcolato al netto del dividendo ovvero detratto il dividendo.

Si definisce la dotazione di titoli all'istante iniziale $\Theta^i(0) \in \mathbb{R}^N$. Al tempo $t = T$ il prezzo di un titolo è pari a 0 perchè l'economia finisce e il titolo ha dato il suo ultimo dividendo. Dal momento che lo scopo è quello di massimizzare l'utilità attesa si ha bisogno di un altro processo stocastico detto **strategia di adattamento**. All'istante generico t si ha $\Theta(t) \in \mathbb{R}^N$: tale grandezza rappresenta l'ammontare dei titoli che si ha fra $t - 1$ e t , ammontare scelto all'istante $t - 1$. V è un processo stocastico prevedibile dato che è una v.a. definita rispetto al passato ovvero rispetto a $\mathcal{F}_{t-1}$.

All'istante $t = 0$ non si fanno scelte e si ha:

$$\Theta^i(0) = \bar{\Theta}^i(0) \quad (233)$$

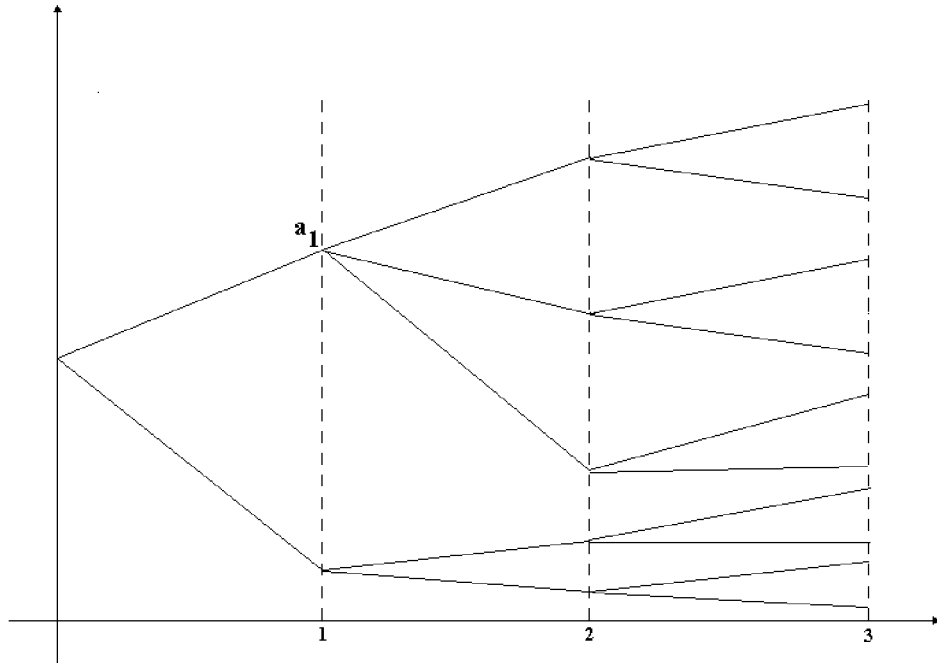


Figura 15: Albero degli eventi (dettagli nel testo)

ed inoltre (dove con l'apice T si indica il trasposto):

$$\Theta^{iT}(t)(S(t) - D(t)) - C(t) = \Theta^{iT}(t+1)S(t) \quad (234)$$

in cui, a primo mebro, si ha la differenza fra la ricchezza e il consumo. All'istante $t = T$ l'economia multiperiodale termina e l'agente consuma tutto quello che ha per cui si ha:

$$C(T) = \Theta^{iT(T)}C(T) \quad (235)$$

Lo scopo è massimizzare la C rispettando i vincoli di bilancio. Il problema è complesso e non lo si risolve in forma chiusa se non in tempo continuo. Si ha un problema di ottimizzazione dinamica e ciò significa che, per ogni t , so che devo scegliere fra oggi e una probabilità di accumulo di risorse piuttosto che consumare oggi e domani: ad ogni t ho un tradeoff fra consumo e accumulo per consumare in $t+1$ e oltre.

Si deve prefigurare il valore della ricchezza accumulata nel futuro e il guadagno che si ha oggi deve essere almeno pari a quello che si perde nel futuro e che si guadagnerebbe se si scegliesse diversamente. Si ha una soluzione ottima solo se si prendono certi accorgimenti come accade per la programmazione dinamica in cui si sa che non si ha la scelta ottima ma si sa che la

si può ottenere determinandola al tempo $t = 0$ in modo che rimanga ottima per ogni $t > 0$ e su ogni evento dell'albero in modo che non ci sia nessun evento che ci faccia cambiare strategia di scelta. La scelta ottima per $t = 0$ la si indica con Θ^*, C^* . Si ha che tale scelta è ottima per ogni $t > 0$. Lo si può dimostrare per assurdo usando le proprietà della speranza condizionata. Dati $\mathcal{F}_s$ e $\mathcal{F}_t$ ($s < t$) e una v.a. $\tilde{x}$ si ha la seguente proprietà:

$$E[\tilde{x} \mid \mathcal{F}_s] = E[E[\tilde{x} \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] \quad (236)$$

ovvero il valore atteso del previsore domani è pari al valore atteso del previsore oggi.

Dal momento che la dimostrazione avviene per assurdo si suppone che Θ^*, C^* non rappresentino la scelta ottima per $t \geq 1$ ma che lo siano solo in $t = 0$ ovvero che esista a_t in $\mathcal{F}_t$ ed esista una strategia $\Theta(t+k)$ e $C(t+k)$, con $k = 1, \dots, T$, con una dotazione iniziale $\Theta^*(t)$ tale che:

$$\sum_{s=t}^T \sum_{a_s \leq a_t} \delta^{s-t} \pi_{a_s}(a_t) u^i(c(a_s)) > \sum_{s=t}^T \sum_{a_s \leq a_t} \delta^{s-t} \pi_{a_s}(a_t) u^i(c^*(a_s)) \quad (237)$$

Dato che Θ^*, C^* è ottima in $t = 0$ si ha che Θ^*, C^* è ottima per ogni $t \geq 1$ nella parte rilevante (vedi la figura 16). Dall'evento a_t (associato a un nodo, vedi a_1 in figura 15) e da $\Theta^*(a_t)$ ho una utilità attesa migliore. Se vale la (238) cioè in a_t Θ^*, C^* non è più ottima allora si ha una strategia migliore per almeno un sottoinsieme degli eventi Θ e C (vedi la figura 16) in modo a avere $\hat{\Theta}$ e $\hat{C}$ dato dall'unione di Θ^*, C^* e Θ e C :

$$\hat{\Theta} = \left\{ \begin{array}{l} \Theta^* \text{ se } s \leq t \text{ e } a_s \not\subseteq a_t \\ \Theta \text{ se } a_s \subseteq a_t \text{ e } s > t \end{array} \right\} \quad (238)$$

$$\hat{C} = \left\{ \begin{array}{l} C^* \text{ se } s < t \text{ e } a_s \not\subseteq a_t \\ C \text{ se } a_s \subseteq a_t \text{ e } s \geq t \end{array} \right\} \quad (239)$$

Si può vedere che C è un processo stocastico adattato mentre Θ è un processo stocastico prevedibile. Se vale la (238) si ha che $\hat{\Theta}$ e $\hat{C}$ danno una utilità superiore a quella di Θ^*, C^* contro l'ottimalità di Θ^*, C^* : si ha una contraddizione e perciò la coppia Θ, C non può esistere. L'utilità attesa condizionata valutata all'istante t è una v.a.: si hanno due strategie ($\hat{\Theta}$ e $\hat{C}$ e Θ^*, C^*) che devono essere confrontate in base alla loro utilità attesa.

Se t è l'istante in cui si verifica l'evento in $\mathcal{F}_t$ che differenzia $\hat{C}$ da C^* si ha:

$$E\left[\sum_{s=t}^T \delta^{s-t} u^i(\hat{C}(s)) \mid \mathcal{F}_t\right] \geq E\left[\sum_{s=t}^T \delta^{s-t} u^i(C^*(s)) \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (240)$$

e tale disuguaglianza in a_t deve valere con il maggiore stretto.

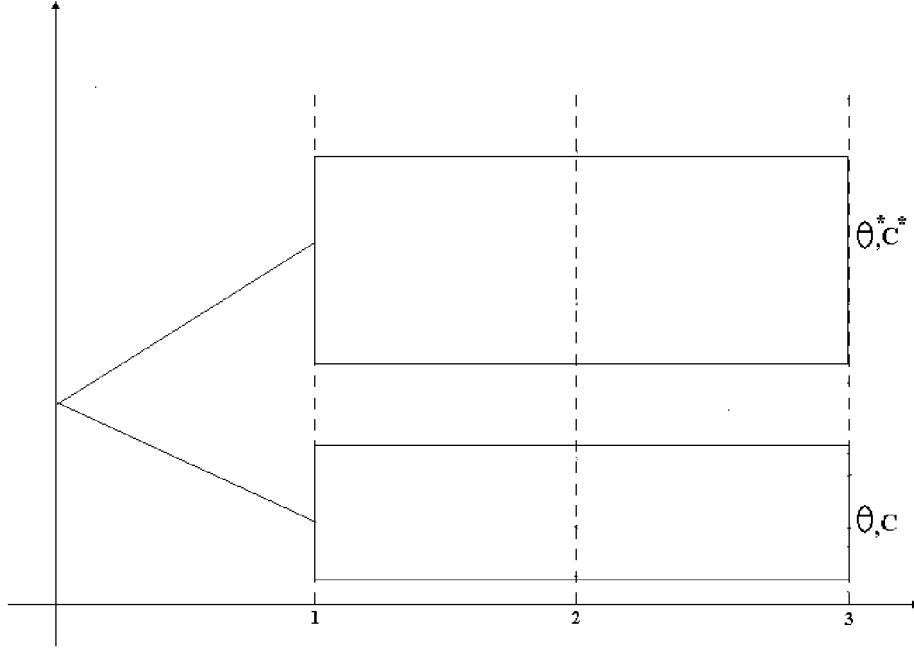


Figura 16: Albero degli eventi (dettagli nel testo)

4.2 Modello ed evoluzione

Si vuole l'ottimalità in $t = 0$, per cui servono le strategie all'istante iniziale, e poi si esegue l'analisi per gli istanti successivi ovvero per $t > 0$. Si vede così che le strategie differiscono a partire da a_t . Se si fa uso della legge della speranza condizionata (ovvero della (236)) ponendo $\tilde{X} = \sum_{s=t}^T \delta^{s-t} u^i(\hat{C}(s))$ dalla (240) si ottiene:

$$E\left[\sum_{s=t}^T \delta^{s-t} u^i(\hat{C}(s))\right] > E\left[\sum_{s=t}^T \delta^{s-t} u^i(C^*(s))\right] \quad (241)$$

dove a primo membro si ha un condizionamento all'istante $t = 0$ e si ha il maggiore stretto perchè si considera il valore atteso oggi delle utilità attese future. Con riferimento alla figura 16 si ha che sul sottoalbero del rettangolo superiore vale un $=$ mentre sul sottoalbero del rettangolo inferiore vale il $>$ per cui il totale per il valore atteso si ha il $>$. Sesommo ai due membri tutto a ciò che accade prima di t , tenuto conto che ciò coincide sia per C^* sia per

$\hat{C}$, e introducendo i fattori di sconto δ^t ottengo:

$$\delta^t E\left[\sum_{s=t}^T \delta^{s-t} u^i(\hat{C}(s))\right] + E\left[\sum_{t=0}^{t-1} \delta^t u^i(\hat{C}(s))\right] > \delta^t E\left[\sum_{s=t}^T \delta^{s-t} u^i(C^*(s))\right] + E\left[\sum_{t=0}^{t-1} \delta^t u^i(C^*(s))\right] \quad (242)$$

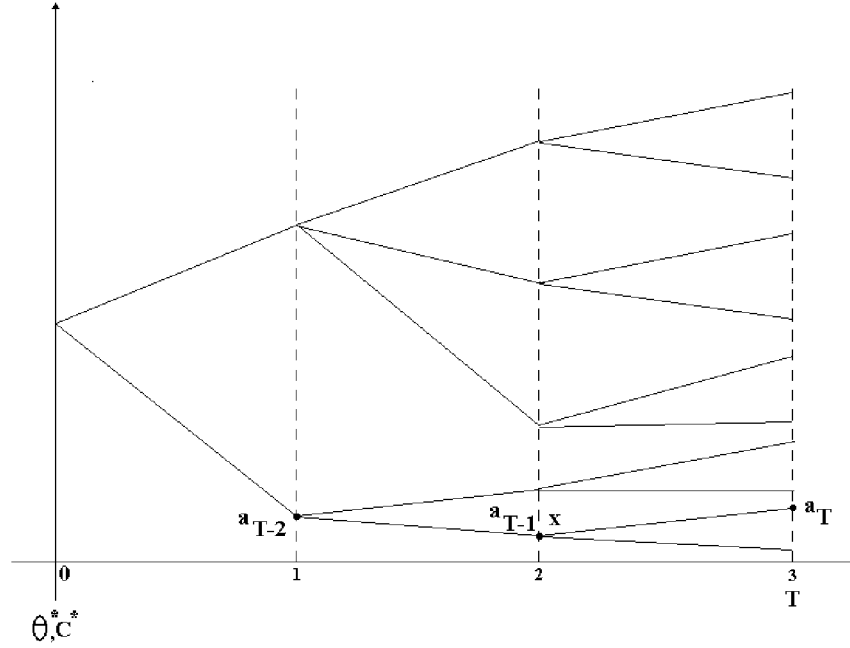


Figura 17: Albero degli eventi e **backward induction**(dettagli nel testo)

Si è così dimostrato che se una strategia è ottima in $t = 0$ allora continua ad esserlo in ogni sottoalbero e cioè per ogni $t > 0$. Si ha pertanto un metodo per ricercare l'ottimo e cioè si parte da un istante $t > 0$ (che può essere anche l'istante $t = T$ in cui l'economia multiperiodale termina) e si procede a ritroso fino all'inizio ovvero fino a $t = 0$ mediante la **backward induction**. Con riferimento alla figura 17 in cui all'istante $T = 3$ l'economia multiperiodale termina vorrei sapere in che modo vengono prese le decisioni all'istante $t = 2$. Si considera la ricchezza e se ne trova il massimo. La scelta che si prende all'istante $t = 2$ fa parte della scelta ottima. In $t = 2$ si risolve il problema con $\Theta(2)$ e la soluzione coincide con quella ottima. La dotazione dell'agente, il suo **endowment**, funziona da variabile ponte fra le varie soluzioni di ottimo. Se l'agente si trova in a_{T-1} (vedi la figura 17) ed ha

una certa ricchezza ad esso è associata $\Theta(T-1)$ e il problema che l'agente deve risolvere è il seguente:

$$\max \begin{pmatrix} C(T-1) \\ \Theta(T) \end{pmatrix} U(C(T-1)) + E[\delta(U(C(T))) \mid \mathcal{F}_{T-1}] \quad (243)$$

in cui compare l'utilità attesa del consumo oggi in $T-1$. Se considero che è $C(T) = \Theta^T(T)D(T)$ posso scrivere:

$$\Theta^T(T)(S(T-1)) - C(T-1) = \Theta^T(T-1)(S(T-1) + D(T-1)) \quad (244)$$

in cui

1. l'unico input è $\Theta^T(T-1)$ e cioè il numero di titoli con i quali l'agente arriva in a_{T-1} e
2. $S(t)$ e $D(t)$ sono processi stocastici noti una volta per tutte.

Si fa notare come non si abbia consumo in T dal momento che in tale istante l'economia multiperiodale termina. La scelta ottima, una volta che si ha $\Theta(T-1)$, è $C(T-1)\Theta(T)$: tale soluzione, per il principio della programmazione dinamica, è ottima se si dispone dell'ammontare dei titoli per il portafoglio ottimo. La scelta ottima, pertanto, è un portafoglio composto da $\Theta^*(T)$ e $C^*(T-1)$. Si definisce la funzione valore che descrive il passaggio da $T-1$ a T note le risorse $\Theta(T-1)$:

$$J(\Theta(T-1)) = U(C^*(T-1)) + \delta E[U(C^*(T)) \mid \mathcal{F}_{T-1}] \quad (245)$$

con $C^*(T) = \Theta^{*T}(T)D(T)$. Fatto questo ci si sposta un passo all'indietro in $T-2$ ovvero in a_{T-2} (vedi la figura 17) e si ha un nuovo problema di massimizzazione:

$$\max \begin{pmatrix} C(T-2) \\ C(T-1) \\ \Theta(T-1) \\ \Theta(T) \end{pmatrix} U(C(T-2)) + E[\delta(U(C(T-1))) + \delta^2 U(C(T)) \mid \mathcal{F}_{T-2}] \quad (246)$$

con in più i vincoli di bilancio e di utilizzo nel passaggio da $T-2$ a $T-1$. Si hanno quattro variabili e in più si sa che $C(T-2)$, $C(T-1)$, $D(T-1)$ e $\Theta(T)$ sono all'ottimo se come input si ha solo $\Theta(T-2)$. Se ci si posiziona in T si può scrivere un nuovo problema di ottimizzazione:

$$\max \begin{pmatrix} C(T-2) \\ \Theta(T-1) \end{pmatrix} U(C(T-2)) + \delta E[J(\Theta(T-1)) \mid \mathcal{F}_{T-2}] \quad (247)$$

in modo da avere solamente **problemi uniperiodali** caratterizzati da un solo vincolo di bilancio:

$$\Theta^T(T-1)(S(T-2)) = \Theta^T(T-2)(S(T-2) + D(T-2)) - C(T-2) \quad (248)$$

per i quali il futuro è descritto in modo perfetto dalla funzione valore. Si può osservare che la (247) equivale a $J(\Theta(T-2))$ come massima utilità oggi più un valore atteso domani.

Si ha:

$$J(\Theta(t)) = \max \left(\begin{array}{c} C(t) \\ \Theta(t-1) \end{array} \right) U(C(t)) + \delta E[J(\Theta(t+1)) \mid \mathcal{F}_t] \quad (249)$$

Lungo la traiettoria ottima deve valere senza il *max* per cui deve essere:

$$J(\Theta^*(t)) = U(C^*(t)) + \delta E[J(\Theta^*(t+1)) \mid \mathcal{F}_t] \quad (250)$$

Il massimo viene raggiunto puntualmente sulla traiettoria ottima. La dimostrazione è costruttiva, dal momento che consente di costruire la soluzione, e si basa sul fatto che la soluzione ottima in a_{T-1} lo è in a_{T-2} e così a ritroso fino a $t = 0$. Un problema è che non si riesce (quasi) mai a scrivere $J(\Theta)$ se non in rari casi (ad esempio nel caso del tempo continuo e altri simili) mentre un pregio è quello di permettere di avere la strategia ottima del piano di cammino.

Se considero la (249) e definisco il rendimento del titolo n -esimo come

$$r_n(t_{t+1}) = \frac{s_n(t+1) - d_n(t+1)}{s_n(t)} \quad (251)$$

posso ottenere, per $n = 1, \dots, N$:

$$U'(c^*(t)) = \delta E[J'(\Theta^*(t+1)) \mid \mathcal{F}_t] \quad (252)$$

con il massimo di $J(\Theta(t))$ rispetto a c e a Θ . Lungo la traiettoria ottima si deve avere indifferenza fra consumare istante per istante e risparmiare, investire e consumare in futuro. Se compro $\frac{1}{s_n(t)}$ ottengo

$$\frac{1}{s_n(t)}(s_n(t+1) + d_n(t+1))J'(\Theta^*(t+1)) \quad (253)$$

dove il termine $\frac{1}{s_n(t)}(s_n(t+1) + d_n(t+1))$ rappresenta l'utilità marginale: invece di consumare una unità in t la investo in $s_n(t)$ ed ho un valore domani (ovvero all'istante successivo).

Se lungo la traiettoria ottima ho la $J(\Theta^*(t))$ differenziando rispetto a C^* ottengo la cosiddetta **envelope condition**:

$$U'(C^*(t)) = J'(\Theta^*(t)) \quad (254)$$

Se le unisco ottengo la cosiddetta **condizione di Eulero** che posso scrivere come:

$$U'(C^*(t)) = \delta E[U'(C^*(t+1))r_n(t+1) \mid \mathcal{F}_t] \quad (255)$$

da cui

$$E\left[\frac{\delta U'(C^*(t+1))}{U'(C^*(t))}r_n(t+1) \mid \mathcal{F}_t\right] = 1 \quad (256)$$

La formula vale in termini condizionati e mentre prima al tempo $t = 1$ finiva tutto ora l'economia multiperiodale finisce in $t = T$ e non si può sostituire il processo di consumo con la ricchezza. La relazione che abbiamo trovato è non lineare e completa il processo di consumo.

Da quanto visto discendono implicazioni in due direzioni:

1. mercati finanziari,
2. teoria del consumo.

Dalla (256) si ricava che, siccome per il rendimento privo di rischio si ha $r_f = \frac{1}{\delta}$, l'utilità marginale ha la forma seguente ed è una **martingala**:

$$U'(C^*(t)) = E[U'(C^*(t+1)) \mid \mathcal{F}_t] \quad (257)$$

Vediamo cosa vuol dire che un processo stocastico adattato X è una martingala:

$$X(t) = E[x(t) \mid \mathcal{F}_t] \quad (258)$$

per $s > t$. Se l'agente è neutro al rischio allora si ha:

$$C^*(t) = E[C^*(t) \mid \mathcal{F}_t] \quad (259)$$

per cui anche il processo di consumo è una martingala e quindi:

$$C^*(t+1) = C^*(t) + \tilde{\varepsilon}(t+1) \quad (260)$$

in cui $E[\tilde{\varepsilon}(t+1) \mid \mathcal{F}_t] = 0$ e tutto ciò implica che il piano di consumo è non correlato con variazioni del reddito passate e future non prevedibili.

Con la (256) si ha una teoria della valutazione e del rendimento di un titolo. Secondo la:

$$s_n(t)U'(C^*(t)) = E\left[\frac{\delta U'(C^*(t+1))}{U'(C^*(t))}(s_n(t+1) + d_n(t+1)) \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (261)$$

posso ricavare $s_n(t)$ e, iterando il ragionamento, $s_n(t+1)$ e così via, ogni volta usando la proprietà della speranza condizionata. Sostituendo s_{n+1} in s_n e iterando il ragionamento si arriva anche ad una forma chiusa per $s_n(t)$ in cui compaiono solo i dati del problema e non i valori successivi della s , forma per la quale si rimanda a [Bar03].

Riprendendo la

$$E\left[\frac{\delta U'(C^*(t+1))}{U'(C^*(t))} r_n(t+1) \mid \mathcal{F}_t\right] = 1 \quad (262)$$

si può eseguire un esame in merito ai rendimenti. Applicando la regola sulla covarianza condizionata applicata più volte questa volta a $\mathcal{F}_t$ e considerando che il rendimento del titolo privo di rischio pari a:

$$\frac{1}{r_f} = \frac{\delta U'(C^*(t+1))}{U'(C^*(t))} \mid \mathcal{F}_t \quad (263)$$

è costante fra t_i e t_{i+1} ma varia nel tempo, con le elaborazioni solite si ha:

$$E[r_n(t+1) - r_f(t+1)] = -r_f cov\left[\delta \frac{\delta U'(C^*(t+1)) \tilde{r}(t+1)}{U'(C^*(t))} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (264)$$

in cui:

1. a primo membro compare il valore atteso del premio per il rischio,
2. a secondo membro compaiono il **saggio marginale di sostituzione** e il rendimento del titolo rischioso

e la relazione vale lungo il sentiero ottimo. tale formula è la versione più generale per l'asset Pricing e vale per $n = 1, \dots, N$. Il modello rappresentato dalla (264) dipende sia dal processo di consumo sia dalla funzione utilità ed è complesso. In merito alla funzione utilità si hanno due strade:

1. considerare u del tipo:

$$u(t) = \frac{C^{1-\alpha}(t)}{1-\alpha} \quad (265)$$

2. considerare u di tipo quadratico:

$$u(t) = a(t) - \frac{b}{2} C^2(t) \quad (266)$$

Nel caso della (265) la non linearità dipende dal fattore α mentre nel caso della (266) si ha che il valore atteso condizionato coincide con il rendimento del titolo privo di rischio cambiato di segno ovvero si ha:

$$E[r_n - r_f \mid \mathcal{F}_t] = -r_f \quad (267)$$

Il modello rappresentato dalla (264) viene detto **Consumption capital Asset Pricing Model** o **CCAPM**, per ulteriori dettagli si rimanda a [Bar03].

A Appendice

Il contenuto della presente Appendice deriva quasi completamente da [MCWG95], capitoli 6 (Scelta in condizioni di incertezza), 15 e 19 (Equilibrio generale in condizioni di incertezza).

A.1 Scelta in condizioni di incertezza

Molte importanti decisioni economiche comprendono un elemento di **rischio** che viene analizzato mediante una teoria ad hoc più specializzata di quella in condizioni di certezza ma sempre basata sull'ipotesi di **agenti razionali** con preferenze che scelgono fra alternative incerte, in cui è presente un fattore di rischio.

Il primo passo è quello di considerare un ambiente in cui alternative con esiti incerti sono descritte sulla base di distribuzioni di probabilità note dette **lotterie** sulle quali gli agenti hanno relazioni di preferenza **razionali**. Le relazioni di preferenza sono rappresentabili per mezzo di **funzioni utilità** in base a quanto stabilito *dal teorema dell'utilità attesa e dall'assioma di indipendenza*. Sotto l'ipotesi che gli esiti di scelte in condizioni di rischio siano di tipo monetario oppure possano essere espresse con una misura unidimensionale di consumo, si passa poi a definire l'**avversione al rischio** sia fra agenti diversi sia per diversi livelli di ricchezza di un agente. Sulla base di tutto ciò si passa al confronto di distribuzioni alternative profitti di tipo monetario in modo da ordinarle sulla base di criteri statistici di dominanza, introducendo i concetti di dominanza statistica del primo e del secondo ordine. Sulla falsariga di [MCWG95] l'argomento finale della sezione sarà una analisi della dipendenza dell'utilità dai cosiddetti stati di natura con l'introduzione del concetto di beni contingenti.

A.1.1 Lotterie e teoria dell'utilità attesa

Supponiamo di avere un agente che deve scegliere fra un certo numero di alternative in presenza di rischio, ciascuna delle quali può dar luogo ad un certo esito che non è noto al momento in cui l'agente effettua la scelta. Sia C l'insieme dei possibili esiti delle scelte dell'agente, insieme che si suppone finito e contenente N oggetti indicati come c_n , $n = 1, \dots, N$. si suppone che agli elementi c_n siano associate probabilità oggettivamente note. Il primo concetto che si introduce è quello di *lotteria*.

Definizione A.1 (Lotteria) *Una lotteria semplice L è una lista di probabilità associate agli elementi c_n ovvero è definita come:*

1. $L = (p_1, \dots, p_n)$,
2. $p_n \geq 0 \ \forall \ n = 1, \dots, N$,
3. $\sum_n p_n = 1$.

La lotteria L è rappresentabile come un punto del semplice delle lotterie $\Delta = \{p \in \mathbb{R}^N : p_1 + \dots + p_N = 1\}$.

Dato il concetto di lotteria semplice è possibile definire il concetto di *lotteria composta* i cui elementi costitutivi sono lotteria semplici.

Definizione A.2 (Lotterie composte) *Date K lotterie semplici $L_k = (p_1^k, \dots, p_n^k)$, $k = 1, \dots, K$, e date le probabilità $\alpha_k \geq 0$ con $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ si definisce come **lotteria composta** la lotteria*

$$(L_1, \dots, L_K; \alpha_1, \dots, \alpha_K) \quad (268)$$

ovvero la lotteria che dà la lotteria semplice L_k con probabilità α_k , $k = 1, \dots, K$.

Per ogni lotteria composta esiste una lotteria semplice che è la lotteria ridotta equivalente la cui trattazione esula dagli scopi delle presenti note, per dettagli vedi [MCWG95], pagina 169 e seguenti.

Una volta introdotte le lotterie per modellare alternative in condizioni di rischio si devono definire le preferenze degli agenti su tali alternative. L'idea di base è quella di lavorare sempre su lotterie ridotte ovvero su lotterie semplici L su un insieme di esiti possibili C . Il passo successivo è quello di supporre che ogni agente abbia una relazione di preferenza razionale $\succeq$ su L , ovvero una relazione completa e transitiva che permette il confronto di coppie qualunque di lotterie semplici. In merito alla relazione di preferenza degli agenti sulle lotterie semplici si introducono due assiomi senza discuterli, rimandando a [MCWG95], pagina 171 e seguenti, per ulteriori dettagli:

1. assioma di continuità,
2. assioma di indipendenza.

Assioma A.1 (Continuità della relazione di preferenza) *La relazione di preferenza $\succeq$ sullo spazio delle lotterie semplici $\mathcal{L}$ è **continua** se $\forall \ L, L', L'' \in \mathcal{L}$ si ha che $\forall \ \alpha \in [0, 1]$ gli insiemi:*

$$\{\alpha L + (1 - \alpha)L' \succeq L''\} \subset [0, 1] \quad (269)$$

$$\{L'' \succeq \alpha L + (1 - \alpha)L'\} \subset [0, 1] \quad (270)$$

sono chiusi.

L'assioma di continuità stabilisce che piccoli cambiamenti nelle probabilità non cambiano la natura dell'ordinamento fra due lotterie semplici. L'assioma di continuità implica l'esistenza di una funzione utilità che rappresenta la relazione $\succeq$ ovvero una funzione

$$U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (271)$$

tale che $L \succeq L'$ sse $U(L) \geq U(L')$.

Assioma A.2 (Indipendenza della relazione di preferenza) *La relazione di preferenza $\succeq$ sullo spazio delle lotterie semplici $\mathcal{L}$ soddisfa l'assioma di indipendenza se $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$ e $\forall \alpha \in (0, 1)$ si ha:*

$$L \succeq L' \text{ sse } \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succeq \alpha L' + (\alpha)L'' \quad (272)$$

ovvero sse combinate le due lotterie con una terza si ottengono due lotterie combinazioni strettamente convesse delle tre lotterie per le quali l'ordinamento non cambia ovvero l'ordinamento fra L e L' è indipendente dalla lotteria L''

Si passa ora ad introdurre alcune proprietà della funzione utilità $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$, rimandando a [MCWG95], pagina 173 e seguenti, per ulteriori dettagli.

Definizione A.3 *La funzione utilità $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ è sotto forma di **utilità attesa** se agli N esiti sono associabili N numeri tali che per qualunque lotteria semplice $L = (p_1, \dots, p_N)$ si ha:*

$$U(L) = \sum_{i=1}^N u_i p_i \quad (273)$$

L'espressione $U(L) = \sum_{i=1}^N u_i p_i$ è la forma generale di una funzione lineare delle probabilità p_i . Tale proprietà ci consente di enunciare il seguente teorema.

Teorema A.1 (Linearità della $U()$) *Una funzione utilità $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha una forma di utilità attesa sse è lineare ovvero se soddisfa la seguente relazione:*

$$U\left(\sum_{k=1}^k \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^k \alpha_k U(L_k) \quad (274)$$

per qualunque K lotterie $L_k \in \mathcal{L}$, $k = 1, \dots, K$, e probabilità $(\alpha_1, \dots, \alpha_K) \geq 0$ con $\sum_k \alpha_k = 1$.

La forma di utilità attesa della $U()$ è preservata da trasformazioni lineari crescenti ovvero se $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione utilità attesa per la relazione di preferenza $\succeq$ allora lo stesso vale per $\tilde{U} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ sse esistono gli scalari $\beta > 0$ e γ che permettono di definire una trasformazione affine fra le due:

$$\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma \quad (275)$$

Tale proprietà consente di dare un senso a differenze fra utilità, per ulteriori dettagli vedi [MCWG95], pagina 174. A questo punto, dopo aver introdotto gli assiomi di continuità e di indipendenza, si può enunciare il teorema dell'utilità attesa che afferma che, se gli assiomi suddetti sono soddisfatti dalla relazione di preferenza degli agenti, tale relazione di preferenza è rappresentabile da una funzione utilità che ha la forma di una utilità attesa.

Teorema A.2 (Teorema dell'utilità attesa) *Data una relazione di preferenza $\succeq$ sullo spazio delle lotterie $\mathcal{L}$ che soddisfa gli assiomi di continuità e di indipendenza si ha che $\succeq$ può essere rappresentata per mezzo di una funzione di utilità del tipo utilità attesa ovvero si può assegnare un numero u_n ad ogni esito di una lotteria in modo che, date due lotterie qualunque $L = (p_1, \dots, p_n)$ e $L' = (p'_1, \dots, p'_N)$, si abbia*

$$L \succeq L' \quad (276)$$

sse

$$\sum_{n=1}^N u_n p_n \geq \sum_{n=1}^N u_n p'_n \quad (277)$$

I vantaggi del teorema dell'utilità attesa sono:

1. di tipo analitico per la sua convenienza,
2. di tipo normativo perchè fornisce una valida guida all'azione

ma presenta problemi che hanno dato adito a paradossi descritti in letteratura, per ulteriori dettagli vedi [MCWG95], pagina 179 e seguenti.

A.1.2 Lotterie monetarie e avversione al rischio

In questa sezione viene formalizzata la nozione di **avversione al rischio** e se ne studiano alcune sue proprietà, sia pure per sommi capi, rimandando a [MCWG95], pagina 183 e seguenti, per ulteriori dettagli. L'ipotesi di fondo è che le alternative *rischiose* o in presenza di rischio diano luogo ad esiti monetari, ovvero rappresentabili con uno scalare definito su un qualche

insieme che supporremo a cardinalità infinita e che, di solito, coincide con $\mathbb{R}$. Per quanto detto, le alternative sono rappresentate con una variabile continua X per cui le lotterie su X possono essere descritte utilizzando la *funzione distribuzione cumulativa*:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \quad (278)$$

definita come segue:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (279)$$

La (279) ha validità generale. se alla F può essere associata una funzione densità $f(x)$ si ha $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (280)$$

Sia la funzione di distribuzione sia la funzione densità preservano la struttura lineare delle lotterie L_k per cui nel caso di una lotteria composta descritta dalla (268) la funzione distribuzione è la somma pesata delle distribuzioni delle singole lotterie ovvero si ha:

$$F(x) = \sum_k \alpha_k F_k(x) \quad (281)$$

in cui $F_k(x)$ è la funzione di distribuzione della lotteria semplice L_k . Nelle presenti note, sulla falsariga di [MCWG95], considereremo lo spazio delle lotterie $\mathcal{L}$ come l'insieme di tutte le funzioni di distribuzione sull'intervallo $[a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso si l'ipotesi di agenti caratterizzati da realzioni di preferenza $\succeq$ razionali sull'insieme delle lotterie $\mathcal{L}$. L'uso del teorema dell'utilità attesa ad esiti definiti da una variabile continua ci dice che esiste un assegnamento di valori di utilità certa $u(x)$ tali che si può calcolare la funzione utilità attesa con la relazione seguente:

$$U(F) = \int (x) dF(x) \quad (282)$$

La (282) mantiene la forma dell'utilità attesa e permette di applicari momenti di ordine superiore al primo all'analisi. Si ricorda che è bene avere presente la differenza fra la $U()$ (utilità attesa in condizioni di incertezza o rischio, se la distribuzione di probabilità è nota) e la $u()$ (utilità in condizioni di certezza).

Fatte queste premesse e rinviando, as usual, a [MCWG95] per gli approfondimenti, si passa ad introdurre il concetto di **avversione al rischio** con alcuni strumenti per la sua misurazione. Il concetto di **avversione al rischio** è centrale in tutti i casi di incertezza (che, per i nostri scopi, coincidono con quelli di rischio dal momento che si suppongono note le distribuzioni di probabilità degli eventi). Il punto di partenza è una definizione di tipo generale.

Definizione A.4 Un agente è detto essere **avverso al rischio** se per ogni lotteria $F()$ la lotteria degenera che dà la quantità $\int x dF(x)$ con certezza è buona quanto la prima. Se l'agente è sempre indifferente fra tali lotterie si dice che è **neutro al rischio** mentre è **strettamente avverso al rischio** se si ha indifferenza solo quando le due lotterie coincidono.

Da tale definizione discende la disuguaglianza di Jensen ($\int u(x) dF(x) \leq u(\int x dF(x) \forall F())$) che rappresenta un modo di definire una funzione concava. Si ha, quindi, che l'avversione al rischio (vedi la figura 18) coincide con la **concavità** della funzione utilità $u()$ (analiticamente si ha $u'' < 0$) e che la stretta avversione al rischio coincide con la stretta concavità della $u()$. Ciò rende conto del fatto che l'utilità marginale del denaro è decrescente con la ricchezza per cui ad una ricchezza x il guadagno di utilità per una unità in più è minore della perdita dovuta ad avere una unità in meno. Nel caso di un agente neutro al rischio (vedi la figura 19) la funzione utilità ha un andamento lineare (analiticamente si ha $u' > 0$ e $u'' = 0$) per cui la variazione di utilità legate alla perdita e al guadagno sono uguali. In figura 18 per il soggetto avverso al rischio si vede come una perdita unitaria abbia una influenza molto maggiore sul valore dell'utilità di quella che ha un guadagno unitario. L'analisi dell'avversione al rischio si fonda su due concetti base (vedi la figura 18):

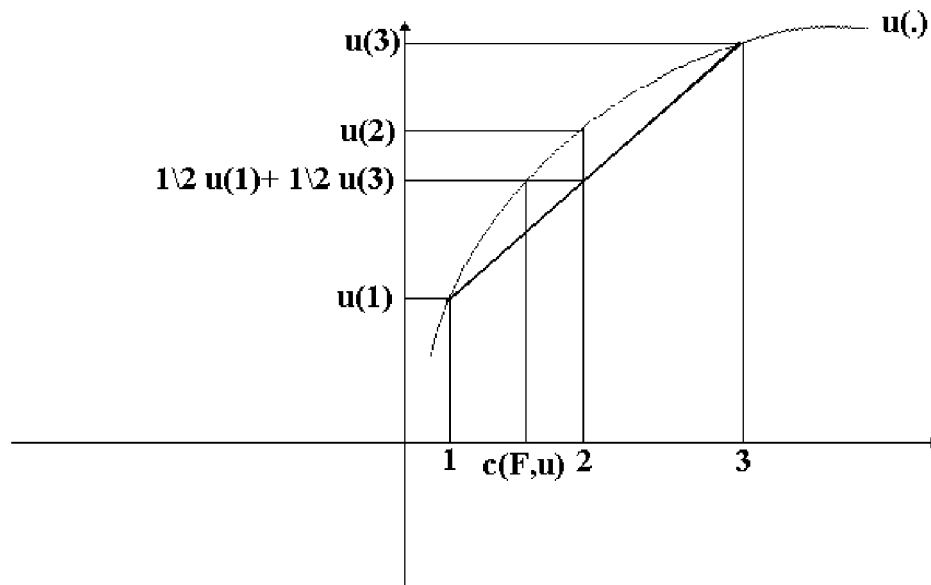


Figura 18: Avversione al rischio (dettagli nel testo)

1. l'equivalente di certezza della $F()$ denotato con $c(F, u)$, che denota la quantità di denaro per la quale un agente è indifferente fra la lotteria $F()$ e la quantità certa $c(F, u)$ ovvero $u(c(F, u)) = \int u(x)dF(x)$,
2. il premio di probabilità per una ricchezza prefissata x che è la probabilità di vincere in eccesso rispetto alle quote eque che rende un agente indifferente fra un esito certo x e una lotteria con due esiti $x - \varepsilon$ e $x + \varepsilon$.

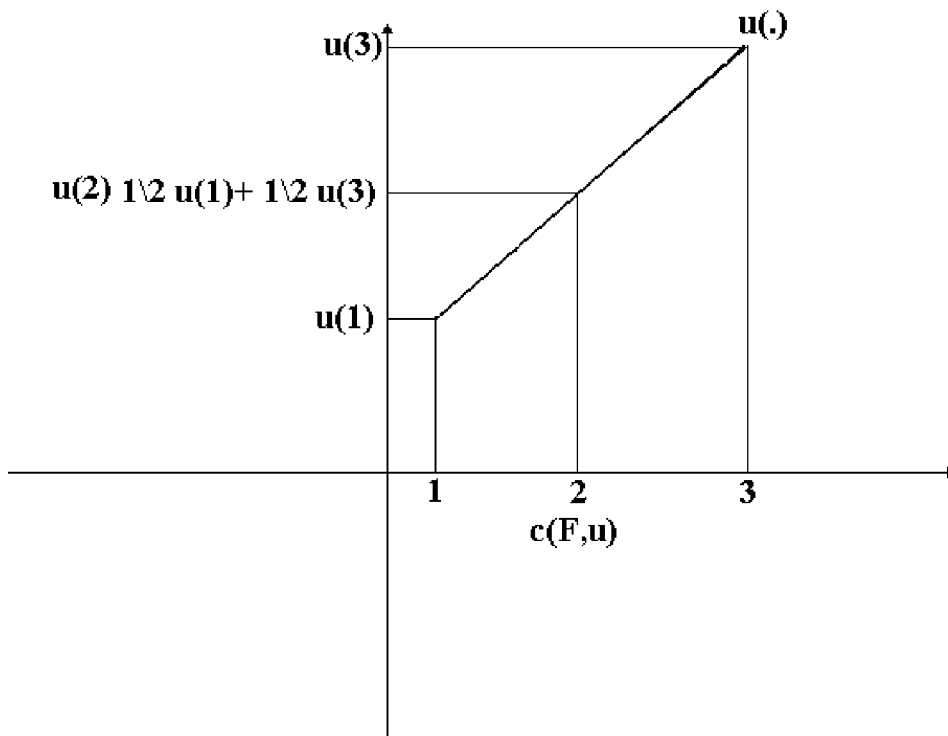


Figura 19: Neutralità al rischio (dettagli nel testo)

Da tali definizioni discende che si ha una equivalenza fra le seguenti proprietà:

1. un agente è avverso al rischio,
2. la funzione utilità dell'agente $u()$ è concava (ovvero $u''() < 0$),
3. $c(F, u) \leq \int x dF(x) \forall F()$
4. il premio di probabilità è non negativo.

Dopo aver introdotto il concetto di avversione al rischio è necessario introdurre gli strumenti per una sua valutazione quantitativa (una sua misurazione).

Definizione A.5 *Data una funzione utilità certa $u()$ due volte differenziabile, si definisce come **coefficiente di assoluta avversione al rischio** per la ricchezza x la qualità:*

$$r_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \quad (283)$$

Una motivazione della definizione si basa sull'osservazione che per un soggetto neutro al rischio la $u()$ ha un andamento lineare (vedi la figura 19) per cui il grado di avversione al rischio viene messo in relazione alla derivata seconda che rappresenta una misura della curvatura. Il solo uso della $u''()$, tuttavia, non è adeguato perchè la $u''()$ non è invariante rispetto a trasformazioni lineari positive della $u()$. Per avere tale invarianza è sufficiente dividere la $u''()$ per la $u'()$.

Il **coefficiente di assoluta avversione al rischio** può essere usato per stabilire quale di due agenti 1 e 2 con funzioni utilità certa $u_1()$ e $u_2()$ sia più avverso al rischio dell'altro. Si possono usare tre criteri (fra gli altri) per stabilire se 2 è più avverso al rischio di 1:

1. $r_a(x, u_2) \geq r_a(x, u_1)$ per ogni x ,
2. $c(F, u_2) \leq c(F, u_1)$ per qualche $F()$,
3. esiste una funzione concava crescente $\psi()$ tale che $u_2(x) = \psi(u_1(x))$ ovvero $u_2()$ è più concava di $u_1()$.

Oltre al confronto fra individui a parità di ricchezza x è necessario fare un confronto per differenti livelli di ricchezza partendo dalla seguente definizione.

Definizione A.6 *Una funzione utilità certa $u()$ in funzione della ricchezza presenta una avversione assoluta al rischio **decreciente** se $r_a(x, u)$ è una funzione decrescente della ricchezza ovvero se*

$$\frac{\partial r_a(x, u)}{\partial x} < 0 \quad (284)$$

Agenti le cui preferenze mediante la funzione utilità soddisfano la definizione precedente ovvero hanno una **avversione assoluta al rischio decrescente** si assumono rischi sempre maggiori man mano diventano più ricchi. Da tale assunzione si possono derivare altri risultati di interesse in economia. Di

solito si introduce un concetto più forte ovvero di **avversione relativa al rischio** che si impone non crescente. Nel caso della avversione assoluta al rischio si esegue il confronto fra guadagni o perdite in termini assoluti rispetto alla ricchezza corrente x mentre nel caso della avversione relativa al rischio si prendono in considerazione solo guadagni o perdite percentuali rispetto alla ricchezza corrente. Si ha pertanto la seguente definizione.

Definizione A.7 *Data una funzione utilità certa $u()$ due volte differenziabile, si definisce come **coefficiente di relativa avversione al rischio** per la ricchezza x la quantità:*

$$r_r(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} \quad (285)$$

È interessante vedere come tale grandezza vari al variare della ricchezza x : il fatto che $r_r(x)$ sia non crescente significa che un agente diventa meno avverso al rischio rispetto alle lotterie che sono proporzionali alla sua ricchezza al crescere di questa. Siccome è $r_r(x) = x r_a(x)$, un agente avverso al rischio con una avversione relativa al rischio decrescente avrà una avversione assoluta al rischio decrescente. Oltre al confronto degli agenti sulla base delle funzioni utilità si può procedere al confronto sulla base delle distribuzioni dei payoff mediante i concetti di dominanza stocastica del primo e del secondo ordine la cui trattazione esula sia dagli scopi della presente appendice sia dalle competenze dell'autore, si rimanda, as usual, a [MCWG95], pagine 194 – 199 per gli approfondimenti.

A.1.3 Utilità dipendente dallo stato (cenni)

Per quanto visto finora un agente si cura solo della sua utilità e dei suoi payoff senza curarsi delle cause che li originano. Cambiando leggermente prospettiva è possibile descrivere una situazione in cui un agente si cura dei suoi rendimenti monetari e degli eventi soggiacenti che sono gli stati di natura o stati del mondo che li originano. In questo caso si usano gli stati del mondo per rappresentare l'incertezza assegnando a ciascuno di essi una probabilità, oggettivamente nota agli agenti, che uno stato si verifichi. L'insieme degli stati viene di solito indicato con $\mathcal{S}$ (di solito a cardinalità finita e pari a S) mentre con s si indicano i singoli stati ad ognuno dei quali viene associata una probabilità π_s , strettamente positiva, di verificarsi.

In questo modo una alternativa incerta con reddito monetario non negativo può essere descritta da una funzione che mappa realizzazione degli stati di natura sull'insieme dei possibili payoff e che è detta **variabile aleatoria**. Si ha la seguente

Definizione A.8 Una variabile aleatoria (v.a.) è una funzione g dall'insieme degli stati $\mathcal{S}$ agli esiti monetari non negativi $\mathbb{R}^+$

$$g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (286)$$

Ad ogni v. a. può essere associata una lotteria monetaria che può essere descritta da una funzione di distribuzione $F()$ tale che:

$$F(x) = \sum_{\{s: g(s) \leq x\}} \pi_s \quad (287)$$

Dal momento che $\mathcal{S}$ ha cardinalità finita S è possibile rappresentare una v.a. con payoff monetari con un vettore $(x_1, \dots, x_S)$ in cui x_s è il payoff non negativo nello stato s cui è associata la probabilità π_s . Le probabilità oggettive π_s definiscono il vettore $(\pi_1, \dots, \pi_S)$. Un modo alternativo è quello di ricorrere al vettore $(x_1, \dots, x_S, \pi_1, \dots, \pi_S)$.

A questo punto si hanno:

1. l'insieme $\mathbb{R}_+^S$ delle v.a. non negative su $\mathcal{S}$,
2. una relazione di preferenza razionale su $\mathbb{R}_+^S$

che ci consentono di definire il concetto di **prodotto o bene o commodity contingente**.

Definizione A.9 (Commodity contingente) Una commodity contingente è una v.a. s che paga uno sse si verifica lo stato s . L'insieme delle v.a. $\mathbb{R}_+^S$ è l'insieme dei beni di consumo di queste commodity contingenti.

Nota A.1 In questo modo si trasformano stati del mondo in beni: nel caso del bene grano in due stati del mondo secco e piovoso, applicando i concetti visti si introducono due commodity contingenti che sono **grano secco** e **grano piovoso**, ciascuna con la sua probabilità.

In questo caso si cerca di rappresentare le preferenze individuali sugli esiti monetari mediante una funzione utilità che possiede una forma di **utilità attesa estesa**.

Definizione A.10 La relazione di preferenza $\succeq$ ha una rappresentazione come **utilità attesa estesa** se per ogni $s \in S$ esiste una funzione

$$u_s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (288)$$

tale che comunque si prendono:

$$1. (x_1, \dots, x_S) \in \mathbb{R}_+^S,$$

$$2. (x'_1, \dots, x'_S) \in \mathbb{R}_+^S$$

si ha:

$$(x_1, \dots, x_S) \succeq (x'_1, \dots, x'_S) \text{ sse } \sum_s \pi_s u_s(x_s) \geq \sum_s \pi_s u_s(x'_s) \quad (289)$$

Si noti che la v.a. $(x_1, \dots, x_S)$ induce una lotteria che paga x_s con probabilità π_s per cui $\sum_s \pi_s u(x_s)$ è una utilità attesa. Ciò che si generalizza è che in ogni stato s si può avere una diversa funzione utilità $u_s()$.

L'utilità della rappresentazione come utilità attesa estesa come strumento di analisi in condizione di incertezza è legata al comportamento degli insiemi di indifferenza in un intorno della **linea della certezza monetaria** che è data dalle v.a. che pagano la stessa quantità di denaro in tutti gli stati del mondo. Nel caso di $S = 2$ e di funzioni $u_s()$ concave (la concavità deriva da considerazioni sull'avversione al rischio dell'agente) la linea della certezza monetaria è l'insieme dei punti con $x_1 = x_2$ e il tasso marginale di sostituzione nel punto $(\bar{x}, \bar{x})$ è dato dalla:

$$\frac{\pi_1 u'_1(\bar{x})}{\pi_2 u'_2(\bar{x})} \quad (290)$$

mentre la pendenza delle curve di indifferenza è data dalla:

$$-\frac{\pi_1 u'_1(\bar{x})}{\pi_2 u'_2(\bar{x})} \quad (291)$$

per cui la pendenza delle curve di indifferenza rispetto alla linea della certezza riflette la natura della dipendenza dallo stato oltre alle probabilità dei diversi stati. per ulteriori dettagli vedi [MCWG95], pagina 201 e seguenti.

A.2 Equilibrio generale in condizioni di incertezza

In questa sezione vedremo una economia di mercato competitiva da una prospettiva di equilibrio generale da un punto di vista sia metodologico sia teorico. La trattazione dettagliata dell'argomento esula sia dagli scopi della presente Appendice sia dalle competenze dell'autore, si rimanda, as usual, a [MCWG95] per gli approfondimenti.

Da un punto di vista metodologico si hanno due caratteristiche centrali:

1. l'economia è vista come un sistema *chiuso* e *interrelato* in cui vanno determinati **simultaneamente** tutti i valori di equilibrio delle variabili (endogene) di interesse,

2. l'approccio mira a ridurre al minimo l'insieme delle variabili esogene, riconducendole a un piccolo numero di realtà fisiche.

Da un punto di vista teorico la teoria dell'equilibrio generale mira a determinare i prezzi e le quantità di equilibrio in un sistema di mercati perfettamente competitivi. Come sempre si rimanda a [MCWG95] (pagine 511 – 514) per gli approfondimenti del caso.

A.2.1 Esempi di teoria generale dell'equilibrio

Nella maggior parte delle economie si hanno le seguenti attività di base:

1. produzione,
2. scambio,
3. consumo.

Il caso più semplice è quello in cui si hanno solo *scambio* e *consumo* nell'ambito di una economia di **puro scambio** in cui i beni che sono consumati sono quelli che gli individui possiedono come dotazioni e che scambiano fra di loro in modo da ottenere il massimo vantaggio reciproco. Il modello più semplice è quello in cui si hanno due soli *individui* (*consumatori*) che scambiano due merci fra di loro. Per la sua descrizione si può usare la *scatola di Edgeworth*. Il passo successivo è quello di introdurre la *produzione* con un modello con una *ditta* e un *consumatore* per poi passare alla allocazione di risorse fra più ditte. Anche da questo semplice elenco si vede come la materia sia vasta e complessa (tanto da coprire i capitoli dal 15 al 20 di [MCWG95]). Per ovvi motivi (mancanza di spazio, tempo e competenze) in questa appendice ne verrà trattato un sottoinsieme molto ridotto, estratto dai capitoli 15 e 19 di [MCWG95]).

A.2.2 Economia di puro scambio

Una economia di puro scambio è una economia in cui non si ha produzione di beni ma solo scambio e consumo: gli agenti hanno una dotazione iniziale di beni che scambiano fra di loro e consumano. Il caso più semplice di una economia di tale tipo è quello con

1. due consumatori $i = 1, 2$ che agiscono come **price takers** ovvero senza poter influenzare i prezzi di mercato che sono variabili esogene,
2. due beni $\ell = 1, 2$.

Tale caso può essere analizzato con uno strumento grafico noto come **scatola di Edgeworth**. Ciascuno dei consumatori ha:

1. un vettore delle dotazioni iniziali $\omega_i = (\omega_{1i}, \omega_{2i}) \in \mathbb{R}_+^2$, dove $\omega_{\ell i}$ è la dotazione della commodity ℓ per l'agente i ;
2. un vettore di consumo $x_i = (x_{1i}, x_{2i}) \in \mathbb{R}_+^2$;
3. una relazione di preferenza $\succeq_i$ sui vettori di consumo.

La dotazione totale (ovvero nell'economia) della commodity ℓ è data dalla $\bar{\omega}_\ell = \omega_{\ell 1} + \omega_{\ell 2}$ che è supposta positiva per entrambe le commodity. Una allocazione è un assegnamento di vettori di consumo in $\mathbb{R}_+^2$ a ciascun agente per cui è un elemento di $\mathbb{R}_+^4$ ovvero si ha $x \in \mathbb{R}_+^4$ con

$$x = (x_1, x_2) = ((x_{11}, x_{21})(x_{12}, x_{22})) \quad (292)$$

che deve sottostare a dei vincoli di ammissibilità:

$$x_{\ell 1} + x_{\ell 2} \leq \bar{\omega}_\ell \quad \ell = 1, 2 \quad (293)$$

ovvero il consumo totale di un bene non può superare la sua disponibilità totale (sotto l'ipotesi implicita della *free disposal* delle singole commodity). Tali allocazioni (che soddisfano la (293)) sono dette non sprecone e sono rappresentabili mediante la scatola di Edgeworth (nel seguito *EB*) illustrata in figura 20. Nella *EB* si hanno due sistemi di riferimento cartesiani: uno per il consumatore 1 con origine in O_1 e l'altro per il consumatore 2 con origine in O_2 . Il primo è tracciato nel modo usuale, l'altro è tracciato con una rotazione di 180 gradi in senso antiorario e due traslazioni in modo che le intersezioni degli assi individuino una scatola le cui ampiezze sono le dotazioni totali dei singoli beni ovvero in orizzontale $\bar{\omega}_1$ e in verticale $\bar{\omega}_2$.

Come si vede anche dalla figura 20, per il consumatore 1 l'asse delle ascisse misura quantità del bene 1 (dotazione o consumo) mentre l'asse delle ordinate misura quantità del bene 2 (dotazione o consumo). In modo simile si ragiona per il consumatore 2 tenendo conto della diversa origine e dei diversi orientamenti degli assi cartesiani.

In figura 20, ad esempio, sono presenti due punti:

1. il primo, ω , individua un paniere di dotazioni per i due consumatori,
2. il secondo, x , individua un vettore di consumo per i due consumatori.

Per il primo è facile vedere che si ha:

1. $\bar{\omega}_1 = \omega_{11} + \omega_{12}$

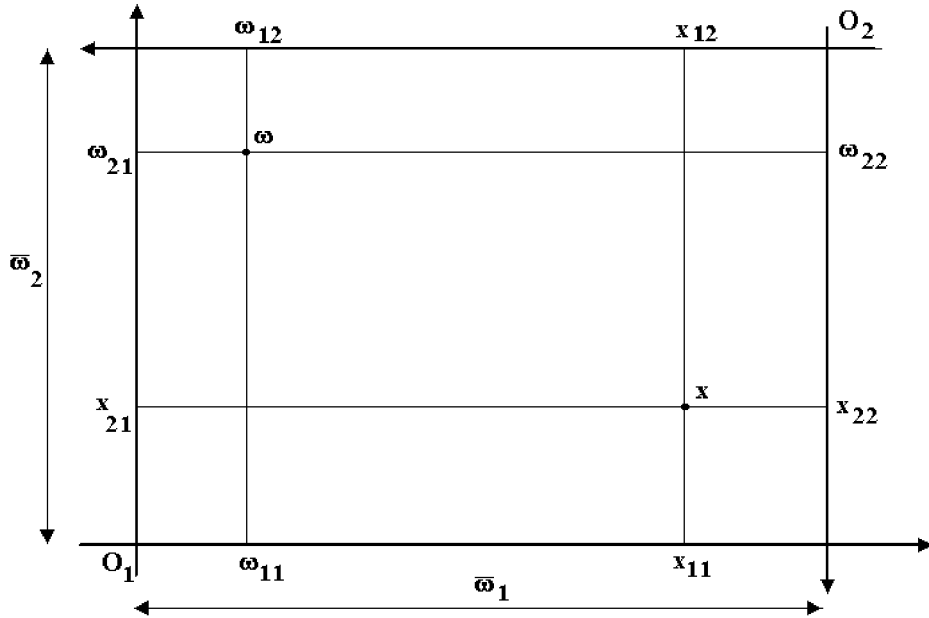


Figura 20: Scatola di Edgeworth (dettagli nel testo)

$$2. \bar{\omega}_2 = \omega_{21} + \omega_{22}$$

mentre x è una allocazione non sprecona perchè si ha:

$$1. x_{12} = \bar{\omega}_1 - x_{11},$$

$$2. x_{22} = \bar{\omega}_2 - x_{21}.$$

La ricchezza dei consumatori non è una variabile esogena ma dipende dai prezzi di mercato e dalle dotazioni dei consumatori stessi. Dato il vettore dei prezzi $p = (p_1, p_2)$ la ricchezza di un consumatore è data, quindi, dal valore di mercato della sua dotazione di beni ovvero è data da:

$$p \cdot \omega_i = p_1 \omega_{1i} + p_2 \omega_{2i} \quad (294)$$

Dato il vettore dotazione di un consumatore ω_i si può definire l'insieme di bilancio come dipendente solo dal vettore dei prezzi:

$$B_i(p) = \{x_i \in \mathbb{R}_+^2 : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\} \quad (295)$$

L'insieme di bilancio per i due consumatori è facilmente rappresentabile nella *EB*. Per fare ciò, dato un punto ω che rappresenta un paniere di dotazioni,

è sufficiente tracciare per esso una retta di pendenza pari a $-\frac{p_1}{p_2}$ in modo da individuare gli insiemi di bilancio dei due consumatori nelle due aree tratteggiate: l'area inferiore per il consumatore 1 e l'area superiore per il consumatore 2 (vedi la figura 21).

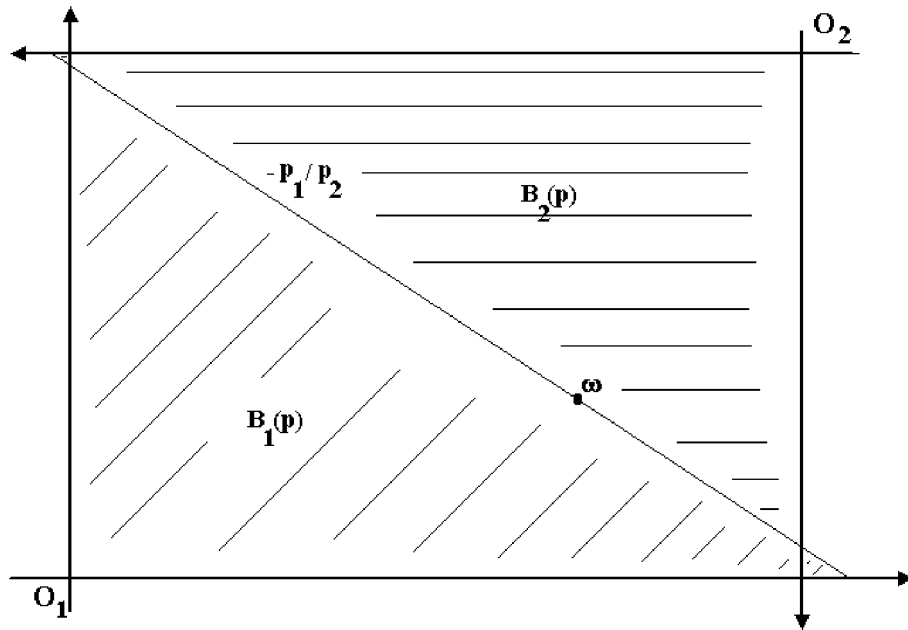


Figura 21: Insiemi di bilancio (dettagli nel testo)

Si fa notare che le sole allocazioni sulla linea di bilancio sono alla portata di entrambi i consumatori per un dato vettore dei prezzi p . Nella EB è possibile rappresentare anche le relazioni di preferenza $\succeq_i$ di ciascun consumatore i , relazioni che si suppongono:

1. strettamente convesse,
2. continue,
3. fortemente monotone.

Le relazioni $\succeq_i$ sono rappresentate nella EB mediante le **curve di indifferenza** (vedi la figura 22). In tale figura sono mostrate le curve di indifferenza (sulle quali la funzione utilità dei soggetti ha valori costanti) di 1 con la concavità e la direzione di crescita della preferenza riferite all'origine O_1 e all'opportuno orientamento degli assi. Un discorso analogo, solo con

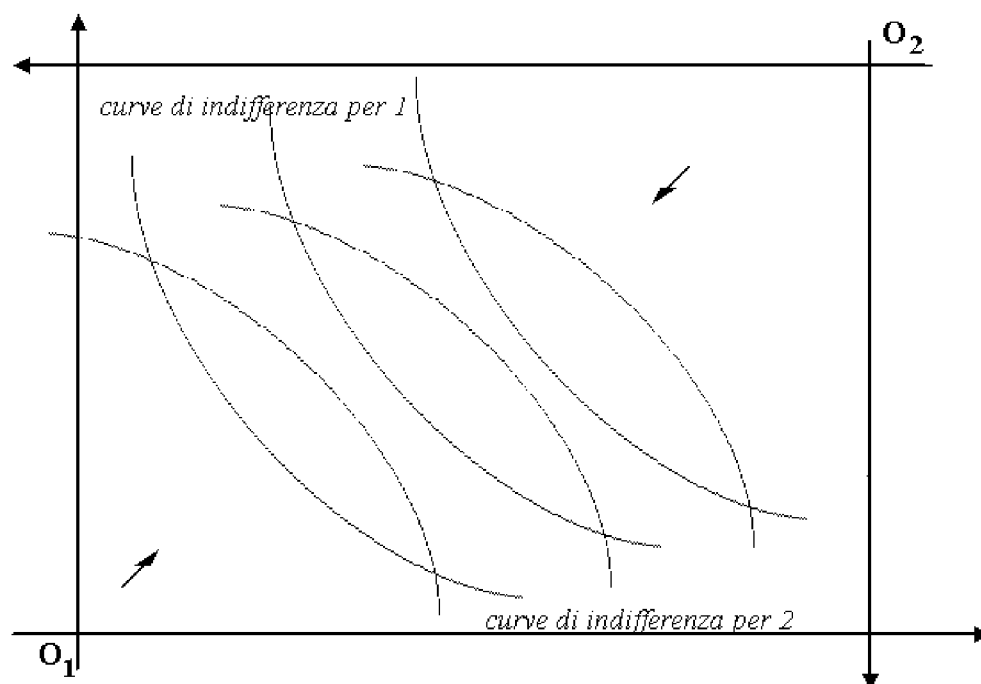


Figura 22: Curve di indifferenza (dettagli nel testo)

riferimento ad O_2 e agli assi ad esso relativi, vale per 2.

Dato un vettore dei prezzi p in base al quale si determina un insieme di bilancio B_i è possibile determinare il vettore di consumo ottimo per un agente determinando il punto in cui le sue curve di indifferenza sono tangenti alla retta che rappresenta l'equazione di bilancio $p \cdot x_i = p \cdot \omega_i$. Al variare del vettore dei prezzi p l'insieme di bilancio (e, di conseguenza, la retta di bilancio) variano, con la retta di bilancio che ruota attorno al punto ω (vedi la figura 21), in modo che il punto che rappresenta il vettore di consumo per un agente tracci nel piano una curva, detta **curva dell'offerta** per il consumatore i , che passa per il punto ω (che rappresenta un vettore di consumo ammissibile sia per 1 sia per 2). Si fa notare (vedi la figura 21) che la curva di bilancio ha pendenza pari a $-\frac{p_1}{p_2}$ e che intercetta gli assi in $\frac{p \cdot \omega}{p_1}$ e $\frac{p \cdot \omega}{p_2}$. Se si considerano i due consumatori, ciascuno con il suo vettore di consumo, si ha che i due vettori devono essere compatibili. se, ad esempio la richiesta totale del bene 2 eccede la sua offerta totale $\bar{\omega}_2$ mentre l'opposto accade per il bene 1 si ha che i due vettori di consumo non sono compatibili. All'equilibrio, invece, si deve avere che tutta la disponibilità viene consumata in modo che l'offerta

di un bene equivalga alla sua domanda. Da tutto ciò segue una definizione di equilibrio Walrasiano o competitivo.

Definizione A.11 *Un equilibrio Walrasiano o competitivo in una economia descritta da una EB è rappresentato da un vettore dei prezzi p^* e da una allocazione $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ nella EB tale che per entrambi gli agenti sia*

$$x_i^* \succeq_i x'_i \forall x'_i \in B_i(p^*) \quad (296)$$

In caso di equilibrio walrasiano si ha un vettore dei prezzi all'equilibrio p^* cui corrisponde una allocazione all'equilibrio $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ in cui la domanda di un consumatore per un bene è soddisfatta dall'offerta dell'altro per lo stesso bene. All'equilibrio le curve di offerta dei due consumatori si intersecano e ciò vale in generale: tutti i punti di intersezione delle curve di offerta dei consumatori (per una allocazione diversa dal paniere delle dotazioni iniziali) sono punti di equilibrio. In più, all'equilibrio le curve di indifferenza dei due consumatori sono fra loro tangenti. Se così non fosse l'allocazione non sarebbe Pareto ottima perchè entrambi gli agenti potrebbero migliorare la propria situazione. Si noti come la domanda di ciascun consumatore sia omogenea di grado 0 nel vettore dei prezzi $p = (p_1, p_2)$ ovvero se i prezzi raddoppiano lo stesso accade alla ricchezza equivalente (in termini di dotazione) del consumatore e l'insieme di bilancio non varia. Da tutto ciò segue che se $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ è un vettore di prezzi all'equilibrio e se si ha $\alpha > 0$ allora anche $\alpha p^* = (\alpha p_1^*, \alpha p_2^*)$ è un vettore di prezzi all'equilibrio per cui all'equilibrio contano solo i prezzi relativi ovvero i rapporti $\frac{p_1^*}{p_2^*}$. La EB è uno strumento semplice ma, allo stesso tempo, potente e consente di rappresentare tutti i fenomeni e le proprietà relative all'equilibrio generale in economie di puro scambio. In questa sede molte questioni sono tralasciate (quali quelle relative alla esistenza e unicità degli equilibri walrasiani) e ci si limita ad esaminare solo alcune proprietà della EB e degli equilibri. La figura 23, ad esempio, illustra, nel caso in cui la EB sia un rettangolo (ovvero $\overline{\omega}_1 \neq \overline{\omega}_2$): in tal caso le rette della certezza dei due agenti non coincidono ma individuano una zona della EB al cui interno si situa la **curva dei contratti** ovvero il luogo dei punti di tangenza delle curve di indifferenza dei due consumatori su cui si collocano le allocazioni compatibili ottime. Nel caso in cui la EB è un quadrato (ovvero $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2$) le curve della certezza coincidono fra di loro e con la curva dei contratti che risulta essere una retta.

In merito alle proprietà degli equilibri walrasiani si può prendere in esame la nozione di **Pareto ottimalità**.

Definizione A.12 (Pareto ottimalità) *Un esito economico è Pareto ottimo o Pareto efficiente se non esiste un esito alternativo ammissibile in cui*

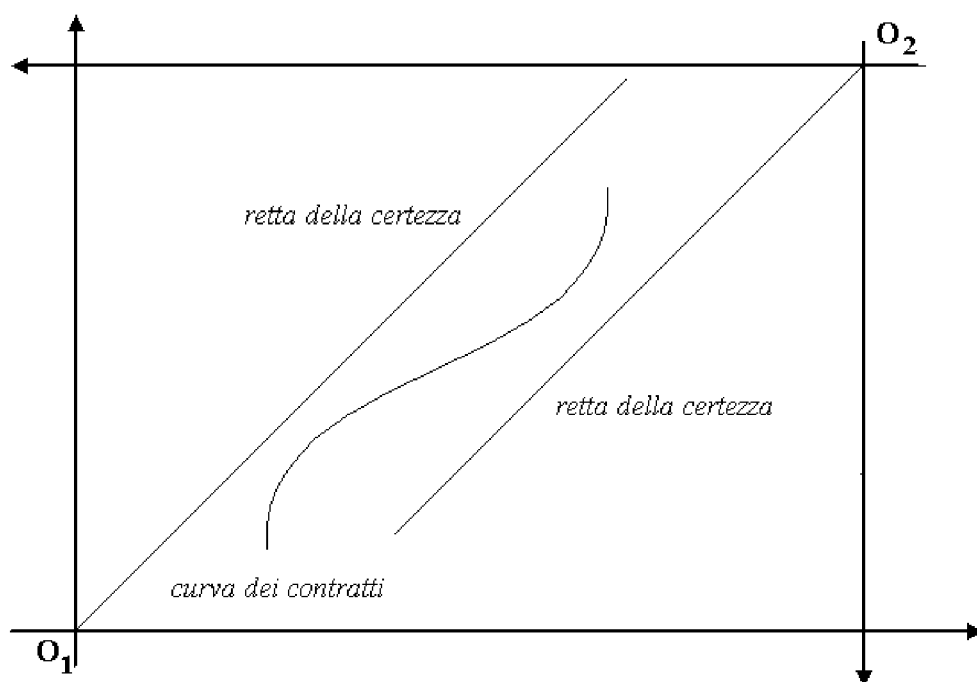


Figura 23: Curve di certezza e dei contratti (dettagli nel testo)

ogni agente dell'economia è altrettanto ricco e alcuni sono più ricchi ovvero se nessun agente può, in modo autonomo e indipendente dagli altri, migliorare strettamente la sua posizione.

Nel caso della *EB* ovvero di una economia di puro scambio con due soli agenti si ha la seguente definizione.

Definizione A.13 *Una allocazione x nella *EB* è Pareto ottima o Pareto efficiente se non esiste un'altra allocazione x' nella *EB* con $x'_i \succeq x_i$ per $i = 1, 2$ e $x'_i \succ x_i$ per qualche i*

Nel caso di una allocazione non Pareto ottima (vedi il punto x_0 in figura 24) per la *EB* le curve di indifferenza dei due agenti non sono tangenti in modo che entrambi possano migliorare mentre, nel caso di una allocazione Pareto ottima (vedi il punto x_1 in figura 24), le curve sono fra loro tangenti.

Nel primo caso ogni punto all'interno della regione tratteggiata rappresenta una allocazione ammissibile che rende entrambi gli agenti più ricchi di quanto siano in x_0 . Nel caso del punto x_1 , d'altra parte, nessuno dei due può migliorare mantenendola compatibilità per cui l'allocazione è Pareto ottima dal

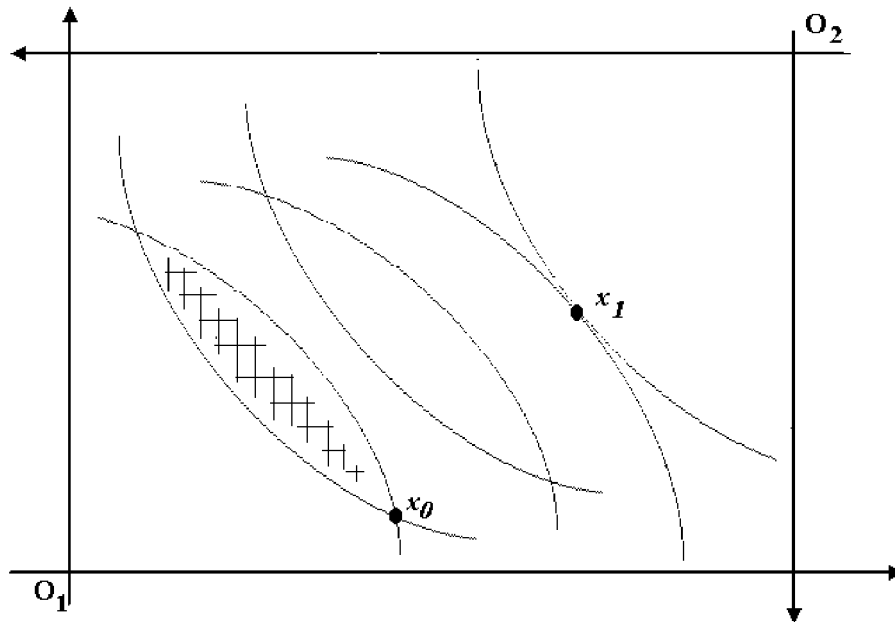


Figura 24: Allocations Pareto ottime e no (dettagli nel testo)

momento che l'intersezione degli insiemi $\{x'_i \in \mathbb{R}_+^2 : x'_i \succeq_i x_i\}$ per $i = 1, 2$ contiene solo il punto x_1 . L'ipotesi di tangenza delle curve di indifferenza nel caso di allocations Pareto ottime presuppone che tali curve siano "smooth" ovvero siano $\mathcal{C}^2$.

L'insieme di tutte le allocations Pareto ottime è noto come insieme di Pareto. Si definisce, inoltre, la **curva dei contratti** come il luogo dei punti di tangenza delle curve di indifferenza dei due agenti ovvero l'insieme dei punti in cui nessuno dei due può migliorare la propria posizione. Sulla falsariga di [MCWG95]) in chiusura di sezione si fa notare che:

1. qualunque allocatione x^* di equilibrio walrasiano appartiene necessariamente all'insieme di Pareto ovvero allocations walrasiane danno luogo ad allocations Pareto ottime (primo teorema fondamentale della teoria del benessere),
2. in base al secondo teorema fondamentale della teoria del benessere vale anche l'inverso: sotto ipotesi di convessità della funzione utilità un agente può raggiungere una qualunque allocatione Pareto ottima redistribuendo in modo appropriato la propria ricchezza con somma globale e quindi lasciando che il mercato segua il suo corso,

3. se le preferenze dei due consumatori nella EB sono continue, convesse e fortemente monotone ogni allocazione Pareto ottima è sostenibile come un equilibrio con trasferimenti.

A.2.3 Equilibrio generale in condizioni di incertezza: introduzione

Il punto di partenza è quello di formalizzare l'incertezza per mezzo di **stati del mondo** introducendo l'idea chiave di **commodity o bene contingente** come di una commodity la cui consegna dipende dal realizzarsi di uno stato del mondo. Si utilizzano tali concetti per definire l'equilibrio di **Arrow-Debreu** come un equilibrio walrasiano in cui sono scambiate commodity contingenti. Come risultato generale si ha che un equilibrio Arrow-Debreu si traduce in una allocazione del rischio che è Pareto ottima.

Si può dimostrare poi che, sotto l'ipotesi di aspettative razionali, un equilibrio Arrow-Debreu può essere implementato combinando il commercio di un certo insieme ristretto di commodity contingenti con il commercio *spot* che si ha dopo la risoluzione dell'incertezza. Una generalizzazione è costituita dall'equilibrio di *Radner* in cui, invece di commerciare commodity contingenti prima della risoluzione dell'incertezza, gli agenti commerciano *titoli*. Di nuovo la materia è vasta e complessa e, in questa sede, verrà esaminata per *sommissimi* capi, rimandando a [MCWG95]), capitolo 19 per ulteriori dettagli *error free*.

A.2.4 Equilibrio generale in condizioni di incertezza: economia di mercato con commodity contingenti

Si suppone di avere:

1. L commodity,
2. I consumatori,
3. J ditte

e che

1. tecnologie,
2. dotazioni,
3. preferenze

sono ora *incerte* ovvero dipendono da *stati del mondo* o *stati di natura*.

Definizione A.14 *Uno **stato del mondo** è la descrizione completa di un possibile esito di incertezza la cui descrizione è sufficientemente accurata in modo che due stati qualunque del mondo siano mutuamente esclusivi.*

Nota A.2 *L'insieme degli stati del mondo S è dato, la sua cardinalità finita è indicata con S e i suoi elementi con s e sono individuati da un indice $s = 1, \dots, S$. Il contesto, in generale, permette di disambiguare i simboli s e S .*

Definizione A.15 *Si introducono i concetti chiave di:*

1. *commodity contingente,*
2. *vettore o matrice delle commodity contingenti.*

*Dati una commodity fisica $\ell = 1, \dots, L$ e uno stato s , una **commodity contingente** è il diritto di ricevere una unità del bene ℓ se lo stato s si verifica e 0 altrimenti. Da tale definizione discende la definizione di **vettore delle commodity contingenti** come:*

$$x = (x_{11}, \dots, x_{L1}, \dots, x_{1S}, \dots, x_{LS}) \in \mathbb{R}^{LS} \quad (297)$$

*rappresentabile anche come una **matrice** in $\mathbb{R}^{LS}$. Il vettore x rappresenta l'insieme delle commodity contingenti nello stato s .*

Nota A.3 *Un **vettore delle commodity contingenti** può essere visto come un insieme di L v.a. la ℓ -esima delle quali è $(x_{\ell 1}, \dots, x_{\ell S})$.*

Dati i concetti suddetti si possono descrivere le caratteristiche degli agenti in funzione degli stati del mondo. Come prima cosa la dotazione dell'agente i , $i = 1, \dots, I$, in precedenza espressa come e^i , è un vettore delle commodity contingenti:

$$\omega_i = (\omega_{11i}, \dots, \omega_{L1i}, \dots, \omega_{1Si}, \dots, \omega_{LSi}) \in \mathbb{R}^{LS} \quad (298)$$

in cui i tre pedici indicano che se lo stato s si verifica allora la dotazione dell'agente i è $(\omega_{1si}, \dots, \omega_{Lsi}) \in \mathbb{R}^L$. Anche le preferenze dell'agente i possono essere funzione dello stato del mondo per cui le si definisce sui vettori delle commodity contingenti in modo che alle preferenze dell'agente i sia associabile una relazione di preferenza razionale $\succeq_i$ definita sul vettore di consumo $X_i \subset \mathbb{R}^L S$. Tali preferenze sono di tipo **ex-ante** dal momento che le v. a. che descrivono i possibili piani di consumo sono valutate all'istante $t = 0$ in cui l'agente ha solo una conoscenza probabilistica degli stati del mondo al tempo $t = 1$. Lo stesso vale per i piani di produzione contingenti, sui quali

non ci soffermiamo oltre (vedi [MCWG95]), pagina 689), mentre per la proprietà delle azioni si può vedere come sia più semplice pensarla indipendente dallo stato.

nella situazione rappresentata il tempo non ha un ruolo formale esplicito sebbene, in realtà gli stati del mondo si rivelino con il passare del tempo, da una situazione in cui sono sconosciuti ad una in cui sono perfettamente noti (di solito l'istante finale T in cui una economia multiperiodale termina).

A.2.5 Equilibrio Arrow-Debreu

Una economia nella quale l'incertezza ha un ruolo può essere descritta per mezzo di un insieme di stati del mondo S , un insieme di consumo $X_i \in \mathbb{R}^{LSW}$ e un vettore dotazione $\omega_i \in \mathbb{R}^{LS}$ per ogni agente i caratterizzato da una relazione di preferenza $\succeq_i$ su X_i e ciò per ciascuno dei consumatori i .

Il passo successivo è quello di supporre che ci sia un mercato per ogni commodity contingente ℓ_s . Tali mercati sono aperti all'istante $t = 0$ in cui gli agenti non conoscono il vero stato del mondo e il prezzo della commodity è p_{ℓ_s} : oggetto dello scambio in $t = 0$ per il bene contingente ℓ_s è il fatto di scambiare il bene fisico ℓ se si verifica lo stato s . Ciò richiede che tutti gli agenti siano in grado di riconoscere il verificarsi dello stato s -esimo. Sotto tali ipotesi si ha un'equilibrio che si dice di *Arrow – Debreu*.

Definizione A.16 (Equilibrio Arrow-Debreu) *Data una allocazione*

$$(x_1^*, \dots, x_I^*) \in X_1, \dots, X_I \subset \mathbb{R}^{LSI} \quad (299)$$

e un sistema di prezzi per le commodity contingenti

$$p = (p_{11}, \dots, p_{LS}) \in \mathbb{R}^{LS} \quad (300)$$

questi sono un equilibrio di Arrow-Debreu se valgono le seguenti condizioni:

1. *per ogni i x_i^* è ottima per $\succeq_i$ sull'insieme di bilancio $\{x_i \in X - i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}$,*
2. $\sum_i x_i^* = \sum_i \omega_i$.

Nel conteso in cui ci siamo messi le assunzioni di convessità della funzione utilità assumono il significato di una misura dell'avversione al rischio. Una applicazione della Pareto ottimalità all'equilibrio di Arrow-Debreu stabilisce che la possibilità di scambiare commodity contingenti si traduce, all'equilibrio, in una allocazione efficiente del rischio.

Esempio A.1 *Nel caso di una economia di scambio con:*

1. due agenti,
2. un bene,
3. due stati del mondo

si può usare la EB dal momento che si hanno esattamente due beni contingenti. Se si ha $\omega_1 = (1, 0)$ e $\omega_2 = (0, 1)$ e una funzione utilità del tipo

$$\pi_{1i}u_i(x_{1i}) + \pi_{2i}u_i(x_{2i}) \quad (301)$$

in cui (π_{1i}, π_{2i}) sono le probabilità dell'agente i nei due stati, poichè $\omega_1 + \omega_2 = (1, 1)$ si ha che non si ha rischio aggregato e lo stato del mondo che si verifica determina solo quale agente riceve una dotazione di uno dei due beni. Se le probabilità sono le stesse per i due consumatori $\pi_{11} = \pi_{12}$ l'insieme di Pareto coincide con la diagonale della EB (che è un quadrato) in cui i tassi di sostituzione dei due beni sono uguali. Nel caso di rischio aggregato le due diagonali non coincidono (la EB è un rettangolo) per cui l'insieme di Pareto (la curva dei contratti) si trova nella zona delimitata dalle diagonali (le rette della certezza).

L'equilibrio di Arrow – Debreau non è molto realistico perchè si basa sull'assunto che tutti gli scambi avvengano simultaneamente e prima della risoluzione dell'incertezza (ovvero al tempo $t = 0$). In realtà gli scambi si verificano sequenzialmente nel tempo e, di solito, al rivelarsi di nuove informazioni: è necessario introdurre modelli sequenziali dello scambio in modo da reinterpretare l'equilibrio di Arrow-Debreau come un processo che si svolge nel tempo.

Si fanno le seguenti assunzioni:

1. economia di puro scambio,
2. $X_i = \mathbb{R}_+^{LS}$ per ogni agente i ,
3. due istanti di tempo:
 - (a) $t = 0$ assenza totale di informazioni,
 - (b) $t = 1$ l'incertezza si risolve completamente e lo stato del mondo è noto,
4. assenza di consumo a $t = 0$.

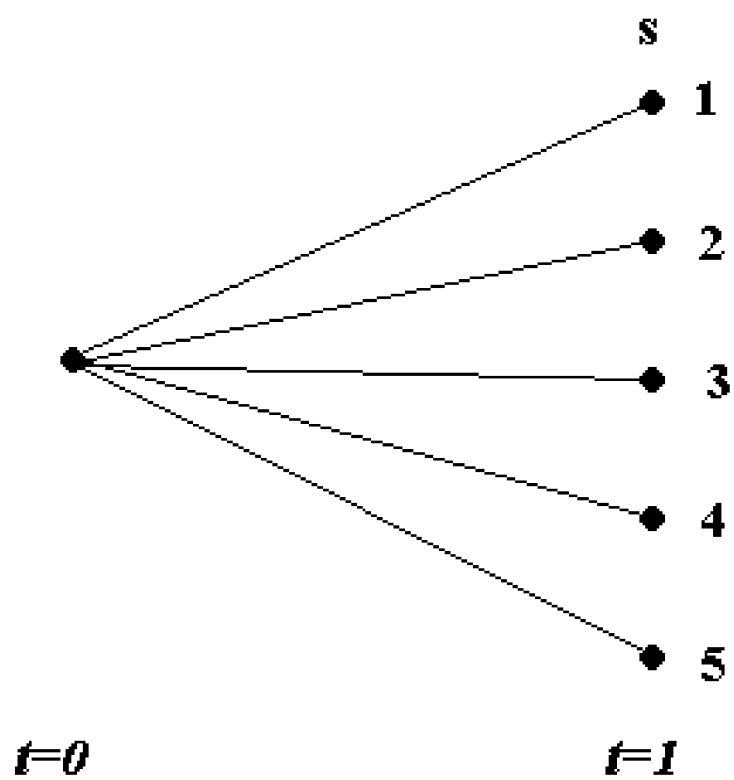


Figura 25: Economia biperiodale (dettagli nel testo)

Riferimenti bibliografici

- [Bar03] Emilio Barucci. *Financial Markets Theory. equilibrium, Efficiency and Informaation*. Springer, 2003.
- [MCWG95] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.