

Appunti del corso di “**Teoria dei Giochi**”

Lorenzo Cioni

Dottorato di Ricerca in Matematica per le Decisioni Economiche

a.a. 2004/2005

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa

e-mail: lcioni@di.unipi.it

Sommario

Questi appunti contengono un sunto delle lezioni di **Teoria dei Giochi** tenute dal Professor Menicucci nei mesi di Febbraio e Marzo del 2005 nell'ambito dei corsi del primo anno del Dottorato di Ricerca in *Matematica per le Decisioni Economiche*, sunto integrato da osservazioni ed aggiunte personali. Ovviamente *all errors are mine*.

Attenzione: versione preliminare e in corso di revisione

Ultima revisione: 21 Settembre 2006

Indice

1	Prima Lezione	7
1.1	La rappresentazione dei giochi	8
1.2	Informazione completa e perfetta	12
1.3	Formalizzazione di Γ_E	14
1.4	Le strategie	19
1.5	Rappresentazione in forma normale o strategica	20
2	Seconda Lezione	26
2.1	Dominanza stretta e debole	26
2.2	Equilibrio di Nash	29
2.3	Giochi paradigmatici	32
2.4	Strategie miste	34
2.5	Cenni alle lotterie	36
2.6	Uso delle strategie miste	37
2.7	Parentesi matematica	43
3	Terza Lezione	47
3.1	Commenti al Teorema di Kakutani	47
3.2	Applicazioni del concetto di NE	52
3.2.1	Monopolio	52
3.2.2	Duopolio	55
3.3	Esercizi	66
3.3.1	Esercizio 1	66
3.3.2	Esercizi (cenni) 2, 3 e 4	71
4	Quarta Lezione	76
4.1	Giochi a informazione incompleta	76
4.2	Rappresentazione dei giochi a <i>informazione incompleta</i>	81
4.3	Equilibri di Nash in giochi a <i>informazione incompleta</i>	83
4.4	Altre definizioni di equilibrio	87
4.5	Asta di primo prezzo (inizio)	88
5	Quinta Lezione	93
5.1	Asta di primo prezzo (continuazione)	93
5.2	Altri tipi di aste	96
5.2.1	Aste “all pay”	96
5.2.2	Aste di secondo prezzo	96
5.3	Giochi dinamici	98
5.4	Esercizi	107

5.4.1	Esercizio 1	107
5.4.2	Esercizio 2	110
5.4.3	Esercizio 3 (cenni)	111
5.4.4	Esercizio 4	113
6	Sesta Lezione	115
6.1	Backward induction	115
6.2	Giochi finitamente ripetuti	122
6.3	Giochi a infinite ripetizioni	125
6.4	Modelli di scambio	130
6.4.1	Caso di un 1 venditore e 1 compratore	130
7	Settima Lezione	146
7.1	Esercizi	146
7.1.1	Esercizio 1	146
7.1.2	Esercizio 2: Asta di secondo prezzo	149
7.1.3	Esercizio 3	150
7.1.4	Esercizio 4	153
7.1.5	Esercizio 5: Asta “all pay”	157
7.2	Distribuzione continua dei tipi di compratore	160
8	Ottava Lezione	168
8.1	Esempio	173
8.2	Di nuovo sulle Aste	175
8.2.1	Asta inglese	176
8.2.2	Asta inglese con $r \neq 0$	177
8.2.3	Asta di secondo prezzo con $r \neq 0$	182
8.2.4	Asta di primo prezzo con $r \neq 0$	182
9	Nona Lezione	184
9.1	Commenti sulle aste	184
9.1.1	Asta di primo prezzo	184
9.1.2	Asta di primo prezzo con ipotesi semplificative	185
9.1.3	Asta diretta D	187
9.1.4	Principio di rivelazione	189
9.1.5	Asta di primo prezzo e equilibrio $\beta(v)$	193
9.1.6	Asta di secondo prezzo	193
9.1.7	Considerazioni generali e conclusive	194
	Riferimenti Bibliografici	197

Elenco delle figure

1	<i>Esempio di gioco di contrattazione in forma estesa (dettagli nel testo)</i>	11
2	<i>Nuova versione del gioco di contrattazione in forma estesa (dettagli nel testo)</i>	12
3	<i>Rappresentazioni in forma estesa (dettagli nel testo)</i>	13
4	<i>Informazione imperfetta (dettagli nel testo)</i>	15
5	<i>Esempio di dominanza (dettagli nel testo)</i>	18
6	<i>Strategie (dettagli nel testo)</i>	20
7	<i>Ancora sulle strategie (dettagli nel testo)</i>	22
8	<i>Forma normale o strategica (dettagli nel testo)</i>	23
9	<i>Esempio di gioco a mosse simultanee (dettagli nel testo)</i>	24
10	<i>Esempio di gioco a mosse simultanee (dettagli nel testo)</i>	26
11	<i>Esempio di dominanza debole (dettagli nel testo)</i>	28
12	<i>Esempio di equilibrio di Nash (dettagli nel testo)</i>	30
13	<i>Esempio di equilibrio di Nash (dettagli nel testo)</i>	30
14	<i>Ancora sugli equilibri di Nash (dettagli nel testo)</i>	31
15	<i>Ancora sugli equilibri di Nash (dettagli nel testo)</i>	32
16	<i>Giochi paradigmatici (dettagli nel testo)</i>	33
17	<i>Strategie miste (dettagli nel testo)</i>	35
18	<i>Strategie miste (dettagli nel testo)</i>	39
19	<i>Uso delle strategie miste (dettagli nel testo)</i>	40
20	<i>Corrispondenze (dettagli nel testo)</i>	44
21	<i>Corrispondenze (dettagli nel testo)</i>	45
22	<i>Curve di livello (dettagli nel testo)</i>	51
23	<i>Curva di domanda (dettagli nel testo)</i>	53
24	<i>Prezzi e quantità sulla curva di domanda (dettagli nel testo)</i>	54
25	<i>Curva dei profitti (dettagli nel testo)</i>	57
26	<i>Ancora sulla curva dei profitti (dettagli nel testo)</i>	61
27	<i>Prezzi ed equilibri (dettagli nel testo)</i>	63
28	<i>Prezzi ed equilibri (dettagli nel testo)</i>	64
29	<i>Curve di domanda (dettagli nel testo)</i>	65
30	<i>Forma normale (dettagli nel testo)</i>	67
31	<i>Supporti per 1 (dettagli nel testo)</i>	70
32	<i>Esercizio 2 (dettagli nel testo)</i>	71
33	<i>Variante della forma estesa dell'esercizio 2 (dettagli nel testo)</i>	72
34	<i>Esercizio 3 (dettagli nel testo)</i>	74
35	<i>Esercizio 4 (dettagli nel testo)</i>	75
36	<i>Dominanza stretta (dettagli nel testo)</i>	76
37	<i>Battaglia dei sessi con segnali privati (dettagli nel testo)</i>	78

38	<i>Battaglia dei sessi con Natura (dettagli nel testo)</i>	81
39	<i>Battaglia dei sessi: metastrategie e payoff (dettagli nel testo)</i>	86
40	<i>Andamento possibile di β (dettagli nel testo)</i>	90
41	<i>Asta di primo prezzo (dettagli nel testo)</i>	94
42	<i>(Dettagli nel testo)</i>	97
43	<i>Esempio di gioco dinamico (dettagli nel testo)</i>	98
44	<i>Sottogiochi e non (dettagli nel testo)</i>	100
45	<i>Sottogiochi propri e non (dettagli nel testo)</i>	101
46	<i>NE e SPNE (dettagli nel testo)</i>	102
47	<i>Sottogioco con SPNE (dettagli nel testo)</i>	103
48	<i>Gioco con sottogioco e SPNE (dettagli nel testo)</i>	105
49	<i>Giochi ridotti e SPNE (dettagli nel testo)</i>	106
50	<i>Strategia mista (dettagli nel testo)</i>	107
51	<i>Esercizio 1: forma estesa (dettagli nel testo)</i>	108
52	<i>Esercizio 1: forma normale (dettagli nel testo)</i>	109
53	<i>Esercizio 2: forma estesa (a) sottogioco proprio (b) e gioco ridotto (c) (dettagli nel testo)</i>	110
54	<i>Esercizio 2: forma normale (dettagli nel testo)</i>	111
55	<i>Esercizio 3: forma estesa (dettagli nel testo)</i>	112
56	<i>Esercizio 3: forma normale (dettagli nel testo)</i>	112
57	<i>Sottogiochi terminali (dettagli nel testo)</i>	116
58	<i>Sottogiochi terminali con riduzioni (dettagli nel testo)</i>	117
59	<i>Sottogiochi terminali con riduzioni (dettagli nel testo)</i>	119
60	<i>Gioco con indifferenze (dettagli nel testo)</i>	120
61	<i>Gioco del centipede (dettagli nel testo)</i>	121
62	<i>Gioco ripetuto (dettagli nel testo)</i>	124
63	<i>Gioco ripetuto: convenienza della violazione (dettagli nel testo)</i>	128
64	<i>$v(q)$ (dettagli nel testo)</i>	132
65	<i>(Dettagli nel testo)</i>	142
66	<i>Variazione del profitto (Dettagli nel testo)</i>	144
67	<i>Curve di livello (Dettagli nel testo)</i>	145
68	<i>Esercizio 1 (dettagli nel testo)</i>	146
69	<i>Esercizio 1: andamento di π_1 (dettagli nel testo)</i>	147
70	<i>Esercizio 3: forma estesa (dettagli nel testo)</i>	151
71	<i>Esercizio 3: forma normale (dettagli nel testo)</i>	151
72	<i>Esercizio 4 (dettagli nel testo)</i>	153
73	<i>Esercizio 4: andamenti delle derivate (dettagli nel testo)</i>	156
74	<i>Esercizio 4: concavità (dettagli nel testo)</i>	157
75	<i>Esercizio 4: equilibrio (dettagli nel testo)</i>	158
76	<i>Andamenti di J (dettagli nel testo)</i>	172
77	<i>Esempio (dettagli nel testo)</i>	173

78	<i>Asta inglese con $r \neq 0$ (dettagli nel testo)</i>	178
79	<i>Ricavi del venditore (dettagli nel testo)</i>	179
80	$\hat{r} = a$ (dettagli nel testo)	181
81	β e β^r (dettagli nel testo)	183

Elenco delle tabelle

1	Possibili supporti per 1	68
2	smallcaption	117

1 Prima Lezione

Oggetto della **Teoria dei Giochi** (*TdG* nel seguito) sono i *giochi* per cui il primo passo è quello di procedere ad una loro definizione e formalizzazione.

Definizione 1.1 (Prima definizione) Un **gioco** è una situazione di **interazione strategica** fra almeno due giocatori che si comportano sulla base di **regole** conosciute da tutti i giocatori.

In un gioco, pertanto, quello che ogni giocatore guadagna o perde dipende dalle sue azioni e da quelle degli altri che operano nello stesso contesto.

Definizione 1.2 (Prima classificazione) I giochi sono generalmente classificati come di due tipi:

1. giochi **non cooperativi** in cui l'unità elementare è il **giocatore** contrapposto agli altri,
2. giochi **cooperativi** in cui l'unità elementare sono le **coalizioni di giocatori** formate sulla base di patti vincolanti e contrapposte ad altre coalizioni.

Nel seguito vedremo solo giochi del primo tipo.

Esempio 1.1 Si hanno:

1. **giochi di mercato** fra imprese,
2. **giochi di contrattazione** fra impresa e sindacato,
3. **aste** fra più partecipanti in competizione.

Non si ha una situazione descrivibile con un gioco in tutti i casi in cui si ha un solo attore oppure un monopolista oppure si esamina il comportamento di un agente, inteso in senso lato, rispetto ad un ambiente passivo anche se non deterministico. Non sono giochi, dal nostro punto di vista, tutte le situazioni il cui esito dipende solo dalla probabilità e sono prive di interazione strategica.

Definizione 1.3 (Seconda definizione) La **TdG** si compone di tre blocchi e precisamente:

1. **rappresentazione**, ovvero strumenti e metodi per rappresentare una situazione di interazione strategica in modo formale e/o grafico,

2. **teoria della decisione**, ovvero rappresentazione delle preferenze degli individui,
3. **teoria della soluzione**, ovvero metodi per capire come si comporteranno i giocatori e quali siano gli esiti possibili dei singoli giochi.

Lo scenario di base al cui interno si muove la *TdG* è quello di **decisioni in condizione di incertezza**.

1.1 La rappresentazione dei giochi

Definizione 1.4 *La rappresentazione di un gioco si compone dei seguenti elementi:*

1. un numero finito $n \geq 2$ di giocatori,
2. quali sono le mosse a disposizione dei singoli giocatori, se le mosse sono fatte **in successione** (**giochi a mosse successive**) oppure **simultaneamente** (**giochi a mosse simultanee** o **giochi dinamici**),
3. quali sono gli esiti del gioco ovvero, come vedremo meglio in seguito, quali sono le **utilità attese** dei singoli giocatori,
4. quali sono le preferenze sugli esiti, preferenze che chiariscono gli interessi dei giocatori.

Nota 1.1 *Se, al momento di muovere, un giocatore sa quali sono le mosse fatte dagli altri fino a quel momento ci si trova in una situazione di mosse successive mentre se tale informazione non è a sua disposizione ci si trova in una situazione di mosse simultanee anche se, fisicamente, le mosse avvengono in istanti di tempo successivi.*

Prima di proseguire si danno due esempi di giochi non cooperativi, il primo a mosse simultanee e il secondo a mosse successive.

Esempio 1.2 (Battaglia dei sessi) *I giocatori sono due, marito e moglie, e il loro scopo è passare una serata allo stadio (*S*) o al cinema (*C*) operando scelte:*

1. *indipendenti*,
2. *simultanee*.

La descrizione del gioco dà luogo a:

1. *ordine delle mosse: mosse simultanee;*
2. *informazioni disponibili al momento di eseguire la mossa: nessuna;*
3. *mosse a disposizione di ciascuno dei due soggetti: due, S o C ;*
4. *esiti: quattro, le combinazioni possibili delle mosse dei due giocatori;*
5. *preferenze: ordinamenti degli esiti in base ad una relazione $>$ ovvero “migliore di” o “preferito a”.*

Per il marito si ha:

$$\text{stadio_con_moglie} > \text{cinema_con_moglie} > \text{stadio_da_solo} > \text{cinema_da_solo} \quad (1)$$

mentre per la moglie si ha:

$$\text{cinema_con_marito} > \text{stadio_con_marito} > \text{cinema_da_sola} > \text{stadio_da_sola} \quad (2)$$

*ovvero si hanno ordinamenti diversi per i due giocatori. Il gioco **battaglia dei sessi** è un gioco in cui i due giocatori hanno interessi contrastanti ma sono invogliati a cooperare.*

Esempio 1.3 (Contrattazione) *Si hanno due giocatori che si devono spartire una unità di qualcosa. Il gioco è del tipo a **mosse successive** e la successione delle mosse è la seguente:*

1. *il primo giocatore offre di tenere $x \in [0, 1]$ per se e di dare $1 - x$ al secondo giocatore,*
2. *il secondo giocatore vede l'offerta e può **accettare** o **rifiutare**.*

Ripetendo l'analisi precedente si ha:

1. *ordine delle mosse: mosse successive;*
2. *informazioni disponibili al momento di eseguire la mossa: nessuna per il primo giocatore, mossa del primo giocatore per il secondo;*
3. *mosse a disposizione di ciascuno dei due soggetti: una (scelta da una infinità di mosse possibili) per il primo (x), due per il secondo (accetta o rifiuta);*

4. *esiti: se il secondo accetta si ha la spartizione in x e $1 - x$, se rifiuta entrambi non ottengono nulla;*
5. *preferenze: entrambi sono tanto più contenti quanto più prendono.*

Nota 1.2 *Nel gioco di contrattazione se il secondo giocatore¹ accetta, il gioco è a somma costante, dal momento che si ha $x + 1 - x = 1$.*

Nel caso della battaglia dei sessi se la moglie sceglie S e il marito sceglie C (cioè i due fanno scelte opposte posizionandosi nel punto peggiore delle rispettive scale di preferenza) il gioco presenta configurazioni in cui entrambi i giocatori possono migliorare. Ad esempio i due possono scegliere:

1. *il marito: cinema con moglie,*
2. *la moglie: stadio con marito.*

Un modo di rappresentare i giochi (e quindi descrivere gli elementi della Definizione 1.4 in modo formale) è quello di rappresentarli **in forma estesa** mediante alberi di decisione. La rappresentazione in forma estesa è indicata con Γ_E .

Si dà un esempio di rappresentazione in forma estesa del gioco di *contrattazione* nel caso semplificato in cui $x \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$ (vedi la figura 1). Come noto, il gioco di contrattazione è un gioco a mosse successive. Nella rappresentazione in figura 1 si ha un nodo iniziale che rappresenta la prima mossa del gioco, mossa eseguita dal primo giocatore che offre x : ogni ramo uscente da tale nodo è etichettato con una delle possibili mosse di 1. A partire da ognuno dei nodi intermedi che descrivono la situazione del gioco dopo la prima mossa si hanno le possibili mosse di 2 che può accettare (e gioca A) o rifiutare (e gioca R) l'offerta di 1. A seguito di tale mossa il gioco termina in una delle foglie in cui sono rappresentati i payoff (detti anche utilità o guadagni), nell'ordine, di 1 e di 2. In modo più formale si definiscono gli insiemi delle mosse possibili per i due giocatori (che vedremo essere legati alle loro strategie) come $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$ per 1 e $\{A, R\}$ per 2. È ovvio che qualora si abbia $x \in \mathbb{R}$ una rappresentazione come quella di figura 1 non è fattibile a meno di non ridurci ad un insieme finito di intervalli (una partizione di $\mathbb{R}$). Il gioco di contrattazione a due mosse successive, la cui rappresentazione è data in figura 1, può essere facilmente esteso nel modo illustrato dalla figura 2.

In tale figura viene rappresentata la situazione seguente:

¹Nel seguito, nei giochi a due giocatori, useremo 1 o r (riga o row) per individuare il primo giocatore e 2 o c (colonna o column) per individuare il secondo giocatore in tutti i casi in cui la cosa non crea ambiguità.

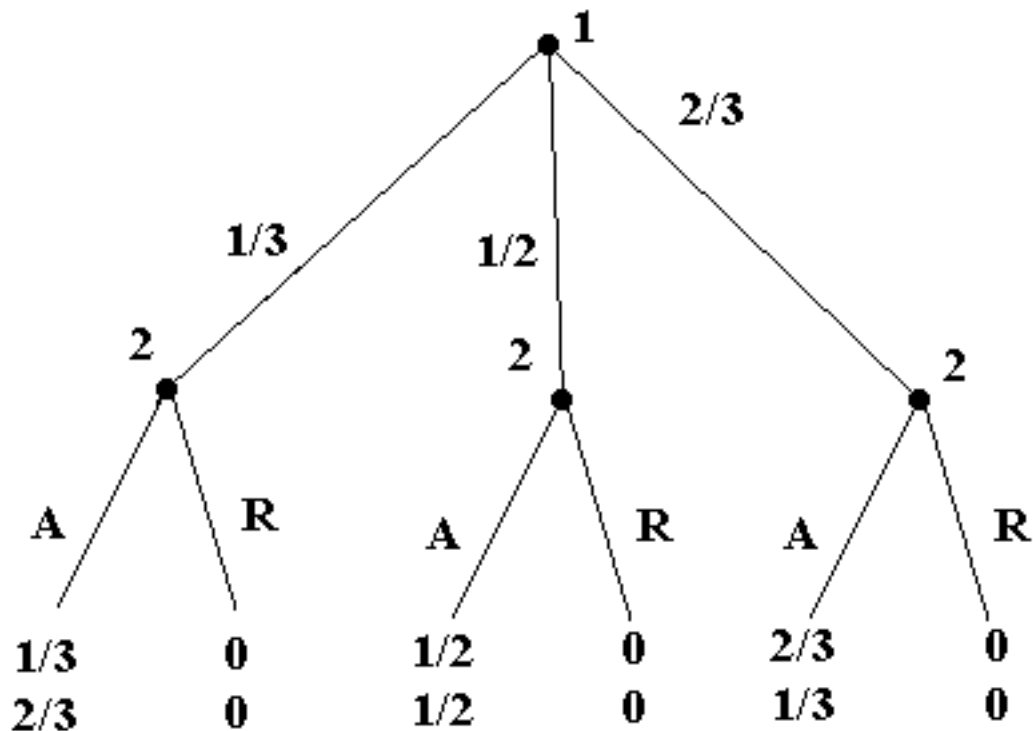


Figura 1: *Esempio di gioco di contrattazione in forma estesa (dettagli nel testo)*

1. il giocatore 1 fa una offerta che 2 può accettare (e il gioco termina come nel caso precedente) o rifiutare:
2. se il giocatore 2 rifiuta l'offerta di 1, 2 a sua volta fa una offerta che 1 può accettare o rifiutare:
 - (a) se accetta entrambi hanno una utilità non nulla,
 - (b) se rifiuta le utilità sono pari a 0 per entrambi.

In entrambi i casi, il gioco termina.

Nota 1.3 Dato un gioco rappresentato in forma estesa (Γ_E) si ha che:

1. ogni nodo dell'albero della rappresentazione estesa può essere raggiunto, partendo dalla radice, in un solo modo per cui, dato un nodo, è possibile ricostruire a ritroso il cammino che ha portato il gioco in quella configurazione a seguito di una successione particolare di mosse (**backward induction**);

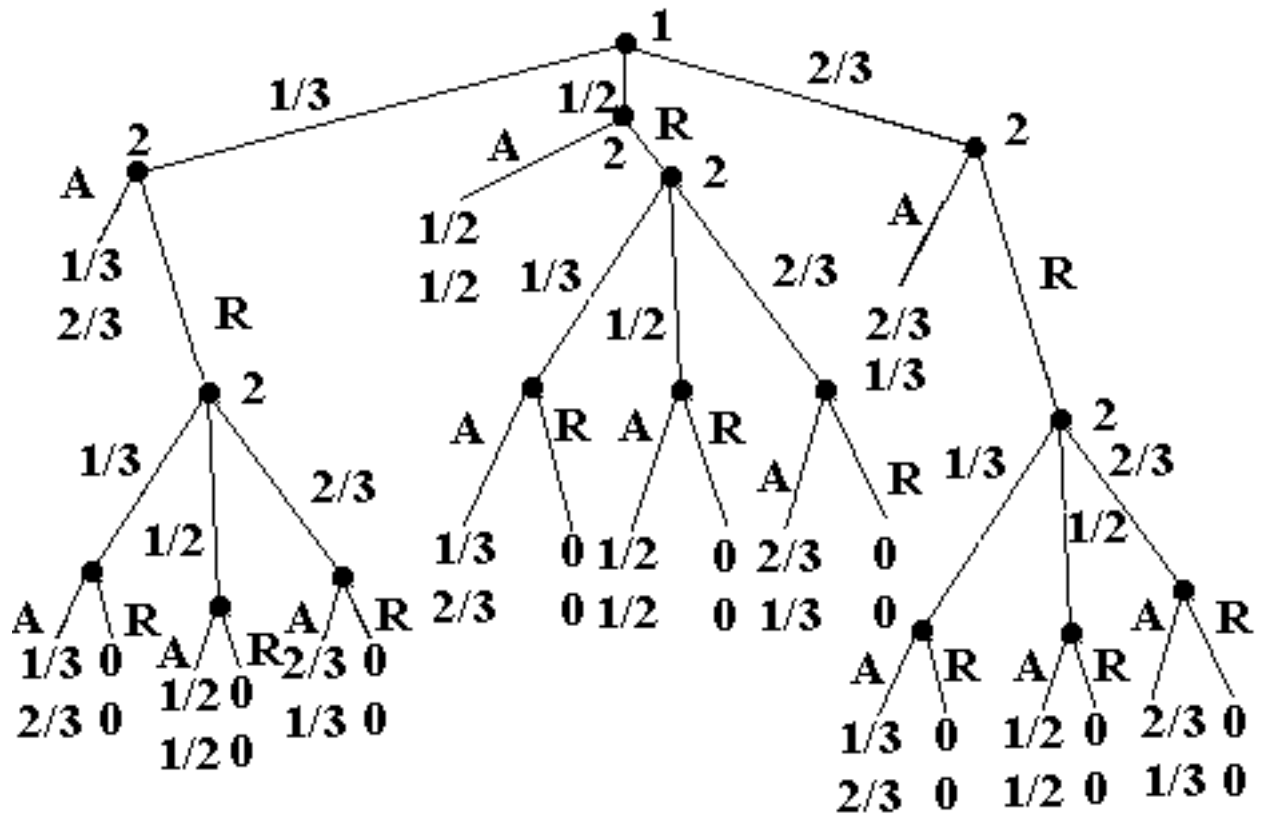


Figura 2: Nuova versione del gioco di contrattazione in forma estesa (dettagli nel testo)

2. nel caso del gioco di contrattazione un giocatore che muove conosce tutte le mosse fatte in precedenza ovvero il gioco è a **informazione completa**.

1.2 Informazione completa e perfetta

Nota 1.4 (Caratteristiche dei giochi) Un gioco può essere caratterizzato dalle proprietà delle mosse ad ogni nodo per cui si hanno:

1. giochi a **informazione completa o incompleta**,
2. giochi a **informazione perfetta o imperfetta**.

Un gioco è a **informazione completa** se i payoff dei giocatori sono conoscenza comune mentre è a **informazione incompleta** se non lo sono. Un

gioco è a **a informazione perfetta** se ad ogni mossa un giocatore conosce tutte le mosse che sono state fatte in precedenza mentre è a **a informazione imperfetta** altrimenti (vedi [Gib92]).

Alcune delle peculiarità delle rappresentazioni in forma estesa sono illustrate in figura 3, (a), (b) e (c):

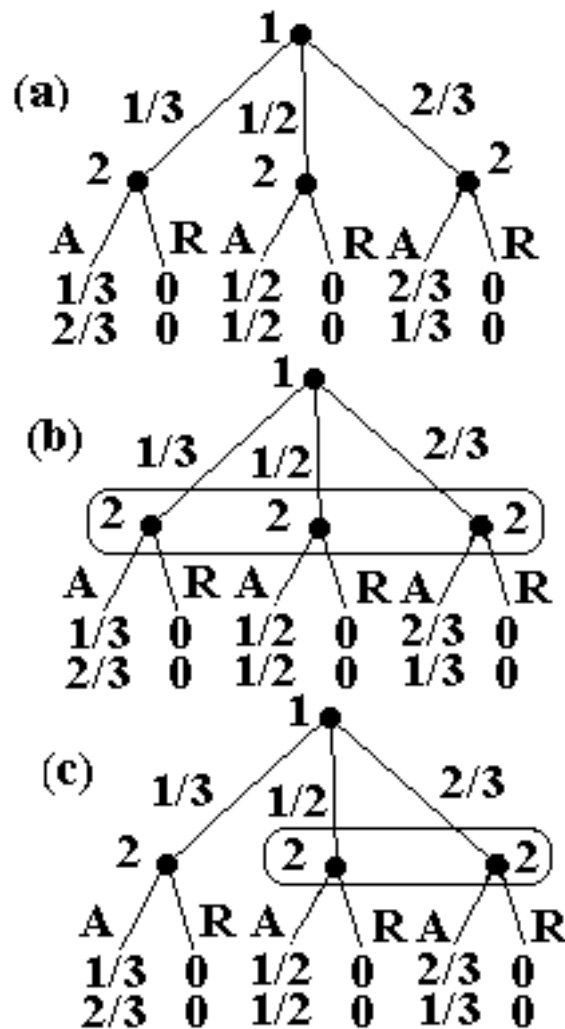


Figura 3: Rappresentazioni in forma estesa (dettagli nel testo)

Nel caso della figura 3.(a) si ha che 2, al momento di eseguire la sua mossa, conosce il nodo in cui si trova ovvero sa quale mossa ha eseguito 1: è il caso di giochi a mosse successive. Nel caso della figura 3.(b) si ha che 2, al momento

di eseguire la sua mossa, non conosce il nodo in cui si trova ovvero non sa quale mossa ha eseguito 1: è il caso di giochi a mosse simultanee. In figura 3.(c) si ha una situazione ibrida in cui 2, al momento di muovere, sa solo se 1 ha effettuato la mossa $\frac{1}{3}$ oppure no, dato che non riesce a distinguere fra le altre due.

I nodi non racchiusi da ovali sono noti al giocatore cui spetta il turno di muovere che sa distinguerli da altri. Se un gioco in forma estesa è caratterizzato da nodi privi di ovali (o da ovali ciascuno dei quali contiene un solo nodo) si parla di **gioco a informazione perfetta**. Se si hanno ovali che racchiudono più nodi (come in figura 3, (b) e (c)) si parla di **gioco a informazione imperfetta**.

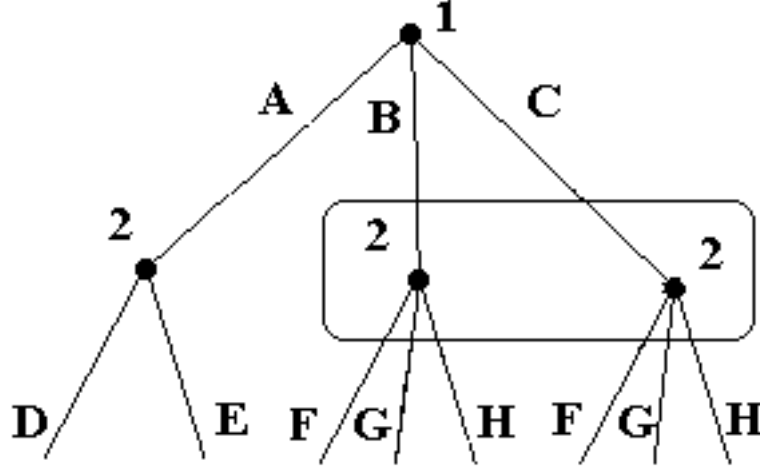
Gli ovali presenti nelle rappresentazioni in forma estesa dei giochi si chiamano **insiemi di informazione** e sintetizzano una ignoranza informativa da parte di un giocatore. Nel caso della figura 3.(b) 2 deve accettare o rifiutare l'offerta di 1 a scatola chiusa per cui il gioco è detto essere a mosse simultanee (che equivale a dire che i due muovono in successione ma senza che chi muove dopo possa vedere la mossa effettuata dall'altro). Si parla di **informazione perfetta** se ogni insieme di informazione contiene un solo nodo (è un singoletto), si parla, invece, di **informazione imperfetta** se almeno un insieme informativo contiene più di un nodo. Sulla base del fatto che due nodi in uno stesso insieme informativo sono fra loro indistinguibili, gli archi uscenti da ciascuno di tali nodi devono avere le stesse etichette, altrimenti il giocatore potrebbe distinguere i nodi sulla base delle etichette degli archi uscenti e, pertanto, tali nodi non farebbero parte di uno stesso insieme informativo. Nel caso della figura 4 si ha che 1 sceglie una mossa in $\{A, B, C\}$ e 2 sa capire se 1 ha scelto A (nel qual caso a sua disposizione ha le mosse D ed E) oppure no: 2 non sa distinguere fra B e C per cui le sue mosse non possono essere diverse nei due casi e, infatti, coincidono e sono $\{F, G, H\}$.

1.3 Formalizzazione di Γ_E

La descrizione in **forma estesa** Γ_E di un gioco è caratterizzata da:

1. un insieme di giocatori $\{1, \dots, n\}$,
2. un insieme A di azioni fra cui i giocatori scelgono,
3. un insieme X di nodi e un nodo iniziale $x_0 \in X$,
4. un insieme di nodi terminali o **foglie** T .

Ogni nodo $x \in X \setminus \{x_0\}$ ha un unico predecessore immediato, definito da una relazione di precedenza, e un certo numero di successori immediati o

Figura 4: *Informazione imperfetta (dettagli nel testo)*

anche nessuno. Se ci sono successori immediati nessuno di questi è tale che da esso parta una successione di archi che porta ad un predecessore del nodo in questione (o direttamente al nodo stesso) ovvero non si hanno cicli e la struttura è un albero. Con le notazioni introdotte si ha:

1. $T \subset X$,
2. $X \setminus T$ è l'insieme dei nodi non terminali o **nodi interni** o **nodi di decisione** ognuno dei quali è associato ad un giocatore cui tocca muovere in quel nodo oltre ad essere associato ad un **insieme di informazione** $H(x) \subset X \setminus T$.

Il giocatore che gioca in un certo nodo può non saperlo distinguere da un altro dello stesso insieme informativo.

Nota 1.5 *Si hanno le due possibilità seguenti:*

1. $H(x) = \{x\}$ ovvero l'insieme informativo è un singoletto,
2. $H(x) = \{x, y, w, z\}$ ovvero l'insieme informativo contiene più nodi, ovvero è un sottoinsieme di $X \setminus T$.

Se con $\mathcal{A}$ indico l'insieme delle azioni permesse durante il gioco e con $\mathcal{C}(x)$ indico le azioni possibili nel nodo di decisione x per il giocatore i cui è associato il nodo, si ha $\mathcal{A} \supset \mathcal{C}(x)$. Se x e x' sono due nodi dello stesso insieme di informazione $H(x)$ si ha $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(x')$ ovvero le azioni possibili nei due

nodì devono coincidere altrimenti questi sarebbero distinguibili e, pertanto, non appartenerebbero allo stesso insieme di informazione. Lo stesso vale per i giocatori per cui il giocatore cui tocca muovere in x ($i(x)$) deve coincidere con quello cui tocca muovere in x' ($i(x')$).

Se il nodo x' è un successore immediato di x allora esiste $a \in \mathcal{C}(x)$ che fa passare il gioco da x in x' . Dato un gioco in forma estesa Γ_E e dato un qualunque giocatore i si possono individuare tutti gli insiemi di informazione associati a quel giocatore in modo da definire l'insieme $\mathcal{H}_i$ degli insiemi di informazione del giocatore i e tale caratterizzazione può avvenire sia in funzione dei nomi dei nodi sia, per quanto detto, dei nomi delle azioni che etichettano gli archi uscenti da tali nodi. In base a tale convenzione considerando la figura 4 si ha:

$$\mathcal{H}_1 = \{A, B, C\} \quad (3)$$

$$\mathcal{H}_2 = \{\{D, E\}, \{F, G, H\}\} \quad (4)$$

Oltre ai nodi di decisione si hanno i nodi terminali in T che non hanno discendenti e sui quali sono definite le preferenze dei giocatori che, fino a questo punto e in modo un po' impreciso, sono state associate a valori numerici detti utilità. Si ha il problema di come **rappresentare le preferenze**. Dato un giocatore con un insieme di alternative $\mathcal{Z}$, su di esse è definita una relazione di preferenza $\succeq$ tale che se x e $y \in \mathcal{Z}$ allora $x \succeq y$ significa che x è non peggiore di y . La relazione $\succeq$ è una relazione primitiva che si applica alle alternative ovvero $\succeq \in \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ e quindi $(x, y) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ sse $x \succeq y$ (e si dice che x è preferito debolmente a y).

Definizione 1.5 *Si richiede che la relazione $\succeq$ sia:*

1. **completa:** $\forall x, y \in \mathcal{Z}$ si ha $x \succeq y$ oppure $y \succeq x$ ovvero ogni coppia di alternative è ordinata dalla relazione di preferenza debole. Se le relazioni suddette sono entrambe valide si ha che x e y sono indifferenti;
2. **transitiva:** $\forall x, y, z \in \mathcal{Z}$ se si ha $x \succeq y$ e $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

La relazione di indifferenza è indicata anche come $\sim$. La **riflessività** è inclusa nella completezza e nella definizione di preferenza debole.

Definizione 1.6 (Funzione utilità) *Ci si chiede se esiste una funzione:*

$$u : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (5)$$

detta **funzione utilità** che ci permetta di rappresentare la relazione di preferenza $\succeq$ ovvero che sia tale da consentirci di definire la seguente equivalenza:

$$x \succeq y \iff u(x) \geq u(y) \quad (6)$$

$\forall x, y \in \mathcal{Z}$. L'esistenza o meno della $u()$ dipende da caratteristiche dell'insieme $\mathcal{Z}$ (se tale insieme è di cardinalità finita allora la funzione $u()$ esiste sempre, quali che siano le preferenze).

Nota 1.6 (Funzione utilità per insiemi finiti) Si ha un procedimento costruttivo per ricavare la funzione utilità associata ad un insieme $\mathcal{Z}$ finito. Sia $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_n\}$. Si prendono due elementi a caso, ad esempio i primi due z_1 e z_2 . Per la completezza se $z_1 \succeq z_2$ allora si pone $x = z_1$ altrimenti $x = z_2$ ovvero a x si associa il miglior elemento di $\mathcal{Z}$ fra quelli esaminati. Si considerano poi gli elementi z_i $i > 2$ e si hanno due casi:

1. $x \succeq z_i$ non si fa nulla,
2. $z_i \succeq x$ allora $x = z_i$.

Si prosegue fino ad $i = n$ in modo da selezionare il miglior elemento di $\mathcal{Z}$, sia z_k . A questo punto si esegue il seguente riassegnamento:

1. $\mathcal{Z} = \mathcal{Z} \setminus z_k$,
2. $u(z_k) = n$.

Si ripete il procedimento ricavando il nuovo miglior valore (sia z_j , $j \neq k$) e si ha, di nuovo:

1. $\mathcal{Z} = \mathcal{Z} \setminus z_j$,
2. $u(z_j) = n - 1$,

il tutto fino a che in $\mathcal{Z}$ si ha un solo valore, l'ultimo, sia z_1 , in modo da avere:

1. $\mathcal{Z} = \emptyset$,
2. $u(z_1) = 1$.

In questo modo si è definita la funzione $u()$ che ci permette di rappresentare le preferenze.

Nota 1.7 (Funzione utilità per insiemi infiniti) Nel caso di insiemi infiniti (ad esempio nel caso dell'ortante positivo $\mathbb{R}_+^2$) la funzione utilità esiste se la relazione di preferenza $\succeq$ gode delle seguenti proprietà:

1. è **completa**,
2. è **transitiva**,

3. è **continua**.

Definito l'**upper contour set** $U(x) = \{y \in \mathcal{X} : y \succeq x\}$ si ha che la $\succeq$ è continua se tale insieme è chiuso. Se non vale la continuità della $\succeq$ non si può definire la funzione utilità.

In ciò che segue considereremo sempre:

1. un numero finito n di giocatori,
2. un insieme finito A di azioni,
3. un insieme finito X di nodi e perciò un insieme finito di nodi terminali T ovvero un numero finito di alternative o esiti del gioco.

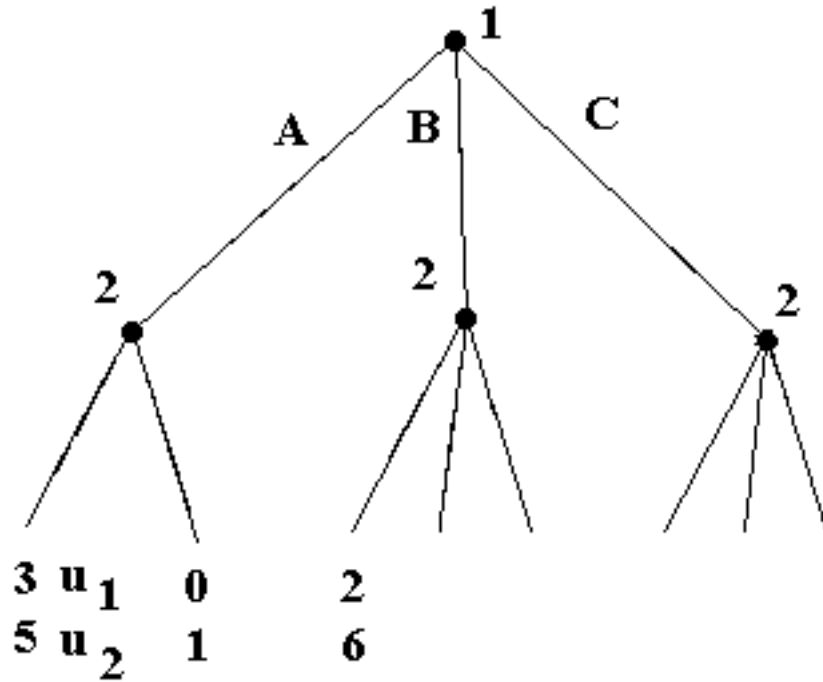


Figura 5: *Esempio di dominanza (dettagli nel testo)*

Per ogni giocatore i si ha una relazione di preferenza $x \succeq_i y$ cui corrisponde una funzione utilità $u_i(\cdot)$ tale che se $x \succeq_i y$ allora $u_i(x) \geq u_i(y)$, dal momento che si vuole massimizzare l'utilità. In questo modo (vedi la figura 5) ai nodi terminali si aggiungono dei valori numerici che rappresentano le utilità dei singoli giocatori (indicate con $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$ per 1 e 2 rispettivamente). In

questo modo si riesce a dire se, per un giocatore, un esito è migliore di un altro in quanto ha una utilità superiore. In figura 5 per 2 l'esito con utilità 6 è preferibile a quello con utilità 5 mentre per 1 vale il viceversa, perchè $3 > 2$.

1.4 Le strategie

Dato uno dei giocatori i si definisce una **strategia** per i un piano d'azione completo che, in ogni situazione, ovvero per ogni insieme di informazione, in cui si può trovare il giocatore i indica una mossa da scegliere in tale situazione. Con riferimento alla figura 4 si ha che:

1. le strategie di 1 sono $\{A, B, C\}$,
2. le strategie di 2 si possono ricavare considerando che nel gioco di figura 4 il giocatore 2 può, almeno in parte, modificare il suo comportamento in funzione di quello di 1. Da queste premesse si ha che 2 deve pianificare come muovere nei casi possibili per cui:

- (a) se 1 gioca A 2 può giocare D o E ,
- (b) se 1 gioca B o C 2 può giocare F o G o H ,

per cui le strategie possibili per 2 sono le seguenti:

$$\{DG, DF, DH, EF, EG, EH\} \quad (7)$$

ovvero sono date dal prodotto cartesiano degli insiemi di informazione per il giocatore 2, descritti in base alle etichette degli archi uscenti:

$$\{D, E\} \times \{F, G, H\} \quad (8)$$

Nel caso della figura 6 il giocatore 1 ha gli insiemi di informazione $\{A, B\}$ e $\{E, F\}$ mentre il giocatore 2 ha un solo insieme di informazione e cioè $\{C, D\}$ per cui, seguendo la regola del prodotto cartesiano, si ha che:

1. le strategie di 1 sono date dal prodotto cartesiano $\{A, B\} \times \{E, F\}$ ovvero $\{AE, AF, BE, BF\}$;
2. le strategie di 2 sono $\{C, D\}$.

Definizione 1.7 Una **strategia** per un giocatore i è una funzione:

$$s_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow A \quad (9)$$

ovvero è una funzione che mappa insiemi di informazione su azioni tale che $s_i(h_i) \in \mathcal{C}(h_i) \forall h_i \in \mathcal{H}_i$.

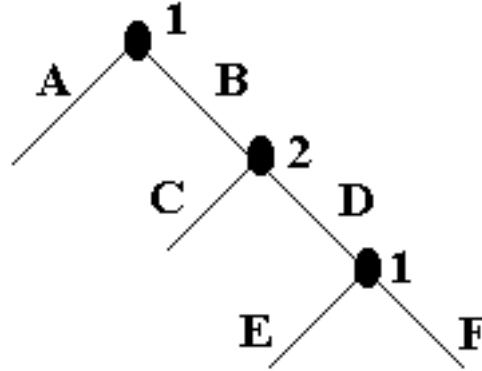


Figura 6: Strategie (dettagli nel testo)

Nota 1.8 h_i è un insieme di informazione o insieme informativo assegnato al giocatore i mentre $\mathcal{C}(h_i)$ sono le azioni che il giocatore i può scegliere nei nodi di tale insieme informativo. Si noti che $\mathcal{H}_i$ è un insieme di insiemi e i suoi elementi sono gli h_i , ciascuno dei quali può contenere più di un nodo. Se si hanno due nodi x e x' in h_i da entrambi si deve uscire con le stesse mosse per cui deve essere $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(x')$.

Si introduce a questo punto una **corrispondenza fra due insiemi** X e 2^Y

$$f : X \longrightarrow 2^Y \quad (10)$$

tale che $\forall x \in X \exists W \in 2^Y$ tale che $f(x) = W$.

1.5 Rappresentazione in forma normale o strategica

Dato un profilo di strategie $s = (s_1, \dots, s_n)$ (ovvero una n -upla di strategie s_i se n sono i giocatori) si ha una strategia per ogni giocatore $i \in [1, \dots, n]$. In questo modo si sa come ogni giocatore gioca in ogni nodo della rappresentazione del gioco così che s determini in modo univoco un nodo esito, ovvero uno dei nodi terminali. Data una n -upla di strategie ad essa è associato in modo univoco un esito cui sono associate le utilità $u_i(s)$ dei singoli giocatori: $u_i(s)$ è l'utilità del giocatore i dato l'esito indotto dalla strategia s .

Oltre ai profili di strategie s si definiscono gli insiemi di strategie $S = \times_{i=1}^n S_i$, dove n è il numero dei giocatori e S_i è l'insieme delle strategie del giocatore i . In questo caso si definisce la funzione:

$$u_i : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (11)$$

e si ha che se $s = (s_i \mid i = 1, \dots, n) \in S$ allora $s_i \in S_i$. Con riferimento alla figura 6 si ha:

1. $S_1 = \{AE, AF, BE, BF\}$ e, in modo non proprio rigoroso (dato che la notazione introdotta non prevede il doppio pedice) ma intuitivamente significativo:

- (a) $s_{11} = AE$

- (b) $s_{12} = AF$

- (c) $s_{13} = BE$

- (d) $s_{14} = BF$

2. $S_2 = \{C, D\}$

e, quindi:

$$S = S_1 \times S_2 \quad (12)$$

Definizione 1.8 (Rappresentazione in forma normale) *Un gioco si dice rappresentato in **forma normale** e lo si denota come $\Gamma_N = \{S_i, u_i\}_{i=1}^n$ se lo si descrive mediante:*

1. le strategie S_i ,
2. le utilità u_i ,

di tutti i giocatori cioè per $i = 1, \dots, n$.

Una volta scelta una strategia la si deve soltanto applicare, scegliendo le mosse che la compongono in modo coerente, fino ad arrivare ad una delle foglie del grafo rappresentativo del gioco. A ciascuna foglia è associato un *esito* per tutti i giocatori che partecipano al gioco. Gli esiti sono rappresentati come un vettore di payoff per cui esiste una relazione fra strategie e payoff. Il punto chiave è che i giocatori scelgono in modo *simultaneo* le strategie prima che il gioco inizi limitandosi poi ad applicarle nel corso del gioco.

Nota 1.9 (Equivalenza delle rappresentazioni) *Un problema aperto è quello di stabilire, in generale, se la rappresentazione in forma estesa Γ_E e quella in forma normale o strategica Γ_N di un gioco sono equivalenti o no dal punto di vista del contenuto informativo.*

È chiaro che Γ_N contiene meno informazioni di Γ_E perchè:

1. *esistono giochi che hanno forma estesa diversa ma identica forma normale (a meno di un cambio di etichette),*

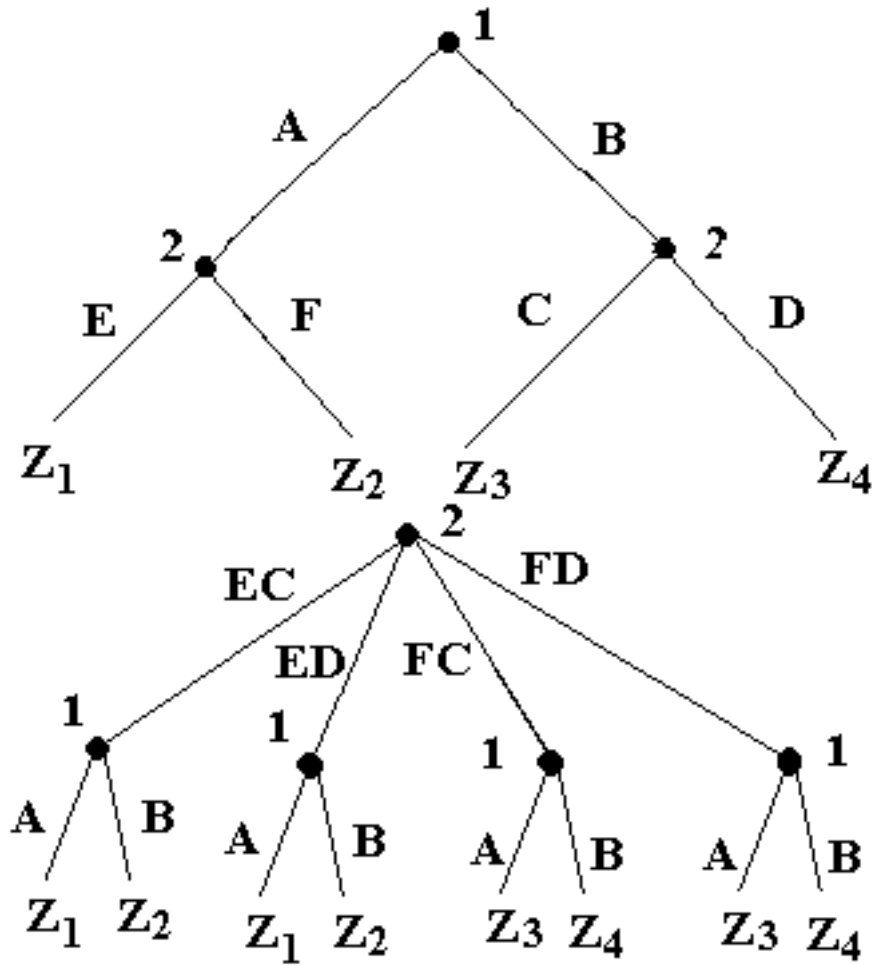


Figura 7: Ancora sulle strategie (dettagli nel testo)

2. se due giochi hanno forma normale diversa lo stesso vale per la forma estesa ma non vale il viceversa.

Un esempio è illustrato in figura 7 in cui $z_i \in \mathbb{R}^2$. Nella parte superiore di tale figura si ha un gioco in forma estesa la cui forma normale viene ricavata considerando che:

$$S_1 = \{A, B\} \quad (13)$$

$$S_2 = \{E, F\} \times \{C, D\} = \{EC, ED, FC, FD\} \quad (14)$$

$$S = S_1 \times S_2 \quad (15)$$

Si ha la corrispondente forma normale del gioco, illustrata in figura 8, in cui

1 \ 2		EC	EF	FC	FD
A		Z_1	Z_1	Z_2	Z_2
B		Z_3	Z_3	Z_4	Z_4

Figura 8: Forma normale o strategica (dettagli nel testo)

se 1 gioca A 2 può adottare o la strategia EC o la strategia EF con esito z_1 o una delle strategie FC, FD con esito z_2 . Considerazioni analoghe valgono se 1 gioca B. Se si considera il gioco in forma estesa illustrato nella parte inferiore della figura 7, in cui a muovere per primo è il giocatore 2, si ha che le strategie sono le seguenti:

$$S_2 = \{EC, ED, FC, FD\} \quad (16)$$

$$S_1 = \{A, B\} \quad (17)$$

e la forma normale del gioco è di nuovo quella illustrata in figura 8 sebbene i due giochi siano fra loro diversi: il secondo gioco è infatti a mosse simultanee (dal momento che 1 non modifica la propria strategia in funzione della strategia adottata da 2) mentre il primo è a mosse successive dal momento che le mosse di 2 dipendono dalla mossa precedente di 1. Nel secondo gioco è come se i nodi di decisione di 1 appartenessero ad uno stesso insieme informativo. L'analisi della sola Γ_N non consente di distinguere fra i due giochi.

Esempio 1.4 (Asta in busta chiusa) Nel caso di un'asta in busta chiusa si hanno n giocatori ciascuno dei quali è caratterizzato da una valutazione v_i del bene messo all'asta. Ogni giocatore i fa una offerta e la consegna, senza che sia nota agli altri partecipanti, al venditore. Chi offre di più ottiene il bene messo all'asta e paga la somma che ha offerto. Per ogni giocatore i si ha un insieme di informazione $S_i = (0, +\infty)$ che coincide con l'insieme delle possibili offerte del giocatore i mentre per la funzione utilità si ha:

$$u_i(s) = \begin{cases} v_i - s_i & \text{se } s_i > s_j \forall j \neq i \\ 0 & \text{se } s_i < s_j \text{ per qualche } j \neq i \end{cases}$$

Escludendo ipotesi di parità di offerte, nel primo caso i offre più di tutti e vince l'asta mentre nel secondo caso qualcuno offre più di i che non vince ma non deve pagare: nel primo caso, infatti, l'utilità di i è data dalla differenza fra la valutazione del bene e l'offerta fatta mentre nel secondo è pari a 0. In ogni caso non ha senso che i offra più della propria valutazione dal momento che così facendo, in caso di vincita, ottiene una utilità negativa (ovvero ha una perdita). In caso di più offerte identiche si può risolvere la situazione di parità ricorrendo ad una lotteria equa (sorteggio con eventi equiprobabili in numero pari al numero di offerenti in condizioni di parità). Per descrivere l'asta come un gioco in forma normale o estesa si devono fare delle semplificazioni. Ad esempio si suppone di avere 2 offerenti ciascuno dei quali può fare le stesse 3 offerte e si suppone che il gioco sia a **mosse simultanee**. Torneremo ripetutamente sulle aste nelle prossime lezioni.

Nel caso di giochi a mosse simultanee si ha che i giocatori scelgono allo stesso tempo ed hanno tutti una mossa a disposizione. In questo caso si può usare la forma normale per descrivere il gioco, senza perdita di informazione: ogni giocatore fissa **a priori** la propria strategia e poi si limita ad eseguirla. Vediamo un esempio con riferimento alla figura 9 che illustra un gioco a mosse

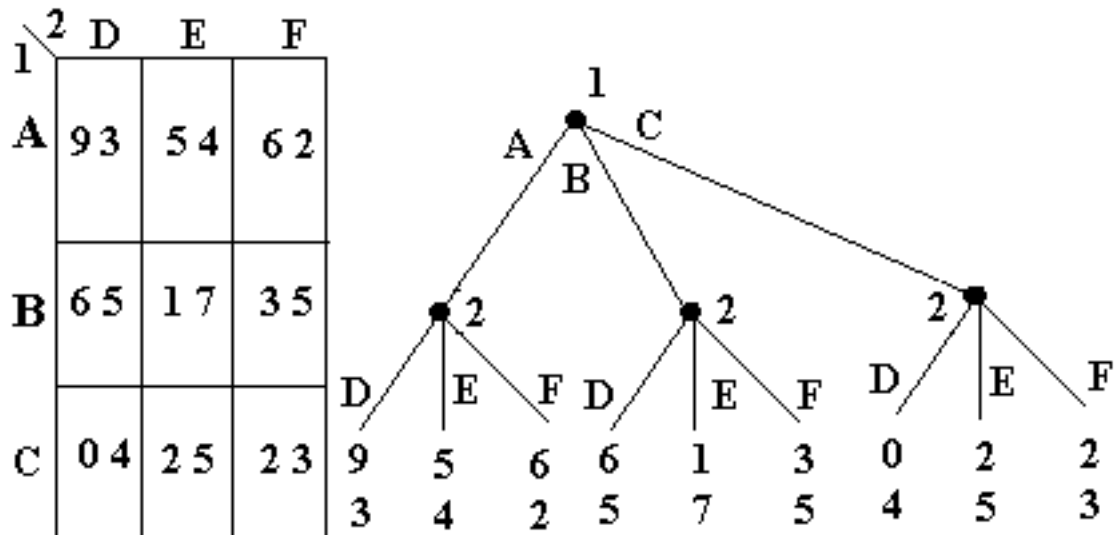


Figura 9: Esempio di gioco a mosse simultanee (dettagli nel testo)

simultanee descritto sia in forma normale sia in forma estesa: nella forma estesa i nodi in cui tocca al giocatore 2 muovere appartengono ad un unico insieme informativo. Da entrambe le forme è facile vedere come le strategie

per i due giocatori siano le seguenti:

$$S_1 = \{A, B, C\} \quad (18)$$

$$S_2 = \{D, E, F\} \quad (19)$$

Da un esame della rappresentazione in forma normale si vede immediatamente, confrontando i valori dei payoff dei due giocatori nelle varie situazioni, che:

1. l'azione migliore per 1 è A quale che sia la mossa di 2,
2. l'azione migliore per 2 è E quale che sia la mossa di 1.

In questo modo entrambi i giocatori possono risolvere il gioco senza prendere in considerazione la strategia dell'altro perchè ciascuno dei due ha una mossa migliore delle altre **qualunque cosa faccia l'altro giocatore**.

Si noti che, dato che il gioco è a mosse simultanee, nessuno dei due giocatori può modificare la propria strategia in funzione delle mosse dell'altro. Tale caratteristica risulta evidente se si nota che, in tutti i suoi nodi decisionali, il giocatore 2 ha le stesse mosse possibili.

Dall'esempio segue la seguente definizione di strategia dominante.

Definizione 1.9 (Strategia dominante) *Dato un giocatore i le cui strategie costituiscono l'insieme S_i si dice che una strategia s_i domina strettamente un'altra strategia s'_i se, a parità di strategia degli altri giocatori (indicata come s_{-i}), si ha (u_i è la funzione utilità del giocatore i):*

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \quad (20)$$

e ciò per ogni $s_{-i} \in S_{-i}$ ovvero per ogni possibile strategia degli altri giocatori. Si noti che si ha:

$$s_{-i} = s \setminus s_i = \{s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n\} \quad (21)$$

In base alla definizione di stretta dominanza, le strategie s'_i possono essere virtualmente eliminate dalla tabella della rappresentazione in forma normale perchè strettamente dominate e, pertanto, non utilizzate dal giocatore i che si suppone agisca in modo razionale.

2 Seconda Lezione

2.1 Dominanza stretta e debole

Se con s_i si indica una strategia del giocatore i e con S_i si indica l'insieme delle sue strategie si può dare la seguente definizione.

Definizione 2.1 (Dominanza stretta) La strategia $s_i \in S_i$ **domina strettamente** una strategia $s'_i \in S_i$ sse vale la seguente relazione:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \quad (22)$$

ovvero sse s_i è la migliore strategia per i a parità delle strategie degli altri giocatori ovvero per ogni $s_{-i} \in S_{-i}$.

Se per uno dei giocatori esiste una strategia strettamente dominante si dice che il gioco è **risolvibile per dominanza stretta**.

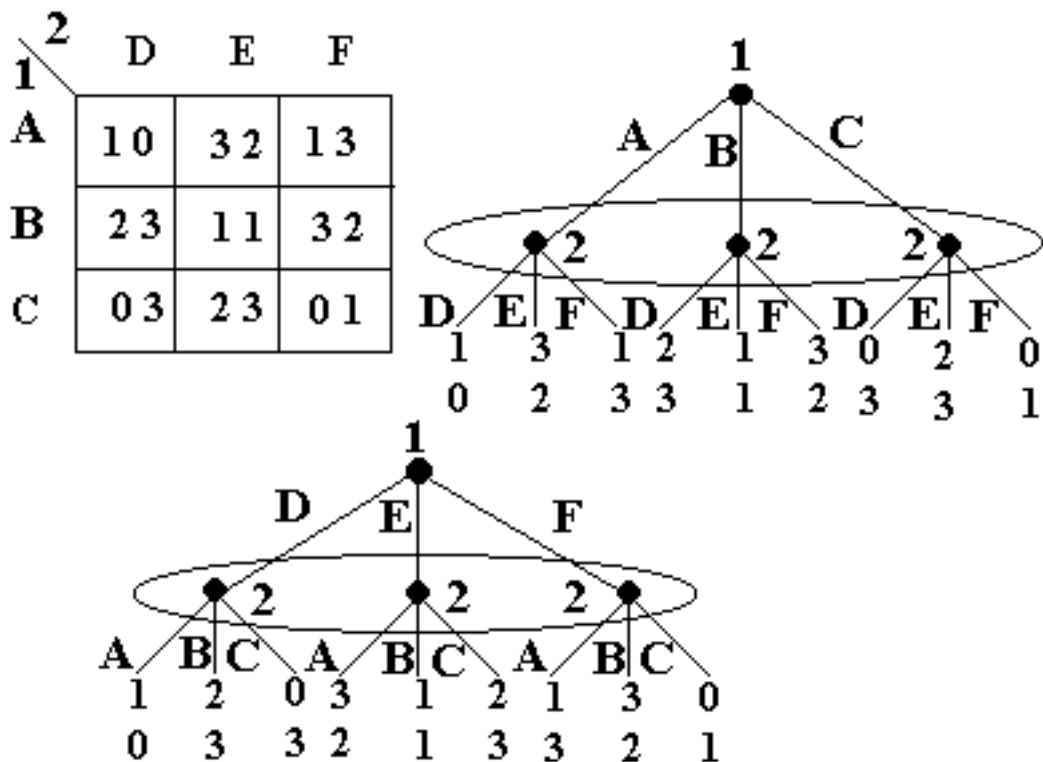


Figura 10: Esempio di gioco a mosse simultanee (dettagli nel testo)

Nota 2.1 Se la strategia s_i domina strettamente la strategia s'_i si dice che la s'_i è dominata strettamente dalla s_i .

Nel caso della figura 10 sotto le seguenti ipotesi:

1. i soggetti sono razionali,
2. i soggetti hanno una piena conoscenza del gioco e delle sue regole,

si ha che:

1. per il giocatore 1 la strategia C è dominata strettamente dalla strategia A quindi 2 può pensare che 1 non la giochi mai per cui può pensare di avere a che fare con un **gioco ridotto** in cui 1 ha a disposizione solo le strategie A e B ;
2. nel gioco ridotto 2 ha a sua volta una strategia E strettamente dominata dalla strategia F per cui anche 1 affronta un gioco ridotto in cui 2 ha a disposizione solo D ed F ;
3. si ha un gioco ulteriormente ridotto nel quale, per il giocatore 1, B domina strettamente A in modo che 1, in pratica, abbia a sua disposizione solo la strategia B in un gioco ulteriormente ridotto nel quale 2 ha che D domina strettamente F .

Attraverso riduzioni successive del gioco di partenza per **stretta dominanza iterata** si arriva ad un gioco con una sola strategia per ciascun giocatore (B per 1 e D per 2) in modo che si possa individuare un equilibrio del gioco: in questo caso mediante **cancellazioni iterate** si arriva ad una sola coppia di strategie.

Il metodo che abbiamo appena esaminato è più generale di quello della dominanza stretta pura, senza iterazioni, dal momento che la cancellazione di strategie permette di individuare strategie che ne dominano strettamente altre dopo la cancellazione ma non prima. I giochi ai quali si può applicare la cancellazione iterata sono in numero maggiore di quelli a cui si può applicare la dominanza stretta: nel caso della dominanza stretta si ipotizza un tipo di razionalità dei giocatori più debole di quella che si ipotizza per applicare la cancellazione iterata.

Definizione 2.2 (Dominanza debole) La strategia $s_i \in S_i$ **domina debolmente** una strategia $s'_i \in S_i$ sse:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \quad (23)$$

$\forall s_{-i} \in S_{-i}$
e vale:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \quad (24)$$

per almeno una coppia s_i, s'_i (altrimenti le due strategie sono indifferenti).

Nota 2.2 La dominanza stretta implica la dominanza debole ma non vale il viceversa.

		2	
		D	E
1	A	5 1	4 0
	B	6 0	3 1
	C	6 4	4 4

Figura 11: Esempio di dominanza debole (dettagli nel testo)

Esempio 2.1 Nel gioco di figura 11 si ha:

1. per il giocatore 2 non si ha dominanza nè stretta nè debole,
2. per il giocatore 1 si ha che la strategia C domina debolmente entrambe le strategie A e B.

Se ad un gioco si applica la cancellazione ripetuta per dominanza stretta l'ordine in cui si eseguono le cancellazioni è ininfluente ai fini dell'esito del gioco mentre se ad un gioco si applica la cancellazione ripetuta per dominanza debole l'ordine in cui si eseguono le cancellazioni influenza l'esito del gioco per cui la cancellazione **non è robusta**. Nel caso del gioco di figura 11, ad esempio,

1. se l'ordine delle cancellazioni per dominanza debole è B, E, A si ha che l'esito del gioco è (C, D),
2. se l'ordine delle cancellazioni per dominanza debole è A, D, B si ha che l'esito del gioco è (C, E)

I due esiti sono diversi e dipendono dall'ordine in cui si eseguono le cancellazioni di strategie per dominanza debole.

Nota 2.3 *Esistono giochi in cui non si ha nè **dominanza stretta** nè **dominanza debole**.*

2.2 Equilibrio di Nash

Si introduce ora un tipo di equilibrio che prescinde da condizioni di dominanza e, pertanto, è di applicabilità più generale degli equilibri visti finora. Si noti, infatti, che il fine dei procedimenti di cancellazione visti è quello di arrivare alla determinazione di strategie di equilibrio dei giochi ovvero di strategie che nessuno dei giocatori ha interesse a/può variare unilateralmente ovvero in modo indipendente dagli altri.

Definizione 2.3 (Equilibrio di Nash) *Un **profilo di strategie** $s = (s_i, s_{-i}) \in S$ è un **equilibrio di Nash** sse vale la seguente relazione:*

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \quad (25)$$

$\forall s'_i \in S_i$ e per ogni giocatore i . In tal caso si suppone che $s_{-i} \in S_{-i}$ sia fissato.

Ognuno dei giocatori i ha la propria funzione utilità u_i e il comportamento degli altri giocatori, $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, s_{-i} è fissato ovvero ogni giocatore valuta la propria strategia dando per fissate le strategie degli altri giocatori.

Nel caso di un **equilibrio di Nash** si pensa che esista un modo ovvio di giocare un gioco in cui ogni giocatore riesce a predire le strategie degli altri: è come se i giocatori si accordassero sulle strategie da seguire prima di iniziare il gioco per poi giocare utilizzandole al meglio. La figura 12 illustra un gioco in forma normale con due giocatori il primo dei quali ha tre strategie mentre il secondo ne ha due. Si vogliono tutti gli equilibri di Nash di tale gioco. In genere, per semplicità, si considera il giocatore con il minor numero di strategie.

Si ha:

1. se 1 pensa che 2 giochi D la miglior mossa per 1 è la C cui corrisponde per 1 il valore più alto della funzione utilità (6), superiore agli altri valori della stessa colonna,
2. se 2 pensa che 1 giochi C la miglior mossa per 2 è la D cui corrisponde per 2 il valore più alto della funzione utilità (2) superiore all'altro valore della stessa riga cioè 1.

		2	
		D	E
1	A	3 1	1 3
	B	2 5	7 4
	C	6 2	0 1

Figura 12: *Esempio di equilibrio di Nash (dettagli nel testo)*

(C, D) è, quindi, un **equilibrio di Nash** per il gioco in questione. Per vedere se tale equilibrio è l'unico si può proseguire l'esame del gioco. Sintetizzando il ragionamento, si vede facilmente che se 2 gioca E la miglior risposta per 1 è B ma se 1 gioca B la miglior risposta per 2 è D per cui non si ha un equilibrio di Nash in questo caso e l'equilibrio trovato è l'unico.

		2	
		D	E
1	A	3 1	1 3
	B	6 5	7 4
	C	6 2	0 1

Figura 13: *Esempio di equilibrio di Nash (dettagli nel testo)*

Se la situazione è quella della figura 13 si ha che se 2 gioca E la miglior risposta per 1 è B ma se 1 gioca B la miglior risposta per 2 è D per cui in questo caso non si ha un equilibrio di Nash. Se 2 gioca D , 1 è indifferente fra B e C . Se considero 1 ho:

1. se 1 gioca B la miglior mossa per 2 è D ,

2. se 1 gioca C la miglior mossa per 2 è D

per cui (C, D) e (B, D) sono equilibri di Nash per il gioco.

		2	
		D	E
1	A	3 1	1 3
	B	2 5	7 4
	C	6 2	0 2

Figura 14: Ancora sugli equilibri di Nash (dettagli nel testo)

Nel caso del gioco di figura 14, di nuovo utilizzando un ragionamento abbreviato, si ha:

1. se 2 gioca D la miglior risposta per 1 è la C e se 1 gioca C 2 è indifferente fra D ed E ma se rispondesse con E , 1 giocherebbe B per cui, perchè si abbia equilibrio, 2 deve rispondere con D in modo che (C, D) sia un equilibrio di Nash;
2. se 2 gioca E la miglior risposta per 1 è la B ma se 1 gioca B la miglior risposta per 2 è la D per cui in questo caso non si ha un equilibrio di Nash.

Nota 2.4 Si noti che nel caso di **giochi a mosse simultanee** ogni giocatore pianifica la propria strategia ipotizzando che gli altri perseguano la propria migliore strategia mentre nei **giochi a mosse successive** ogni giocatore basa la propria strategia sulle strategie effettive degli altri, strategie fissata **a priori** per cui non c'è una sostanziale differenza fra le due tipologie di giochi.

Un esempio leggermente più complesso è quello illustrato in figura 15 in cui viene presentato un gioco a due giocatori in cui entrambi hanno a disposizione tre strategie. Si ha:

1. se 2 gioca D la miglior risposta per 1 è B e se 1 gioca B la miglior risposta per 2 è D per cui (B, D) è un equilibrio di Nash,

$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$	D	E	F
A	1 0	3 2	1 3
B	2 3	1 1	3 2
C	0 3	2 3	0 1

Figura 15: Ancora sugli equilibri di Nash (dettagli nel testo)

- se 2 gioca E la miglior risposta per 1 è A ma se 1 gioca A la miglior risposta per 2 è F per cui in questo caso non si ha un equilibrio di Nash,
- se 2 gioca F la miglior risposta per 1 è B ma se 1 gioca B la miglior risposta per 2 è D per cui in questo caso non si ha un equilibrio di Nash.

In questo caso si ha un solo equilibrio di Nash.

Nota 2.5 Dato un gioco rappresentato in forma normale per il quale si trova un equilibrio di Nash la sua unicità non è garantita da nessun risultato teorico ma deve essere verificata analizzando il gioco nella sua interezza, come è stato fatto nei singoli esempi.

2.3 Giochi paradigmatici

Si analizzano ora alcuni giochi rappresentativi di situazioni di tipo generale e, perciò, detti **paradigmatici**. Il primo di questi è rappresentato nella figura 16 (a) ed è detto **Battaglia dei sessi**. In questo gioco i giocatori sono marito (1) e moglie (2) le cui strategie sono andare allo stadio (S) oppure al cinema (C). L'ottimo è per i due andare in uno dei due posti insieme, come si deduce facilmente da un esame delle utilità, ma il gioco è a mosse simultanee e, non presentando dominanze di nessun genere, va esaminato alla ricerca di equilibri di Nash.

Si ha:

- se 1 gioca S la miglior risposta per 2 è S e se 2 gioca S la miglior risposta per 1 è S per cui (S, S) è un equilibrio di Nash,

			(a)				(b)				(c)			
			2	S	C				2	A	B	2	P	D
1	2													
	1	S	4 2	1 1	A	4 4	0 0	P	1 -1	-1 1				
		C	0 0	2 4	B	0 0	2 2	D	-1 1	1 -1				

Figura 16: *Giochi paradigmatici (dettagli nel testo)*

2. se 1 gioca C la miglior risposta per 2 è C e se 2 gioca C la miglior risposta per 1 è C per cui (C, C) è un altro equilibrio di Nash.

Il problema con questo gioco (e con altri dello stesso tipo) è che le mosse sono simultanee per cui può accadere che, in pratica, 1 giochi S e 2 giochi C sebbene (S, C) non sia un equilibrio di Nash. Il gioco della **Battaglia dei sessi** è un gioco simmetrico con equilibri simmetrici in cui i giocatori hanno interessi conflittuali.

La figura 16 (b) presenta un gioco in cui i due giocatori hanno interessi comuni e per il quale è facile verificare, con strumenti ormai noti, che si hanno due equilibri di Nash:

1. (A, A) ,
2. (B, B) ,

sebbene il secondo dei due non sia **Pareto ottimo** dal momento che entrambi i giocatori possono migliorare passando al primo.

La figura 16 (c), infine, presenta un gioco privo di equilibri di Nash (almeno in strategie pure, vedi oltre per chiarimenti). In tale gioco (detto del **pari e dispari**) si hanno due giocatori che scelgono simultaneamente due numeri interi: se la somma è pari vince 1 se è dispari vince 2. In questo caso non si ha nessun equilibrio di Nash dato che:

1. se 2 gioca P la miglior risposta per 1 è P ma se 1 gioca P la miglior risposta per 2 è D ,
2. se 2 gioca D la miglior risposta per 1 è D ma se 1 gioca D la miglior risposta per 2 è P .

2.4 Strategie miste

I giochi visti fino ad ora (nelle due rappresentazioni sia in forma normale o strategica Γ_N sia in forma estesa Γ_E) sono stati caratterizzati dal fatto che i giocatori adottano le strategie a loro disposizione in modo deterministico (pertanto tali strategie sono dette **strategie pure**). Per tali giochi si hanno le seguenti possibilità:

1. non esiste nessun equilibrio di Nash in strategie pure,
2. esiste un solo equilibrio di Nash in strategie pure,
3. si ha più di un equilibrio di Nash in strategie pure.

Nel caso di **strategie miste** si ha che un equilibrio di Nash esiste sempre anche se non si ha nessuna certezza della sua unicità.

Se con σ_i si indica una strategia mista del giocatore i , σ_i individua una distribuzione di probabilità sulle strategie pure S_i (ovvero sulle strategie scelte con probabilità pari a 0, se non le si adotta, o 1 se le si adotta). Ad esempio nel gioco della figura 16 (c) si può avere che 1 gioca P con probabilità 0.3 e D con probabilità 0.7 (la cui somma deve valere 1, la probabilità dell'evento certo). Nel caso delle **strategie miste** si hanno distribuzioni di probabilità sulle singole strategie pure in modo da definire $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ dove $\Delta(S_i)$ rappresenta il semplice di S_i ovvero l'insieme di tutte distribuzioni di probabilità sulle strategie pure di i ovvero su S_i .

Definizione 2.4 (Simpleso)

$$\Delta(S_i) = \{ \sigma_i \in \mathbb{R}^{\#S_i} : \sigma_i(s_i) \geq 0 \wedge \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \} \quad (26)$$

in cui $\#S_i$ è la cardinalità di S_i e $\sigma_i(s_i)$ rappresenta la probabilità che la strategia mista assegna alla strategia pura s_i .

Si ha una rappresentazione dei giochi con strategie miste $\Gamma_N^E = \{ \Delta(S_i) \}_{i=1}^n$ se i giocatori sono n e scelgono strategie miste invece di strategie pure. In questo caso un profilo di strategie miste è del tipo:

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (27)$$

con:

$$\sigma \in \times_{i=1}^n \Delta(S_i) \subset \Delta(S) \quad (28)$$

Nota 2.6 L'ipotesi di base è che i giocatori scelgano le strategie miste in modo indipendente l'uno dagli altri.

		0.6 0.4		0.6 0.4	
		P D		P D	
1 \ 2	P	0.2 P	1 -1	0.2 P	0.12
	D		-1 1		0.08
0.8 D	P	0.8 D	-1 1	0.8 D	0.48
	D		1 -1		0.32

Figura 17: *Strategie miste (dettagli nel testo)*

Dato un profilo di strategie miste si devono determinare le utilità dei singoli giocatori nella forma di **utilità attese**. Per definire il concetto di utilità attesa si ricorre ad un esempio. Il gioco (a somma nulla) di figura 16 (c), riprodotto in figura 17, in cui compaiono sia un assegnamento di probabilità alle singole strategie (a sinistra) sia le probabilità congiunte, calcolate sfruttando l'indipendenza delle strategie (a destra), è un primo esempio di **gioco con strategie miste**. In tale gioco si ha che:

1. il giocatore 1 ottiene un payoff (o utilità) pari a 1 con una probabilità data dalla somma delle probabilità degli eventi P, P e D, D ovvero (vedi la figura 17) $0.12 + 0.32 = 0.44$,
2. il giocatore 1 ottiene un payoff (o utilità) pari a -1 con una probabilità data dalla somma delle probabilità degli eventi P, D e D, P ovvero (vedi la figura 17) $0.08 + 0.48 = 0.56$.

Per il giocatore 2 si hanno risultati simili ovvero:

1. il giocatore 2 ottiene un payoff (o utilità) pari a -1 con una probabilità data dalla somma delle probabilità degli eventi P, P e D, D ovvero (vedi la figura 17) $0.12 + 0.32 = 0.44$,
2. il giocatore 2 ottiene un payoff (o utilità) pari a 1 con una probabilità data dalla somma delle probabilità degli eventi P, D e D, P ovvero (vedi la figura 17) $0.08 + 0.48 = 0.56$.

Sempre con riferimento alla figura 17 si ha che:

1. l'utilità attesa di 1 se gioca P è pari a $0.6 - 0.4 = 0.2$,
2. l'utilità attesa di 1 se gioca D è pari a $-0.6 + 0.4 = -0.2$

mentre:

1. l'utilità attesa di 2 se gioca P è pari a $-0.2 + 0.8 = 0.6$,
2. l'utilità attesa di 2 se gioca D è pari a $0.2 - 0.8 = -0.6$

2.5 Cenni alle lotterie

Per approfondire il concetto di strategia mista si introducono i concetti di **lotteria** e di **relazione di preferenza** sulle lotterie in modo da consentire la scelta fra lotterie diverse. Il punto di partenza è la definizione di un insieme finito di esiti possibili $z = \{z_1, \dots, z_n\}$. Ad ognuno degli esiti z_i si associano delle probabilità in modo da definire un insieme di lotterie, ovvero un insieme di distribuzioni di probabilità:

$$\mathcal{L} = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_i p_i = 1\} \quad (29)$$

Una lotteria $L \in \mathcal{L}$ è una particolare distribuzione di probabilità ovvero:

$$L = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_i p_i = 1 \quad (30)$$

dove le probabilità p_i sono assegnate agli esiti z_i .

Date due lotterie L e L' si vuole uno strumento che ci permetta di dire quale è la migliore. Tale strumento è una **relazione di preferenza** su $\mathcal{L}$ indicata con $\succeq$ e data come primitiva. La relazione $\succeq$ è una relazione binaria sulle lotterie tale che:

1. se $L \succeq L'$ si dice che L è almeno buona quanto L' ,
2. se $L \succeq L'$ e $L' \succeq L$ si dice che $L \sim L'$ ovvero che L e L' sono indifferenti,
3. se $L \succeq L'$ ma $L' \not\succeq L$ si dice che $L \succ L'$ ovvero che L è strettamente migliore di L' .

Entrambe le relazioni $\sim$ e $\succ$ sono transitive, sulla base della definizione della $\succeq$ e delle sue proprietà. La **relazione di preferenza** $\succeq$ gode, infatti, delle seguenti proprietà:

1. **completezza**: date due lotterie qualunque L e $L' \in \mathcal{L}$ si ha $L \succeq L'$ oppure $L' \succeq L$,

2. **transitività**: date tre lotterie qualunque L, L' e $L'' \in \mathcal{L}$ si ha $L \succeq L'$ e $L' \succeq L'' \Rightarrow L \succeq L''$,
3. **continuità**: se $L \succ L'$ e $L' \succ L''$ allora esistono $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta \in (0, 1)$ tali che:

$$\alpha L + (1 - \alpha)L'' \succ L' \succ \beta L + (1 - \beta)L'' \quad (31)$$

in cui $\alpha L + (1 - \alpha)L''$ è migliore di L' per certi valori di α e $\beta L + (1 - \beta)L''$ è peggiore di L' per certi valori di β . Si noti che $\alpha L + (1 - \alpha)L''$ e $\beta L + (1 - \beta)L''$ sono combinazioni convesse di lotterie e pertanto sono lotterie definite in funzione di:

1. $L = (p_1, \dots, p_n)$,
2. $L' = (p'_1, \dots, p'_n)$
3. $L'' = (p''_1, \dots, p''_n)$

La relazione $\succeq$ soddisfa l'**assioma di indipendenza** ovvero è tale che, date le tre lotterie L, L' e $L'' \in \mathcal{L}$, si ha:

$$L \succeq L' \iff \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1 - \alpha)L'' \quad (32)$$

$\forall \alpha \in (0, 1)$ e $\forall L'' \in \mathcal{L}$.

2.6 Uso delle strategie miste

Teorema 2.1 (Teorema di Von Neumann e Morgenstern) *La relazione di preferenza $\succeq$ sulle lotterie soddisfa le proprietà di **completezza**, **transitività** e **continuità** sse esiste una funzione utilità sugli esiti:*

$$u : z \longrightarrow \mathbb{R} \quad (33)$$

tale che:

$$L \succeq L' \iff \sum_{h=1}^N p_h u(z_h) \geq \sum_{h=1}^N p'_h u(z_h) \quad (34)$$

dove $\sum_{h=1}^N p_h u(z_h)$ è il valore atteso di u rispetto alle probabilità in L mentre $\sum_{h=1}^N p'_h u(z_h)$ è il valore atteso di u rispetto alle probabilità in L' .

Cenni di dimostrazione.

Dato che la condizione è necessaria e sufficiente la dimostrazione avviene in due parti.

($\implies$)

Si definisce

$$U(L) = \sum_h p_h u(z_h) \quad (35)$$

in cui U si dice funzione di utilità bernoulliana e rappresenta le preferenze delle relazione $\succeq$ su $\mathcal{L}$ mentre u è la funzione utilità in condizioni di certezza. Date le due lotterie L e L' definisco:

1. $U(L) = \sum_h p_h u(z_h)$
2. $U(L') = \sum_h p'_h u(z_h)$

Nel caso delle strategie miste se si deve scegliere fra lotterie è necessario avere delle preferenze in base alle quali operare la scelta. Vale anche il viceversa. Al proposito si ha:

$$L \succeq L' \text{ sse } U(L) \geq U(L') \quad (36)$$

Se con Γ_N^E si indica l'estensione in forma mista del gioco in forma normale si ha:

$$\Gamma_N^E = \{\Delta(S_i), \tilde{u}_i\}_{i=1}^n \quad (37)$$

dove:

1. i giocatori sono n , indicati da i ;
2. $\Delta(S_i)$ sono le strategie miste dei giocatori;
3. $\tilde{u}_i$ sono le nuove funzioni utilità:

$$\tilde{u}_i : \times_{i=1}^n \Delta(S_i) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (38)$$

in cui come dominio compare il prodotto cartesiano dei semplici dei singoli giocatori ovvero si considera l'utilità attesa di un profilo di strategie miste.

Si ha, quindi:

$$\tilde{u}_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(s \mid \sigma) u_i(s) \quad (39)$$

in cui:

1. $\sigma \in \Delta(S)$, con σ profilo di strategie miste;
2. $s = (s_1, \dots, s_n)$;
3. $u_i(s)$ è l'utilità del profilo di strategie pure $s \in S$;

		$u_1(A,C) \quad u_2(A,C)$		
		1	2	
				C D E
A		1	2	-1 2 6 3
B		0 4	3 0	5 1

		1	2	
				C D E
1/3 A		1/15	1/6	1/10
2/3 B		2/15	1/3	1/5

Figura 18: Strategie miste (dettagli nel testo)

4. la sommatoria è estesa a tutti i profili di strategie pure;
5. $\mathbb{P}(s \mid \sigma) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(s_i)$ essendo gli eventi “scelta di una strategia mista” da parte dei singoli giocatori fra loro indipendenti ed essendo $\sigma_i(s_i)$ la probabilità che il giocatore i scelga la strategia pura s_i .

In figura 18 si ha un esempio di quanto detto. In alto si ha la descrizione in forma normale di un gioco con due giocatori in cui sono illustrate le loro strategie e le loro utilità per strategie pure. In basso si danno (all'esterno della tabella, a sinistra e in alto) le probabilità delle singole strategie e (nelle varie caselle) dei loro prodotti, sfruttando il principio di indipendenza enunciato in precedenza.

Si ha:

1. $\sigma_1(A) = 1/3$, $\sigma_1(B) = 2/3$ in modo che la somma valga 1;
2. $\sigma_2(C) = 1/5$, $\sigma_2(D) = 1/2$ e $\sigma_2(E) = 3/10$ in modo che la somma valga 1.

Si vuole ora l'utilità attesa del giocatore 1 calcolata mediante le seguenti relazioni (la prima delle quali è identica alla (39)):

$$\tilde{u}_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(s \mid \sigma) u_i(s) \quad (40)$$

$$\mathbb{P}(s \mid \sigma) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(s_i) \quad (41)$$

Per il calcolo si usano i valori della tabella in basso della figura 18 in modo da avere:

$$\tilde{u}_1(\sigma) = \frac{1}{15}1 + \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{10}6 + \frac{2}{15}0 + \frac{1}{3}3 + \frac{1}{5}5 \quad (42)$$

in cui, nella sommatoria, compaiono i prodotti delle utilità del giocatore 1 per le probabilità congiunte dei rispettivi eventi per cui il primo addendo è dato dal prodotto della utilità di 1 (ovvero 1) per la probabilità che si ricava dall'apposita tabella di figura 18; in modo simile si ricavano gli altri addendi. Per il giocatore 2, in modo analogo, si ha:

$$\tilde{u}_2(\sigma) = \frac{1}{15}2 + \frac{1}{6}2 + \frac{1}{10}3 + \frac{2}{15}4 + \frac{1}{3}0 + \frac{1}{5}1 \quad (43)$$

Si noti che $\tilde{u}_1(\sigma)$ e $\tilde{u}_2(\sigma)$ sono le utilità attese totali, del gioco nel suo complesso, per i giocatori 1 e 2.

		2				2	
		P	D	1/2 P	1/2 P	1/2 D	1/2 D
1	P	1 -1	-1 1	1/4	1/4	1/4	1/4
	D	-1 1	1 -1	1/4	1/4	1/4	1/4

Figura 19: Uso delle strategie miste (dettagli nel testo)

Nota 2.7 (Uso delle strategie miste) Con riferimento al gioco del pari (P) e dispari (D) di figura 19 (a sinistra si ha la descrizione del gioco, a destra si hanno le probabilità delle singole strategie e le probabilità composte) si ha quanto segue:

1. il giocatore 1 sceglie P e D con la stessa probabilità $\mathbb{P}$ pari a 0.5 per cui $\sigma_1(P) = \sigma_1(D) = 0.5$;

2. il giocatore 2 sceglie P e D con la stessa probabilità $\mathbb{P}$ pari a 0.5 per cui $\sigma_2(P) = \sigma_2(D) = 0.5$.

Volendo calcolare l'utilità attesa che deriva al giocatore 1 dallo scegliere P per ogni possibile strategia di 2 si ha (utilizzando le utilità e le probabilità delle due tabelle di figura 19):

$$U_1(P, \sigma_2) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0 \quad (44)$$

Nel caso della (44) il giocatore 1 sceglie la strategia pura P (con $\sigma_1 = (1, 0)$) mentre il giocatore 2 sceglie la strategia mista σ_2 . In modo analogo se il giocatore 1 sceglie la strategia pura D (con $\sigma_1 = (0, 1)$) mentre il giocatore 2 sceglie la strategia mista σ_2 si ha:

$$U_1(D, \sigma_2) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0 \quad (45)$$

Se il giocatore 2 gioca la strategia mista σ_2 (che prevede che lui giochi P e D con probabilità 0.5 ciascuno) e il giocatore 1 gioca una qualunque strategia pura queste sono per lui indifferenti perchè entrambe gli danno una utilità attesa nulla.

Supponiamo, ora, che il giocatore 1 giochi la strategia mista $\bar{\sigma}_1$ mentre il giocatore 2 gioca la strategia mista σ_2 . In questo caso l'utilità attesa del giocatore 1 risulta essere:

$$U_1(\bar{\sigma}_1, \sigma_2) = \bar{\sigma}_1(P)U_1(P, \sigma_2) + \bar{\sigma}_1(D)U_1(D, \sigma_2) \quad (46)$$

Dato che le utilità attese $U_1(P, \sigma_2)$ e $U_1(D, \sigma_2)$ sono nulle per quanto visto in precedenza si ha che tale utilità è, a sua volta, nulla.

Se il giocatore 2 gioca $\sigma_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, qualunque cosa il giocatore 1 giochi (ovvero sia che giochi una strategia mista o una strategia pura) l'utilità attesa è nulla. Se il giocatore 2 gioca σ_2 ogni strategia mista per il giocatore 1 è ottima perchè non esiste una strategia che sia strettamente migliore per cui $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è la risposta migliore a $\sigma_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e lo stesso vale per ogni altra strategia mista per il giocatore 1. Se il giocatore 1 gioca σ_1 , il giocatore 2 ha una utilità attesa nulla, quale che sia σ_2 . Lo stesso vale per il giocatore 2 per cui σ_1 e σ_2 sono una la risposta ottima all'altra e, quindi, costituiscono un equilibrio di Nash.

Definizione 2.5 (Equilibrio di Nash in strategie miste) Un profilo di strategie:

$$\sigma \in \times_{i=1}^n \Delta(S_i) \quad (47)$$

è un equilibrio di Nash per un gioco in forma normale esteso con strategie miste Γ_N^E sse:

$$\tilde{u}_1(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \tilde{u}_1(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \quad (48)$$

$\forall \sigma'_i \in \Delta(S_i) \forall i$, a parità di strategie miste degli altri giocatori. Nel nostro caso si ha $0 \geq 0$ e la disuguaglianza è soddisfatta.

Nota 2.8 In un gioco finito, per ogni numero di giocatori, strategie e payoff esiste un equilibrio di Nash (nel seguito per brevità indicato come NE).

Proposizione 2.1 (Proposizione 8D1 da [MCWG95]) σ^* è un NE di Γ_N^E sse vale la seguente relazione:

$$\tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = \tilde{u}_i(s'_i, \sigma_{-i}^*) \quad (49)$$

$\forall s_i$ e $s'_i \in S_i^+(\sigma_i^*)$ dove $S_i^+(\sigma_i^*)$ rappresenta il supporto della v.a. σ_i^* ovvero l'insieme delle strategie pure per il giocatore i che hanno una probabilità strettamente maggiore di 0 di essere scelte;

$$\tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \geq \tilde{u}_i(s'_i, \sigma_{-i}^*) \quad (50)$$

$\forall s_i \in S_i^+(\sigma_i^*)$ e $s'_i \notin S_i^+(\sigma_i^*)$

Esempio 2.2 Se si ha un gioco con due giocatori nel quale il primo ha le strategie pure A , B e C , alcuni esempi di attribuzioni di probabilità con conseguente definizione del supporto sono i seguenti:

1. $A = 0.3$, $B = 0.5$ e $C = 0.2$: il supporto è formato da A, B, C ;
2. $A = 0$, $B = 0.6$ e $C = 0.4$: il supporto è formato da B, C ;
3. $A = 0$, $B = 0$ e $C = 1$: il supporto è formato da C . In questo caso si parla di **strategia pura o mista degenera**.

Nota 2.9 Per la (49) se ho le strategie pure s_i e s'_i che sono nel supporto queste devono essere indifferenti ovvero devono dare luogo alla stessa utilità attesa altrimenti si privilegia quella con utilità attesa migliore. Per la (50) se la strategia pura s'_i non appartiene al supporto (e perciò ha probabilità nulla di essere scelta) la sua utilità attesa deve essere minore dell'utilità attesa delle strategie pure che appartengono al supporto.

Nota 2.10 Se devo massimizzare la seguente funzione obiettivo:

$$ax + by \quad (51)$$

sotto il vincolo $x + y = 1$ per cui la posso scrivere come $ax + b(1 - x)$ ho i seguenti casi:

1. $a > b$ la soluzione del problema di massimo è $x = 1$ $y = 0$;
2. $a = b$ la soluzione del problema di massimo è di indifferenza dato che ho $ax + by = a(x + y) = a$ a causa del vincolo fra la x e la y ;
3. $a < b$ la soluzione del problema di massimo è $x = 0$ $y = 1$.

Dimostrazione 2.1 Se scrivo la $\tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$ come:

$$\tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \quad (52)$$

ho le probabilità delle strategie pure (le $\sigma_i(s_i)$) e i coefficienti (i valori $\tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$). Posso massimizzare la (52) dando il peso maggiore alle strategie pure con coefficiente più alto. Nel caso del gioco del pari e dispari (vedi) un NE è dato da $\sigma_1 = \sigma_2 = (1/2, 1/2)$. Se il giocatore 2 gioca σ_2 si ha $u_1(\bar{\sigma}_1, \sigma_2) = 0$. Il giocatore 1 all'equilibrio gioca $1/2, 1/2$ perchè se gioca una strategia diversa 2 non è indifferente alle scelte e, in tal caso, non deve giocare, a sua volta, la strategia mista $1/2, 1/2$ come ottimale. Il giocatore 1 ha incentivi a giocare $1/2, 1/2$? Può scegliere una qualunque strategia.

2.7 Parentesi matematica

Con riferimento alla figura 20 (in cui in ascissa si hanno vari possibili valori per la variabile x) si definisce il concetto di **corrispondenza**.

Definizione 2.6 (Definizione di corrispondenza) Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^m$ si definisce come **corrispondenza** da A a $\mathbb{R}^k$ la relazione ϕ che ad ogni elemento x di A associa un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ ovvero:

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad (53)$$

tale che:

$$\forall x \in A \quad \phi(x) \subseteq \mathbb{R}^k \quad (54)$$

Se $m = k = 1$ (vedi la figura 20) si ha che ad elementi x del sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ tramite la:

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad (55)$$

corrispondono sottoinsiemi (in generale) $\phi(x) \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 2.7 (Caso delle funzioni) Data una funzione f definita come:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad (56)$$

si dice che la f è continua nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sse per ogni intorno $I(f(x_0))$ $\exists$ un intorno $I(x_0)$ tale che $\forall x \in I(x_0)$ si ha che $f(x) \in I(f(x_0))$ ovvero punti vicini sono trasformati, mediante una f continua, in punti vicini.

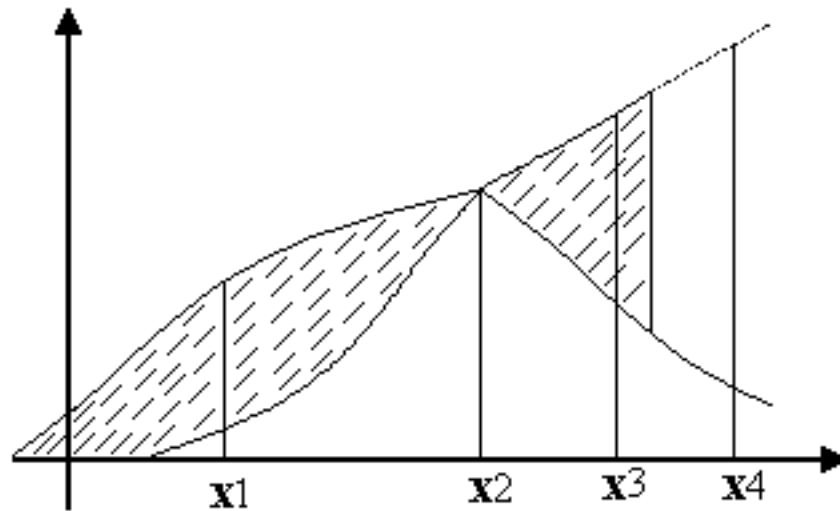


Figura 20: *Corrispondenze (dettagli nel testo)*

Nota 2.11 Si noti che se una funzione f è continua non è detto che sia derivabile (il caso tipico è la funzione $f(x) = |x|$) mentre se una funzione è derivabile allora è continua.

Definizione 2.8 (Continuità per le corrispondenze) Nel caso di una corrispondenza ϕ si parla di:

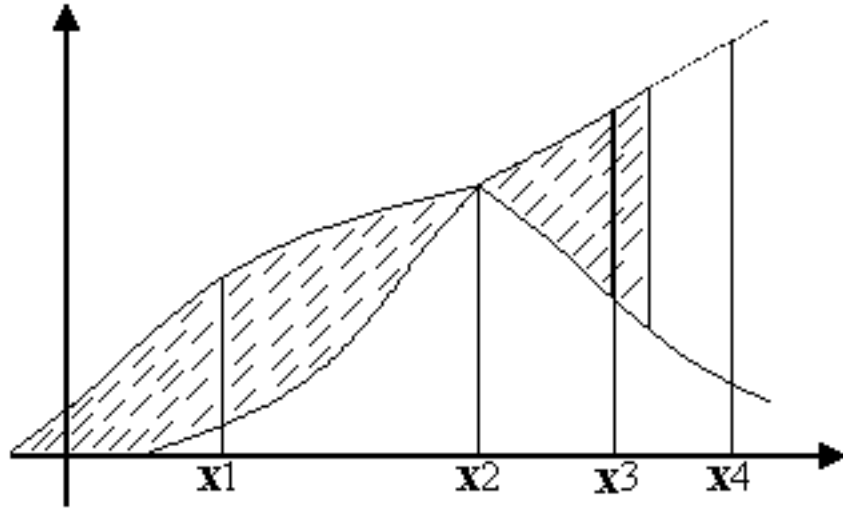
1. continuità inferiore,
2. continuità superiore

Ai nostri scopi si definisce una corrispondenza come **uhc** (ovvero **superiormente semicontinua**) in $x_0 \in A$ se per ogni intorno $I(\phi(x_0))$ di $\phi(x_0)$ (sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, vedi la (54)) esiste un intorno $I(x_0)$ tale che vale la seguente relazione:

$$x \in I(x_0) \cap A \implies \phi(x) \subset I(\phi(x_0)) \quad (57)$$

Nota 2.12 Una corrispondenza ϕ è **uhc** in un insieme A se lo è per ogni punto $x \in A$.

La figura 21 mostra che gli interni possono essere un insieme aperto che contiene un intervallo (come nel caso di x_3) oppure l'unione di due punti (nel caso di x_4) oppure un intorno che contiene un punto (come nel caso di x_2).

Figura 21: *Corrispondenze (dettagli nel testo)***Teorema 2.2 (Teorema del punto fisso o di esistenza degli zeri)**

Data una funzione:

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (58)$$

se f è continua allora esiste x in $[0, 1]$ tale che $f(x) = x$ e tale valore x si dice punto fisso della f . Questo teorema vale per ogni insieme compatto, convesso e non vuoto di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.3 (Teorema di Kakutani) *Il Teorema di Kakutani è una generalizzazione alle corrispondenze del teorema del punto fisso. Si suppone di avere una corrispondenza:*

$$\phi : A \longrightarrow A \quad (59)$$

tale che

1. ϕ è **uhc** in $A \neq \emptyset$ ovvero in tutti i punti di A ;
2. A è convesso e compatto;
3. ϕ è a valori convessi ovvero $\forall x \phi(x)$ è convesso.

La tesi è la seguente:

$$\exists x \in A \text{ t. c. } x \in \phi(x) \quad (60)$$

Con il Teorema di Kakutani si dimostra che ogni gioco finito (cioè con un numero finito di giocatori e di strategie) ha una estensione mista che ha

almeno un NE.

Si ha:

$$\phi : \times_{i=1}^n \Delta(S_i) \longrightarrow \times_{i=1}^n \Delta(S_i) \quad (61)$$

dove $\times_{i=1}^n \Delta(S_i)$ rappresenta l'insieme delle possibili strategie miste e ϕ rappresenta un **vettore di corrispondenze** definito come:

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \quad (62)$$

in cui la corrispondenza i -esima è definita come:

$$\phi_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i \text{ strategia mista per } i \text{ e risposta ottima a } \sigma_{-i}\} \quad (63)$$

ovvero

$$\phi_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i \in \Delta(s_i) : \sigma(s_i) > 0 \Rightarrow \tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq \tilde{u}_i(s'_i, \sigma_{-i})\} \quad (64)$$

$\forall s'_i \in S_i$.

Nota 2.13 Si ha che σ è un NE sse $\sigma \in \phi(\sigma)$ cioè sse σ è punto fisso di ϕ .

Nota 2.14 L'insieme su cui si definiscono le corrispondenze deve essere **compatto** (ovvero chiuso e limitato) e se ϕ è a valori convessi allora $\phi(\sigma_i)$ è convesso.

3 Terza Lezione

3.1 Commenti al Teorema di Kakutani

Si considera il prodotto di n **simplessi**, ciascuno dei quali è convesso per definizione:

$$A = \times_{i=1}^n \Delta(S_i) \quad (65)$$

Si hanno distribuzioni di probabilità combinate con combinazioni convesse per cui ognuno degli insiemi S_i è convesso e lo stesso vale per il loro prodotto cartesiano. Si ha inoltre che ogni $\Delta(S_i)$ è **compatto** ovvero:

1. è **limitato** perchè ha limite inferiore pari a 0 e superiore pari a 1;
2. è **chiuso** perchè è definito mediante disequaglianze deboli quali $\leq$ e $\geq$.

Si deve verificare che la corrispondenza ϕ :

1. è **uhc**;
2. è a **valori convessi**.

Le $\phi_i(\sigma_{-i})$ sono le risposte ottime del giocatore i alle mosse σ_{-i} degli altri $n - 1$ giocatori. Se con S_i si indicano le strategie pure del giocatore i si ha:

$$\phi_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i \in \Delta(S_i) : \sigma_i(s_i) > 0 \text{ \& } \tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq \tilde{u}_i(s'_i, \sigma_{-i})\} \quad (66)$$

$\forall s'_i \in S_i$. La strategia pura migliore è la s_i e la sua utilità attesa è non peggiore (ovvero $\geq$) di quella di ogni altra strategia, a parità di quelle degli altri. Se considero, ad esempio, le seguenti utilità attese delle strategie pure 1, 2, 3 e 4:

1. $u_i(1, \sigma_{-i}) = 3$,
2. $u_i(2, \sigma_{-i}) = 5$,
3. $u_i(3, \sigma_{-i}) = 6$,
4. $u_i(4, \sigma_{-i}) = 6$,

ho che le ultime due sono le migliori per i a parità di mosse degli altri per cui le risposte ottime a σ_{-i} sono quelle che danno probabilità nulla alle strategie pure 1. e 2. e una probabilità non nulla alle strategie pure 3. e 4. (in casi come questo pari a 1/2 per ciascuna strategia). Nel caso in esame si ha $\phi_i(\sigma_{-i}) = \Delta(\{3, 4\})$ mentre se avessi, a parità delle altre, $u_i(4, \sigma_{-i}) = 7$ avrei $\phi_i(\sigma_{-i}) = \Delta(\{4\})$ (sarei nel caso di una strategia pura o mista degenera) mentre avrei $\phi_i(\sigma_{-i}) = \Delta(\{1, 3, 4\})$ se anche la 1 avesse utilità attesa uguale a quelle della 3 e della 4. In ogni caso le distribuzioni di probabilità devono soddisfare le seguenti proprietà:

1. devono attribuire alle singole strategie pure valori di probabilità **non negativi**,
2. la **somma** dei valori di probabilità deve valere 1.

Si ribadisce il fatto che Δ è un insieme convesso per cui lo è ϕ_i (perchè uhc) e, quindi, ϕ (per come è definita). Con $\phi_i^P(\sigma_{-i})$ si indica l'insieme delle strategie pure ottime. Se si ha:

1. $u_i(1, \sigma_{-i}) = 6$,
2. $u_i(2, \sigma_{-i}) = 5$,
3. $u_i(3, \sigma_{-i}) = 6$,
4. $u_i(4, \sigma_{-i}) = 6$,

si ha $\phi_i^P(\sigma_{-i}) = (\{1, 3, 4\})$ in modo che sia:

$$\phi_i(\sigma_{-i}) = \Delta(\phi_i^P(\sigma_{-i})) \quad (67)$$

ovvero le strategie miste (e pure) con una distribuzione di probabilità sono la risposta ottima per le varie strategie pure dello stesso giocatore ovvero sono le **strategie pure ottimali**.

Se considero la seguente relazione:

$$\tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}) > \tilde{u}_i(s'_i, \sigma_{-i}) \quad (68)$$

(dove σ_{-i} è il comportamento prefissato degli altri giocatori) ho che tale relazione deve valere:

1. $\forall s_i \in \phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})$,
2. $\forall s'_i \notin \phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})$,

ovvero tutte le strategie in $\phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})$ danno la stessa utilità attesa mentre quelle che non sono in $\phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})$ ne danno una inferiore (altrimenti tali strategie starebbero in $\phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})$). Se si modifica di poco $\bar{\sigma}_{-i}$ il risultato non cambia perchè le funzioni in gioco sono continue in $\bar{\sigma}_{-i}$ e σ_{-i} è vicino a $\bar{\sigma}_{-i}$ e la relazione continua a valere per la proprietà della permanenza del segno. Se σ_{-i} è vicino, come distanza, a $\bar{\sigma}_{-i}$ allora si ha che valgono ancora le relazioni (67) e (68). Si può dimostrare che, sotto tale ipotesi di vicinanza, si ha:

$$\phi_i(\sigma_{-i}) \subseteq \phi_i(\bar{\sigma}_{-i}) \quad (69)$$

dove $\phi_i(\bar{\sigma}_{-i})$ è il semplice di $\phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})$ e se calcolo $\Delta(\phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i}))$ ho che:

1. le strategie non ottimali continuano a rimanere tali (e risultano, anzi, peggiori),
2. le strategie ottimali continuano a rimanere tali (e risultano, anzi, migliori).

Le strategie ottimali con σ_{-i} sono un sottoinsieme di $\phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})$ in modo che sia:

$$\phi_i(\sigma_{-i}) \subset \phi_i(\bar{\sigma}_{-i}) \quad (70)$$

se σ_{-i} è vicino, come distanza, a $\bar{\sigma}_{-i}$ dal momento che:

$$\phi_i^P(\sigma_{-i}) \subseteq \phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i}) \quad (71)$$

e:

$$\phi_i(\bar{\sigma}_{-i}) = \Delta(\phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})) \quad (72)$$

se ϕ_i^P mi accresce il simpleso e vale la (71) in cui $\phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})$ sono le strategie pure che sono le risposte ottime alle σ_{-i} perchè se $s_i' \notin \phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})$ non può essere ottimale.

Esempio 3.1 *Se ho*

$$4x + 4y + 3z + 2w \quad (73)$$

in cui x, y, w, z sono i pesi di una strategia mista tali che:

1. $x + y + z + w = 1$
2. $x, y, w, z \geq 0$

In ϕ_i^P sono contenute le prime due strategie pure $(1, 0, 0, 0)$ $(0, 1, 0, 0)$ (entrambe con valore 4). Se varia di poco il comportamento degli altri posso avere:

$$4.2x + 3.9y + 3.1z + 2.1w \quad (74)$$

le strategie pure ottime continuano ad essere le prime due dato che le funzioni sono continue rispetto al comportamento degli altri e quindi, se σ_{-i} cambia di poco, le strategie non ottime rimangono tali.

La continuità e la (68) garantiscono che esiste sempre un intorno al cui interno si ha la permanenza delle strategie ottime.

Dato $I(\phi_i(\bar{\sigma}_{-i})) = I(\Delta(\phi_i^P(\bar{\sigma}_{-i})))$, se σ_{-i} è vicino a $\bar{\sigma}_{-i}$ ho che vale la (69) e, quindi:

$$\phi_i(\sigma_{-i}) \subseteq I(\phi_i(\bar{\sigma}_{-i})) \quad (75)$$

per definizione di intorno. Tale proprietà coincide con quanto è necessario che sia verificato perchè una corrispondenza sia **uhc** ovvero che sia $\phi(x) \subseteq I(\phi(x_0))$. L'essere **uhc** si mantiene nel prodotto cartesiano per cui si ha:

1. ϕ_i^P è uhc,
2. ϕ_i è uhc.

Si deve dimostrare che:

$$\sigma \text{ NE} \iff \sigma \in \phi(\sigma) \quad (76)$$

e quindi che esiste $\sigma \in \times_{i=1}^n \Delta(S_i)$ tale che $\sigma \in \phi(\sigma)$ ovvero σ è punto fisso della corrispondenza ϕ e, quindi, è un NE.

Definisco $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in (\phi_1(\sigma_{-1}), \dots, \phi_n(\sigma_{-n}))$ per definizione di ϕ_i , dove σ_i $i = 1, \dots, n$ sono le strategie miste dei vari giocatori. Si ha che:

$$\sigma_i \in \phi_i(\sigma_{-i}) \in S \quad (77)$$

definisce l'insieme delle strategie miste per il giocatore i quando gli altri giocano le loro strategie σ_{-i} ovvero definisce σ_i come risposta ottima a σ_{-i} e ciò vale per ogni giocatore i per cui ϕ_i si dice essere la **best reply** (BR_i) ed è un NE per come lo abbiamo definito. Se $\phi(A)$ è compatto e $\phi(x)$ è chiuso per ogni x allora (vedi [MCWG95]) si può scrivere la definizione in modo diverso ma equivalente usando la ricorrenza.

Il teorema che segue stabilisce che se:

1. S_i è finito,
2. n è finito,

(cioè se ho un numero finito di strategie pure e di giocatori) allora ogni gioco ha almeno un NE per strategie miste.

Teorema 3.1 *L'ipotesi è la seguente. Se $S_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$ è tale che:*

1. $S_i \neq \emptyset$,
2. S (insieme delle strategie pure) è compatto (ovvero è chiuso e limitato),
3. $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in S (ovvero su tutte le strategie pure) per ogni giocatore i

*allora (**tesi**) l'estensione mista del gioco ovvero Γ_N^E (ovvero il gioco in cui si ammettono anche strategie miste) ha almeno un NE.*

In certi casi si hanno, per uno stesso gioco, equilibri:

1. in strategie miste,

2. in strategie pure.

Teorema 3.2 *Sotto l'ipotesi che se $S_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$ è tale che:*

1. $S_i \neq \emptyset$,
2. S (insieme delle strategie pure) è compatto (ovvero è chiuso e limitato) e **convesso**,
3. $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in S (ovvero su tutte le strategie pure) e **quasi concava** in s_i per ogni giocatore i

si ha che (tesi) il gioco in forma normale (senza estensioni miste) ovvero Γ_N ha almeno un NE in strategie pure.

Le ipotesi del Teorema 3.2 sono più forti di quelle del Teorema 3.1: il secondo richiede in più che S sia **convesso** e che la funzione utilità di ogni giocatore u_i sia **quasi concava**.

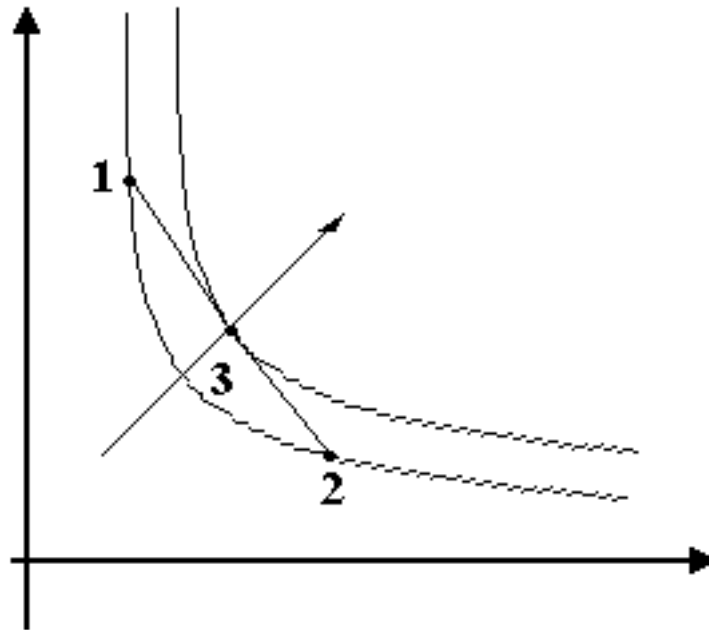


Figura 22: Curve di livello (dettagli nel testo)

Con riferimento alla figura 22, se ho due punti 1 e 2 sulla stessa curva di livello della funzione f ho $f(1) = f(2)$ mentre nel punto 3 la f assume valori maggiori (come indicato dal verso della freccia): il punto 3, infatti, si trova su

una curva di livello in cui la f assume un valore maggiore, in questo caso. Se il dominio è convesso i punti come 3 sono all'interno del dominio. È possibile avere f non concave che godono di tale proprietà e, pertanto, sono dette **quasi concave**. Se, ad esempio, ho:

$$f(x, y) = xy \quad (78)$$

ho che la matrice hessiana (ovvero delle derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e simili) è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nel caso della funzione utilità i punti 1 e 2 rappresentano strategie pure ottimali per il giocatore i data una strategia degli altri giocatori (ovvero σ_{-i}). Nel punto 3 la funzione utilità assume valori o uguali o maggiori: la seconda eventualità non può verificarsi perchè, in tal caso, 1 e 2 non sarebbero punti ottimali per cui i punti compresi fra 1 e 2 sono caratterizzati dallo stesso valore della funzione utilità in modo che l'insieme sia convesso e si applichi il Teorema di Kakutani a Γ_N .

3.2 Applicazioni del concetto di NE

3.2.1 Monopolio

Siamo nel caso di un prodotto senza sostituti o succedanei. La curva di domanda (vedi la figura 23) è una funzione:

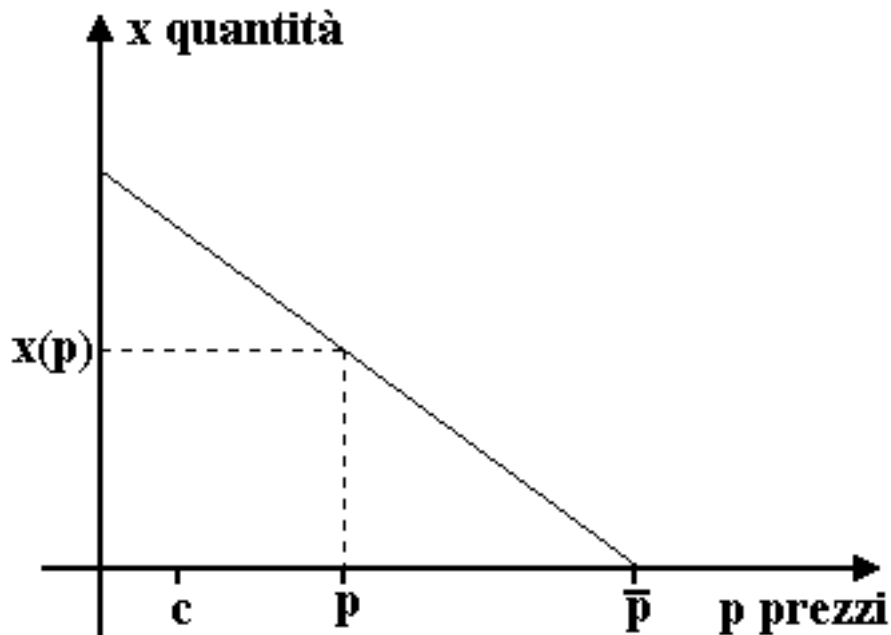
$$x : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty) \quad (79)$$

In figura 23 in ascissa ho i prezzi p e in ordinata le quantità x (tali che $x(0) > 0$). In tale figura sono indicati il **costo marginale dell'impresa** $c > 0$ (ovvero, in prima approssimazione, il costo per unità di prodotto) e il **prezzo di saturazione del mercato** $\bar{p}$. Tale prezzo $\bar{p} \geq 0$ è definito in modo che sia:

1. $x'(p) < 0$ per $p \in [0, \bar{p})$,
2. $x(p) = 0 \quad \forall p \geq \bar{p}$.

Se l'impresa produce una quantità di merce pari a q il costo di produzione per q unità di bene risulta essere $c_q = cq$. Se si vuole che l'azienda abbia un profitto deve essere:

$$c < \bar{p} \quad (80)$$

Figura 23: *Curva di domanda (dettagli nel testo)*

per cui, dato un prezzo p , il profitto dell'impresa (se p è il prezzo unitario e $x(p)$ è la quantità prodotta al prezzo p) è:

$$\pi = (p - c)x(p) \quad (81)$$

ovvero pari al ricavo unitario per la quantità prodotta.

Scopo del monopolista è massimizzare il profitto per $p \in [c, \bar{p}]$. Se $p \leq c$ si avrebbe, dalla (81), un profitto negativo il cui massimo è 0.

Per capire il significato di $x(p)$ si deve pensare che se il monopolista fissa il prezzo p i consumatori acquistano la quantità $x(p)$, individuata dalla curva di domanda.

Con riferimento alla figura 24, si ha che $x(p)$ è invertibile sull'intervallo $[0, \bar{p}]$ in modo che si possa definire la funzione inversa (definita su $[0, x(0)]$):

$$p = y(q) = x^{-1}(q) \quad (82)$$

come il prezzo al quale si vende la quantità q . Se $x(p)$ è la quantità q venduta al prezzo p , $y(q)$ è il prezzo a cui si vende tale quantità, una volta che sia nota la curva di domanda.

Dalla figura 24 si vede che $y(q)$ è il prezzo (unitario) che è necessario praticare

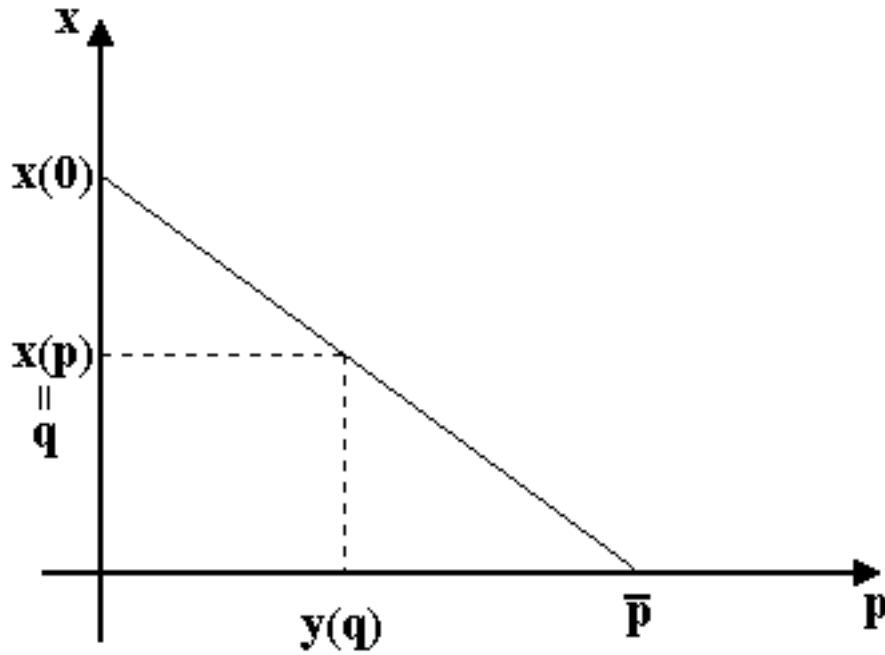


Figura 24: *Prezzi e quantità sulla curva di domanda (dettagli nel testo)*

per vendere la quantità q .

Da tutto ciò segue che la quantità:

$$(y(q) - c)q \quad (83)$$

deve essere massimizzata su $[0, x(0)]$, se il monopolista fissa la quantità² q . Si definisce, pertanto, la funzione profitto:

$$\pi(q) = (y(q) - c)q \quad (84)$$

Lo scopo è ricercare il massimo di tale funzione su $[0, x(0)]$. Sotto l'ipotesi che la y sia derivabile, derivo rispetto a q e impongo la condizione del primo ordine:

$$\frac{d\pi(q)}{dq} = 0 \quad (85)$$

²Si hanno due casi:

1. il monopolista fissa il prezzo p a cui vende la quantità $x(p)$;
2. il monopolista fissa la quantità q che vende al prezzo $y(q)$.

In entrambi i casi si ha la relazione fra quantità e prezzo stabilita dalla curva di domanda.

per cui ho, dalla (84):

$$\pi'(q) = y'(q)q + (y(q) - c) = 0 \quad (86)$$

sotto l'ipotesi che sia $y(q) > c$ altrimenti (vedi la 84) avrei profitti negativi. È facile vedere che:

1. $\pi'(0) = y(0) - c > 0$ per cui 0 non è un punto di estremo (si ha che se $q = 0$ $y(0) = \bar{p}$),
2. $\pi'(x(0)) < 0$ per cui $x(0)$ non è un punto di estremo (è il valore in $p = 0$ cioè $x(0)$),

in più si ha:

$$\pi''(q) = y''(q)q + y'(q) + y'(q) < 0 \quad (87)$$

dato che $y''(q) = 0$ (perchè $y(q)$ è una relazione lineare) e $y'(q) < 0$ per definizione (ovvero la funzione profitto è strettamente concava).

Si hanno due curve:

1. x con $x' < 0$,
2. $y = x^{-1}$ con $y' < 0$ e $y'(q)q < 0$ (essendo $q > 0$ per definizione).

All'ottimo deve essere $\pi'(q) = 0$ ovvero, dalla (86):

$$y(q) = c - y'(q)q > c \quad (88)$$

essendo $y'(q) < 0$. Da ciò discende che si vende sopra costo per cui si fanno profitti. A rigore non si può parlare di NE perchè si ha un solo giocatore in un caso in cui è equivalente scegliere i prezzi o scegliere le quantità (data la relazione che esiste fra la x e la y).

3.2.2 Duopolio

Vedremo due tipi di duopolio:

1. uno in cui le imprese possono fissare i prezzi, detto **duopolio di Bertrand**,
2. uno in cui le imprese possono fissare le quantità, detto **duopolio di Cournot**.

Nel caso del **duopolio di Bertrand** si hanno **due imprese** che scelgono **simultaneamente e indipendentemente** i prezzi **una sola volta** ovvero:

1. l'impresa 1 fissa il prezzo p_1 ,
2. l'impresa 2 fissa il prezzo p_2 ,

in modo che, se x_i è la quantità di merce venduta dall'impresa i ($i = 1, 2$) si ha:

$$x_i(p_1, p_2) = \begin{cases} x(p_i) & \text{se } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}x(p_i) & \text{se } p_i = p_j \\ 0 & \text{se } p_i > p_j \end{cases} \quad (89)$$

ovvero:

1. se l'impresa i pratica un prezzo inferiore a quello dell'impresa j ($i, j = 1, 2, i \neq j$), ovvero se $p_i < p_j$, allora si accaparra tutto il mercato e vende in condizioni di monopolio;
2. se l'impresa i pratica un prezzo uguale a quello dell'impresa j ($i, j = 1, 2, i \neq j$), ovvero se $p_i = p_j$, allora le due imprese si spartiscono il mercato ovvero vendono una quantità pari alla metà della quantità in condizioni di monopolio;
3. se l'impresa i pratica un prezzo superiore a quello dell'impresa j ($i, j = 1, 2, i \neq j$), ovvero se $p_i > p_j$, allora l'impresa i è fuori mercato e non vende nulla.

Ciascuna delle due imprese vuole massimizzare il proprio profitto definito come segue:

$$\pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c)x_i(p_1, p_2) \quad (90)$$

dove $x_i(p_1, p_2)$ è la quantità venduta dall'impresa $i = 1, 2$, quantità che tiene conto dei prezzi praticati da entrambe le imprese.

Procedendo in modo "canonico", dopo aver individuato i giocatori (le due imprese) e i relativi payoff (le funzioni profitto) si definiscono le strategie delle imprese (ovvero gli insiemi dei prezzi che possono praticare) come:

$$S_i = [0, \infty) \quad (91)$$

in modo da avere un gioco in forma normale di cui si vuole un NE. Nel seguito vedremo che tale gioco ammette un solo NE in strategie pure e che tale NE è dato dalla seguente scelta dei prezzi da parte delle due imprese:

$$\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = c \quad (92)$$

ovvero al NE entrambe le imprese vendono a prezzo di costo e, pertanto, nessuna delle due fa profitto. Da tali premesse (e dalle (89)) è facile vedere

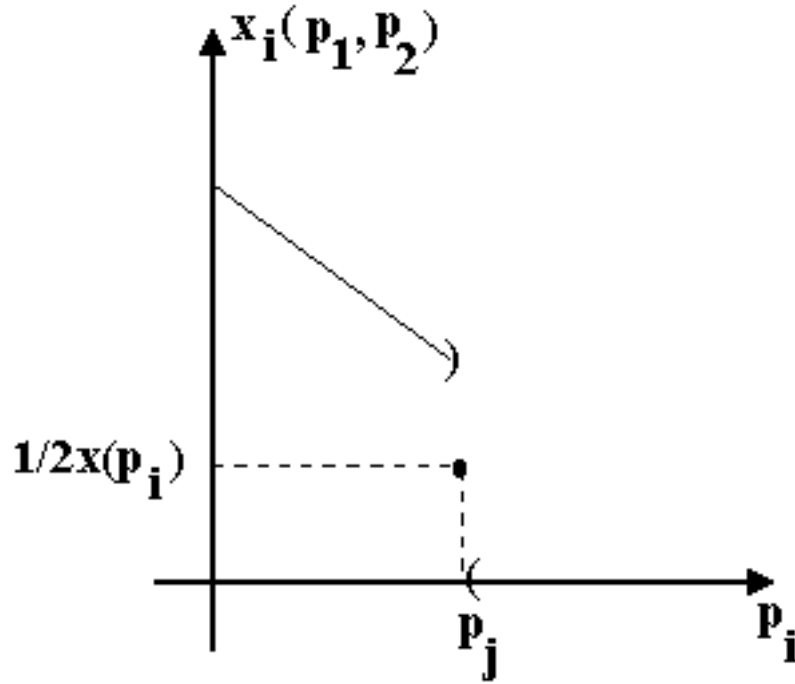


Figura 25: *Curva dei profitti (dettagli nel testo)*

come la curva delle quantità $x_i(p_1, p_2)$ sia discontinua ed abbia l'andamento mostrato in figura 25 che esprime le (89).

Un andamento analogo si ha per le funzioni che esprimono i profitti dei due duopolisti:

$$\pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c)x_i(p_1, p_2) \quad (93)$$

in cui $(p_i - c)$ è un fattore di scala.

Dimostrazione 3.1 *Si deve dimostrare che:*

$$\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = c \quad (94)$$

è un NE. Si considera per primo il duopolista³ 1 (l'altro lo indichiamo con 2) e si suppone che l'altro faccia determinate scelte. Si vuole dimostrare che $\dot{p}_i = c$ è la best reply a $\dot{p}_j = c$, $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$. Se 2 sceglie $\dot{p}_2 = c$ si ha:

1. $\dot{\pi}_2 = 0$,
2. $\dot{p}_1 = c$ è ottima con $\dot{\pi}_1 = 0$.

³Ovvero si considerano le cose dal punto di vista del primo duopolista.

Infatti si hanno i casi seguenti:

1. se $p_1 > c$, 1 non vende nulla (perchè fa un prezzo più alto di 2) per cui $x_1(p_1, p_2) = 0$ e quindi $\dot{\pi}_1 = 0$;
2. se $p_1 < c$, 1 venderebbe la quantità $x_1(p_1, p_2) = x(p_1) > 0$ sotto costo con un profitto negativo.

Se considero le cose dal punto di vista di 2 e penso che 1 scelga $\dot{p}_1 = c$ ho i seguenti casi:

1. se $p_2 > c$, 2 non vende nulla (perchè fa un prezzo più alto di 1) per cui $x_2(p_1, p_2) = 0$ e quindi $\dot{\pi}_2 = 0$;
2. se $p_2 < c$, 2 venderebbe la quantità $x_2(p_1, p_2) = x(p_2) > 0$ sotto costo con un profitto negativo;

per cui, per simmetria, ho che $\dot{p}_2 = c$.

Si ha, quindi, che $\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = c$ è un NE dato che nessuna delle due imprese ha interesse a deviare. Dopo aver dimostrato l'**esistenza** di un NE devo dimostrare la sua **unicità** (non garantita dalla teoria) ovvero devo dimostrare che il NE che ho trovato è unico per il gioco in esame. A tal fine si usa la seguente definizione di tipo negativo e a carattere empirico.

Definizione 3.1 Una condizione del gioco non è un NE se un giocatore ha un corso d'azione migliore a parità di quelli degli altri.

Nel caso delle due imprese devo verificare che non ci siano altri equilibri con $p_1 < c$ oppure con $p_2 > c$ (dove p_1 e p_2 sono i prezzi unitari praticati dalle due imprese). Si hanno i casi seguenti.

1. $p_1 < c$: in questo caso $\min\{p_1, p_2\} < c$ per cui almeno una impresa pratica un prezzo inferiore al costo con profitto negativo per cui ha tutto l'interesse a migliorare la propria condizione praticando un prezzo pari a c (la situazione $p_2 < c$ è speculare). Tale condizione non è un NE perchè l'impresa che vende sottocosto ha tutto l'interesse a deviare vendendo a un prezzo maggiore.
2. Non esiste un equilibrio del tipo $p_1 > p_2 \geq c$ oppure $p_2 > p_1 \geq c$. Si vedono separatamente i vari casi.
 - (a) $p_1 > p_2 = c$: l'impresa 2 fa un profitto nullo (perchè vende a prezzo di costo) mentre la 1 fa un profitto nullo (perchè pratica un prezzo più alto della 2 e non vende nulla). La condizione non è un NE perchè la 2 può scegliere di migliorare la propria condizione

alzando il proprio prezzo p_2 nell'intervallo (c, p_1) : in tal modo si mantiene tutto il mercato facendo profitti positivi (se si arrivasse alla condizione $p_2 = p_1$ si avrebbe che anche la 1 rientrerebbe in gioco e le due imprese si spartirebbero il mercato).

- (b) $p_1 > p_2 > c$: anche in questo caso non si ha un NE. L'impresa 1 fa profitti nulli perchè non vende nulla (dal momento che pratica un prezzo maggiore della 2) e può migliorare la propria condizione facendo variare il proprio prezzo in (c, p_2) in modo da estromettere 2 dal mercato (e riportando l'analisi al caso precedente).

Il caso $p_2 > p_1 \geq c$ lo si analizza in modo analogo scambiando i ruoli delle due imprese.

3. $p_1 = p_2 > c$: neanche in questo caso si ha un NE. Le due imprese fanno profitti ma ciascuna può migliorare.

Vediamo cosa può fare la 1 (il caso della 2 è speculare): se p_1 viene ridotto di poco (ovvero passa a $p_1 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ piccolo) allora l'impresa 1 si prende tutto il mercato (agisce come monopolista) ma la stessa identica strategia può essere adottata dalla 2.

Si ha un NE per $p_1 = p_2 = c$ sebbene tale equilibrio non sia **Pareto efficiente** perchè il profitto delle due imprese è nullo: se le due imprese si accordassero per prezzi $p_1 = p_2 > c$ continuerebbero a spartirsi il mercato facendo un profitto positivo.

Abbiamo visto il caso del **duopolio di Bertrand** in cui due imprese fissano simultaneamente e in modo indipendente i prezzi della propria merce. Se le imprese sono n si ha un NE con:

$$\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \dots = \dot{p}_n = c \quad (95)$$

ma anche altri in cui almeno due imprese praticano un prezzo pari a c mentre le rimanenti ne praticano uno più alto per cui anche la seguente situazione (insieme a tutte le altre analoghe)

$$c = \dot{p}_1 = \dot{p}_2 < \dot{p}_3 < \dots < \dot{p}_n \quad (96)$$

è un NE.

Passiamo ora ad esaminare il **duopolio di Cournot** con due imprese ovvero il caso in cui le due imprese fissano **simultaneamente** e **indipendentemente** le quantità q_1 e q_2 che producono. Le strategie pure sono, in questo caso, le quantità che le singole imprese possono decidere di produrre per cui si ha:

$$S_i = [0, \infty) \quad (97)$$

con $i = 1, 2$. Date le quantità q_1 e q_2 il prezzo di mercato è tale che i consumatori vogliono consumare la quantità $q_1 + q_2$ (ovvero l'ipotesi che si fa è che tutta la produzione sia venduta e non ci siano eccedenze).

Considerando che $y(q)$ indica il prezzo unitario della quantità q , nel caso in esame si ha un prezzo unitario pari a $y(q_1 + q_2)$ in modo che i profitti delle due imprese siano pari a:

$$\pi_i(q_1, q_2) = (y(q_1 + q_2) - c)q_i \quad (98)$$

($i = 1, 2$) in cui c è di nuovo il costo unitario di produzione (si assume di non avere costi fissi). Il calcolo dei punti critici viene fatto calcolando le derivate parziali delle funzioni profitto, ovvero imponendo la condizione del primo ordine.

Per l'impresa 1 si ha:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = y'(q_1 + q_2)q_1 + (y(q_1 + q_2) - c) \quad (99)$$

Per l'impresa 2 si ha:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = y'(q_1 + q_2)q_2 + (y(q_1 + q_2) - c) \quad (100)$$

Si deve verificare che si ha un equilibrio in cui una impresa sceglie di non produrre ovvero che $q_1 = 0$ è un ottimo per l'impresa 1. La funzione profitto per l'impresa 1 ha la forma:

$$\pi_1(q_1, q_2) = (y(q_1 + q_2) - c)q_1 \quad (101)$$

per cui, se $q_1 = 0$, si ha:

$$\pi_1(q_1, q_2) = 0 \quad (102)$$

e, pertanto, poichè $y(q_2) - c \leq 0$, si ha, per l'impresa 1:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} \leq 0 \quad (103)$$

Se $q_1 = 0$ si ha, per l'impresa 2:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = y'(q_2)q_2 + y(q_2) - c \quad (104)$$

e, quindi, poichè:

1. $y'(q_2) < 0$ per come ho definito la y ,

2. $q_2 \geq 0$ per definizione di quantità prodotta,

3. $y(q_2) - c \leq 0$,

la q_2 ottimale è tale che:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} < 0 \quad (105)$$

ovvero tale che:

$$q_2 = 0 \quad (106)$$

Al crescere di q_2 il profitto π_2 decresce per cui si ha un massimo in 0. Riassumendo si ha che se per l'impresa 1 è ottimale scegliere $q_1 = 0$ allo-

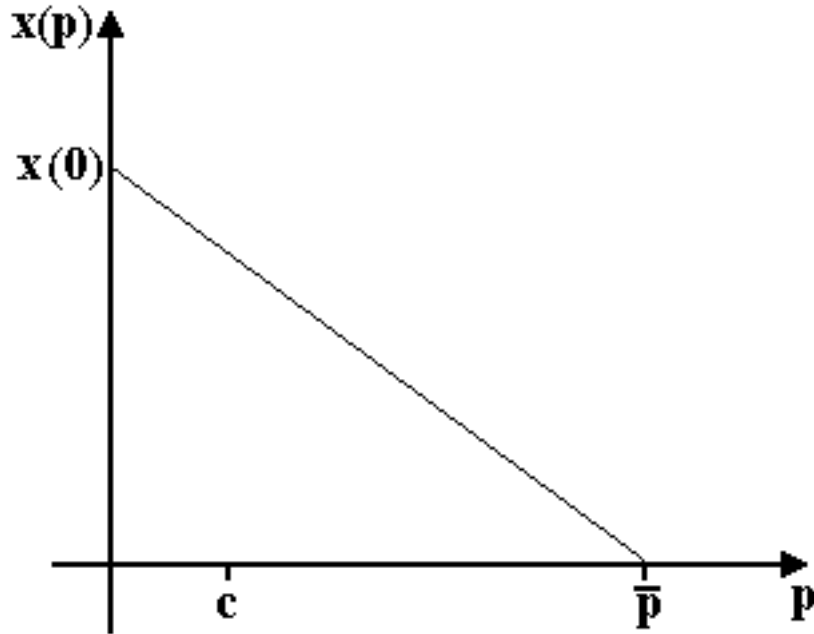


Figura 26: Ancora sulla curva dei profitti (dettagli nel testo)

ra per l'impresa 2 è ottimale scegliere $q_2 = 0$. Se (vedi la figura 26) $x(0)$ indica la quantità che si vende a prezzo nullo mentre $y(0)$ è il prezzo a cui si vende una quantità pari a 0 (si noti che la coppia $(y(0), 0)$ deve individuare un punto sulla curva di domanda) se avessi $y(0) \leq c$ avrei $\bar{p} \leq c$ mentre, per ipotesi, ho che $\bar{p} > c$. Per avere un profitto le imprese non possono produrre quantità nulle per cui non si può avere un NE se si ha $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ perchè entrambe hanno interesse a deviare da tale situazione in modo da fare profitti positivi.

Si suppone, pertanto, di avere:

$$1. \dot{q}_1 > 0$$

$$2. \dot{q}_2 > 0$$

di nuovo con le strategie:

$$S_i = [0, \infty) \quad (107)$$

per $i = 1, 2$.

Se si impongono le condizioni del primo ordine:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = y'(q_1 + q_2)q_1 + (y(q_1 + q_2) - c) = 0 \quad (108)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = y'(q_1 + q_2)q_2 + (y(q_1 + q_2) - c) = 0 \quad (109)$$

confrontando le due espressioni si ha che all'ottimo le due imprese producono le stesse quantità per cui si ha:

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 \quad (110)$$

In tal caso, sostituendo tali valori in una delle due derivate, si ottiene la seguente relazione necessaria per l'equilibrio:

$$y'(2\dot{q}_1)\dot{q}_1 + y(2\dot{q}_1) = c \quad (111)$$

Si vuole sapere quante soluzioni ha la (111): dato che, per $q_1 = q_2 = q$, $\pi''(q) \leq 0$ la (111) ha una sola soluzione dal momento che è decrescente in $\dot{q}_1$. Come è fatta tale soluzione all'equilibrio?

Se con q_M indico la quantità all'equilibrio in condizioni di monopolio ho la seguente soluzione:

$$y'(q_M)q_M + y(q_M) = c \quad (112)$$

Nella (111) si ha che $y'(2\dot{q}_1)\dot{q}_1 \leq 0$ essendo $y' < 0$ mentre $y(2\dot{q}_1)$ è il prezzo per la quantità $2\dot{q}_1$ per cui, riarrangiando i termini della (111), è facile vedere che:

$$y(2\dot{q}_1) = c - y'(2\dot{q}_1)\dot{q}_1 > c \quad (113)$$

come nel caso del monopolio.

Se si suppone che sia:

$$2\dot{q}_1 = q_M \quad (114)$$

(cioè la quantità di equilibrio della (111) (ovvero nel caso delle due imprese) coincide (almeno per quanto riguarda la quantità totale venduta) con la quantità nel caso di monopolio) si ha:

$$\dot{q}_1 = \frac{q_M}{2} \quad (115)$$

per cui, sostituendo la (115) nella (111) e considerando la (112)), si ha:

$$y'(q_M)\frac{q_M}{2} + y(q_M) > c \quad (116)$$

dal momento che $y'(q_M) < 0$ e che si può scrivere tale relazione come:

$$y'(q_M)q_M - y'(q_M)\frac{q_M}{2} + y(q_M) = c - y'(q_M)\frac{q_M}{2} > c \quad (117)$$

Si deve prendere:

$$\dot{q}_1 > \frac{q_M}{2} \quad (118)$$

ovvero:

$$2\dot{q}_1 > q_M \quad (119)$$

per avere di nuovo l'equilibrio ovvero si deve produrre di più che in condizioni di monopolio.

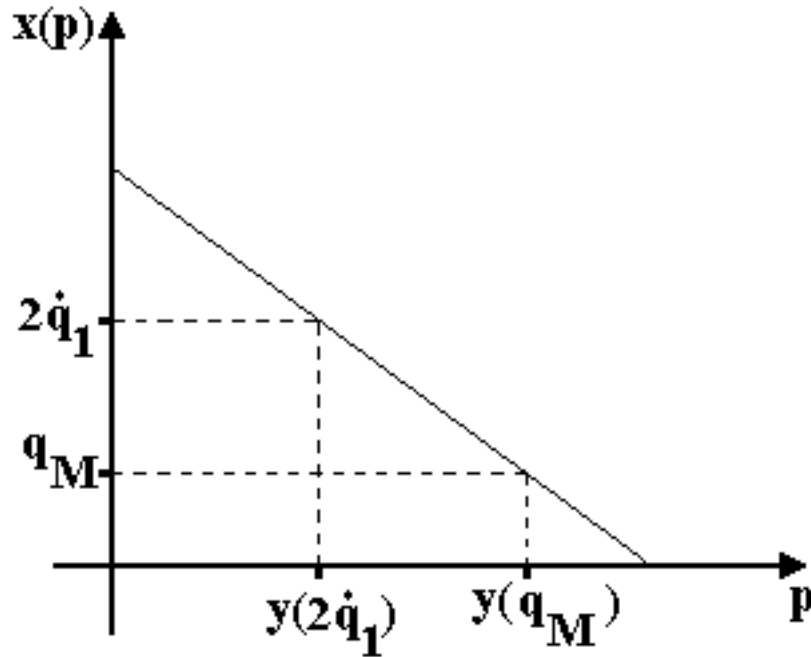


Figura 27: *Prezzi ed equilibri (dettagli nel testo)*

La figura 27 mostra come, nel passare da q_M a $2\dot{q}_1$ il prezzo di vendita diminuisca perchè la y ha un andamento decrescente. La situazione non è Pareto ottima perchè, se le imprese si accordassero per produrre entrambe una quantità pari a $q_M/2$ (in modo che la quantità totale sarebbe q_M) si avrebbe il

prezzo del caso di monopolio con i profitti del caso di monopolio. Anche se le imprese si accordano, entrambe hanno interesse a produrre un po' di più. Con $n \geq 3$ imprese si ha:

$$y'(n\dot{q}_1)\dot{q}_1 + y(n\dot{q}_1) = c \quad (120)$$

Si vuole sapere cosa accade se $n \rightarrow +\infty$. Si ha che devono valere le seguenti

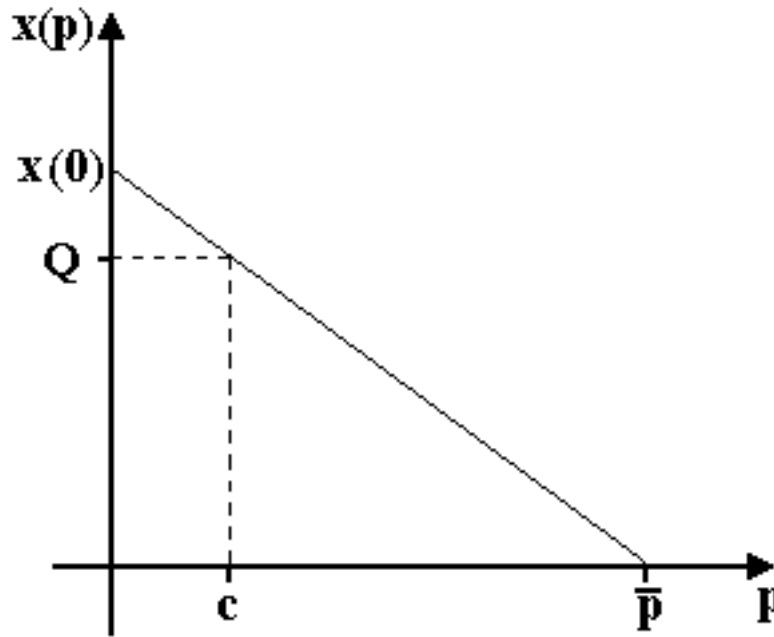


Figura 28: *Prezzi ed equilibri (dettagli nel testo)*

diseguaglianze perchè sia soddisfatta la (120):

$$y'(n\dot{q}_1)\dot{q}_1 < 0 \quad (121)$$

$$y(n\dot{q}_1) > c \quad (122)$$

La figura 28 illustra la quantità Q che viene venduta al prezzo di costo c : se la quantità varia in $(0, Q)$ il prezzo varia in $(c, \bar{p})$ mentre se si vende una quantità superiore a Q si vende sottocosto (ovvero ad un prezzo inferiore a c e, quindi, con profitti negativi).

Dalla (122) segue che il prezzo di vendita varia in $(c, \bar{p})$. Per ogni valore di n si ha, quindi, che deve essere:

$$n\dot{q}_1 \leq Q \quad (123)$$

dove $\dot{q}_1$ dipende da n mentre Q è fissato (perchè dipende solo da c e dalla curva di domanda come è illustrato dalla figura 29). Si ha quindi:

$$\dot{q}_1 \leq \frac{Q}{n} \quad (124)$$

per cui se $n \rightarrow +\infty$ si ha $\dot{q}_1 \rightarrow 0$ dato che $\dot{q}_1$ è, per definizione, una quantità non negativa. Da quanto detto segue, quindi, che:

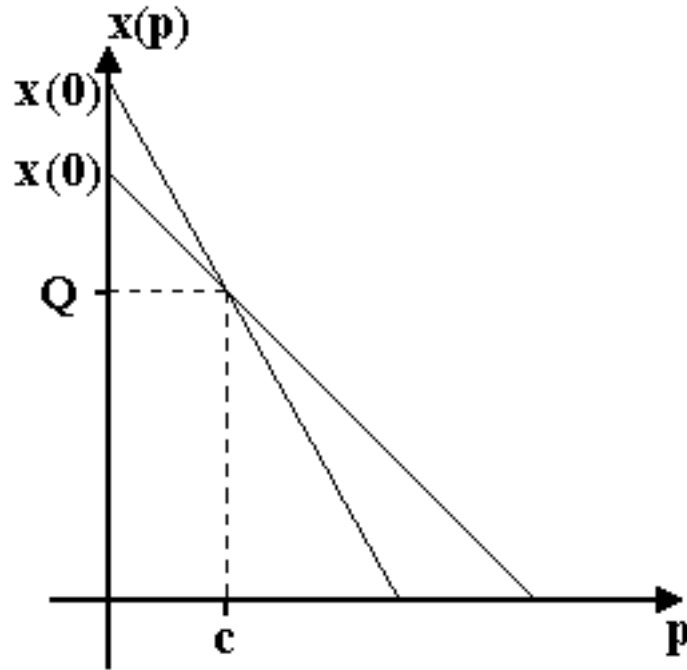


Figura 29: Curve di domanda (dettagli nel testo)

$$y'(n\dot{q}_1)\dot{q}_1 \rightarrow 0 \quad (125)$$

dato che $y'(n\dot{q}_1)$ è un valore prefissato e costante e $\dot{q}_1 \rightarrow 0$ e, infine, che:

$$y(n\dot{q}_1) \rightarrow c \quad (126)$$

ovvero se il numero delle imprese tende a ∞ il prezzo di vendita tende al prezzo di costo c .

La quantità venduta per ogni prezzo è data dalla:

$$0 \leq n\dot{q}_1 \leq x(0) \quad (127)$$

dove $x(0)$ è la quantità venduta a prezzo nullo (che dipende dalla curva di domanda). Se divido m. a m. per n ottengo, dalla catena di disequaglianze (127):

$$0 \leq \dot{q}_1 \leq \frac{x(0)}{n} \quad (128)$$

per cui se $n \rightarrow +\infty$ per il teorema dei carabinieri si ha, di nuovo, $\dot{q}_1 \rightarrow 0$.

3.3 Esercizi

Vediamo, in chiusura di lezione, alcuni esercizi su giochi (descritti in forma normale o estesa) per i quali si vogliono i NE. Si ricorda la definizione di NE. Se S_i^+ è il supporto per il giocatore i ovvero l'insieme delle sue strategie pure cui si assegna una probabilità non nulla si ha che:

una strategia σ è un NE se, per ogni giocatore i , valgono le seguenti relazioni:

$$\tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}) = \tilde{u}_i(s'_i, \sigma_{-i}) \quad (129)$$

$\forall s_i, s'_i \in S_i^+(\sigma_i)$ e:

$$\tilde{u}_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq \tilde{u}_i(s'_i, \sigma_{-i}) \quad (130)$$

$\forall s_i \in S_i^+(\sigma_i)$ e $\forall s'_i \notin S_i^+(\sigma_i)$.

3.3.1 Esercizio 1

La descrizione in forma normale dell'esercizio è data in figura 30. Da una analisi della bimatrice è facile vedere che non si ha dominanza, nè stretta nè debole, per nessuno dei due giocatori. Per prima cosa si cercano i NE in strategie pure considerando il giocatore con il minor numero di strategie. Si vede facilmente che:

1. se 2 gioca D la miglior mossa per 1 è B ma se 1 gioca B la miglior mossa per 2 è E per cui non si ha un NE se 2 gioca D ;
2. se 2 gioca E la miglior mossa per 1 è C ma se 1 gioca C la miglior mossa per 2 è D per cui non si ha un NE se 2 gioca E .

Non si hanno NE se 2 gioca una strategia pura (come è ovvio che sia, considerazioni analoghe portano ad un identico risultato se si analizzano per prime le mosse possibili per il giocatore 1). In ogni NE, 2 gioca una strategia mista ovvero 2 assegna una distribuzione di probabilità alle proprie mosse/strategie D ed E . A questo punto 1 si pone il problema di scegliere una strategia pura oppure una mista.

Si ha, quindi, che 2 gioca una strategia mista e, quindi, il suo supporto è:

$$S_2^+(\sigma_2) = \{D, E\} \quad (131)$$

		2	
		D	E
1	A	2 6	7 4
	B	6 1	4 3
	C	0 5	10 2

Figura 30: *Forma normale (dettagli nel testo)*

Se 1 gioca una strategia pura (ovvero assegna probabilità pari a 1 ad una sua strategia e 0 alle altre, ovvero sceglie una strategia con certezza) 2 deve essere indifferente fra D ed E ma:

1. se 1 gioca A , 2 sceglie D ,
2. se 1 gioca B , 2 sceglie E ,
3. se 1 gioca C , 2 sceglie D ,

per cui se 1 gioca una strategia pura lo stesso fa 2. Si è visto, però, che in questo caso (entrambi giocano strategie pure) non si hanno NE per cui se 2 gioca una strategia mista lo stesso deve fare 1. Se:

$$S_2^+(\sigma_2) = \{D, E\} \quad (132)$$

allora la condizione di indifferenza per 2 (nei confronti delle sue strategie D ed E) risulta essere la seguente:

$$\tilde{u}_2(D, \sigma_1) = \tilde{u}_2(E, \sigma_1) \quad (133)$$

in cui σ_1 è la strategia mista di 1. A questo punto si deve individuare il supporto per 1. A tale scopo si usa la tabella 1.

A	>0	>0	>0	=0
B	>0	>0	=0	>0
C	>0	=0	>0	>0

Tabella 1: Possibili supporti per 1

La tabella caratterizza le probabilità associate alle strategie per 1: ogni colonna definisce un supporto per 1. Non è possibile avere una colonna con due 0 perchè, in questo caso, si avrebbe che 1 gioca una strategia pura e tale eventualità, abbiamo visto, non dà luogo a NE. La prima colonna, ad esempio, individua il supporto:

$$S_1^+(\sigma_1) = \{A, B, C\} \quad (134)$$

In questo caso per 1 deve essere ($\sim_i$ individua una relazione di indifferenza fra le strategie del giocatore i):

$$A \sim_1 B \sim_1 C \quad (135)$$

dal momento che se ne preferisse una giocherebbe quella.

Per imporre tale indifferenza attribuisco a 2 una distribuzione di probabilità del tipo:

1. il giocatore 2 gioca D con probabilità x ,
2. il giocatore 2 gioca E con probabilità $1 - x$,

e calcolo i valori della funzione utilità per 1. Si ha:

1. $\tilde{u}_1(A, \sigma_2) = 2x + 7(1 - x)$
2. $\tilde{u}_1(B, \sigma_2) = 6x + 4(1 - x)$
3. $\tilde{u}_1(C, \sigma_2) = 0x + 10(1 - x)$

Per la $B \sim_1 C$ deve essere $\tilde{u}_1(C, \sigma_2) = \tilde{u}_1(B, \sigma_2)$. Eguagliando le due espressioni e svolgendo i calcoli si ottiene $x = 1/2$ ma per tale valore si ha $\tilde{u}_1(A, \sigma_2) \neq \tilde{u}_1(B, \sigma_2)$ per cui il supporto scelto non va bene perchè per esso la condizione di indifferenza per le strategie di 1 non può essere soddisfatta. Si ricorda che le utilità del tipo $\tilde{u}_1(A, \sigma_2)$ sono specializzazioni della $\tilde{u}_1(\sigma_i, \sigma_{-i})$ al caso presente: il caso generale mostra come l'utilità dipenda dai payoff di i e dalle probabilità associate alle strategie degli altri giocatori. Vediamo ora il caso:

$$S_1^+(\sigma_1) = \{B, C\} \quad (136)$$

(ovvero la quarta colonna della tabella 1). In questo caso deve essere:

$$B \sim_1 C \succeq_1 A \quad (137)$$

ovvero B e C sono fra loro indifferenti ed entrambe sono preferite ad A . Se si risolve la condizione di uguaglianza delle utilità:

$$\tilde{u}_1(C, \sigma_2) = \tilde{u}_1(B, \sigma_2) \quad (138)$$

si ricava $x = 1/2$ da cui:

$$\tilde{u}_1(C, \sigma_2) = \tilde{u}_1(B, \sigma_2) = 5 > \frac{9}{2} = \tilde{u}_1(A, \sigma_2) \quad (139)$$

per cui si è verificato che B e C sono fra loro indifferenti e preferiti ad A . Si è trovato, pertanto, un possibile NE in strategie miste con:

$$\sigma_2(D) = \sigma_2(E) = \frac{1}{2} \quad (140)$$

A questo punto si deve vedere con che probabilità 1 deve giocare le proprie strategie contenute nel supporto corrente perchè 2 sia indifferente fra D ed E . Se 1 gioca B con probabilità z e gioca C con probabilità $1 - z$ (A non appartiene al supporto corrente) posso calcolare le utilità attese per 2:

$$\tilde{u}_2(D, \sigma_1) = z + 5(1 - z) \quad (141)$$

$$\tilde{u}_2(E, \sigma_1) = 3z + 2(1 - z) \quad (142)$$

e dalla $\tilde{u}_2(D, \sigma_1) = \tilde{u}_2(E, \sigma_1)$ ricavo $z = 3/5$. Si ha quindi che (σ_1, σ_2) è un NE se:

$$\sigma_1 = (0, 3/5, 2/5) \quad (143)$$

$$\sigma_2 = (1/2, 1/2) \quad (144)$$

A questo punto (vedi anche la figura 31 (a)) si vuole verificare se esiste un NE con:

$$S_1^+(\sigma_1) = \{A, B\} \quad (145)$$

(seconda colonna della tabella 1) ovvero si vuole imporre che sia:

$$A \sim_1 B \succeq_1 C \quad (146)$$

Se attribuisco di nuovo le probabilità x e $1 - x$ alle strategie di 2 posso calcolare

$$\tilde{u}_1(A, \sigma_2) = 2x + 7(1 - x) \quad (147)$$

		(a)		(b)	
1 \ 2		D	E	D	E
	A	2 6	7 4	2 6	7 4
	B	6 1	4 3	C	0 5
					10 2

Figura 31: *Supporti per 1 (dettagli nel testo)*

$$\tilde{u}_1(B, \sigma_2) = 6x + 4(1 - x) \quad (148)$$

Dalla loro uguaglianza ricavo $x = 3/7$. In base a tale valore devo verificare che sia $A \sim_1 B \succeq_1 C$ avendo imposto $A \sim_1 B$. In questo caso ho:

$$\tilde{u}_1(C, \sigma_2) = (1 - x)10 = \frac{40}{7} \quad (149)$$

$$\tilde{u}_1(C, x = \frac{3}{7}) = \frac{40}{7} > \frac{34}{7} = \tilde{u}_1(B, x = \frac{3}{7}) \quad (150)$$

per cui il supporto scelto non va bene dato che A e B non sono preferite rispetto a C . Un esame della figura 31 (a) permette di appurare che non si ha dominanza stretta per 2 per cui 2 gioca una strategia mista con probabilità x e $1 - x$ ma, come visto, il supporto scelto per 1 non è quello giusto.

Come ultimo caso (vedi anche la figura 31 (b)) si vuole verificare se esiste un NE con:

$$S_1^+(\sigma_1) = \{A, C\} \quad (151)$$

(ovvero la terza colonna della tabella 1). La figura 31 (b) mostra una dominanza stretta per 2 di D su E per cui 2 non può essere indifferente fra le due strategie e quindi sceglie una strategia pura (ovvero la D) e lo stesso fa 1 scegliendo la A (che, nel caso 2 scelga D nel gioco ridotto di figura 31 (b), gli dà una utilità maggiore).

3.3.2 Esercizi (cenni) 2, 3 e 4

La figura 32 presenta la descrizione in forma estesa di un gioco (a somma nulla) a mosse successive (ma il cui esito è nascosto, vedi oltre) con due giocatori. Il gioco si svolge come segue:

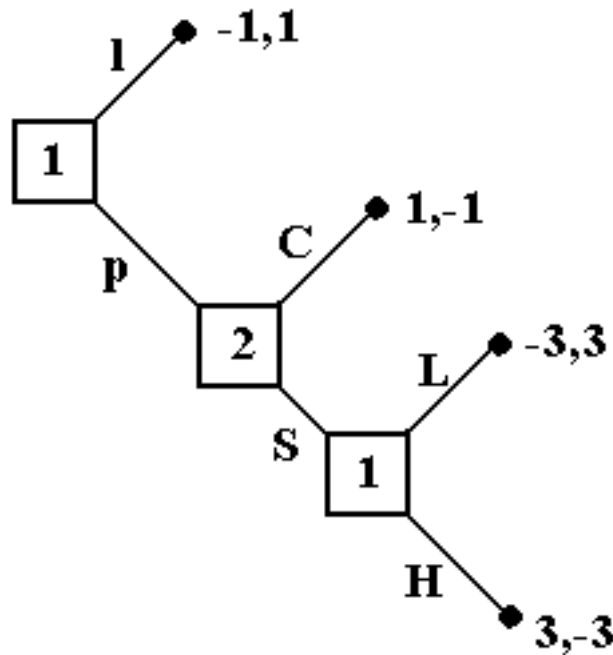


Figura 32: *Esercizio 2 (dettagli nel testo)*

1. il giocatore 1 riceve una carta che può essere o di valore alto (H) o di valore basso (L) e i due eventi sono equiprobabili con probabilità pari a $1/2$ ciascuno;
2. dopo aver ricevuto la carta (che non viene mostrata al giocatore 2) il giocatore 1 può decidere sia di terminare il gioco (l), in questo caso i payoff sono -1 per lui e 1 per 2, sia di proseguire il gioco e dare il turno a 2 (p);
3. 2 può abbozzare senza vedere la carta (C per *conceive*) e i payoff sono 1 per 1 e -1 per lui oppure può chiedere di vedere la carta (S per *see*) passando di nuovo il gioco a 1;
4. 1 scopre la carta e se questa è H ottiene 3 e 2 ottiene -3 mentre se è L ottiene -3 e 2 ottiene 3 .

La carta viene scoperta solo a seguito della mossa S da parte di 2, negli altri casi il gioco si chiude nell'incertezza. Il gioco è a somma nulla, come è facile vedere dalla sua forma estesa. Le strategie dei giocatori sono, rispettivamente, le seguenti:

1. ha l e p ,
2. ha C e S .

Una variante più realistica (e corretta) di questo gioco è data in figura 33. In questo caso si ha un “giocatore” N (natura) che simula la distribuzione casuale della carta. La distribuzione di probabilità è $1/2, 1/2$ per i valori H e L . A questo punto il giocatore 1 può lasciare (l) o passare (p). Nel primo caso il gioco termina (con i payoff segnati) mentre nel secondo il gioco passa a 2 che può vedere (S) o lasciare (C): nel primo caso conta il valore della carta, nel secondo no. In entrambi i casi i payoff sono quelli segnati.

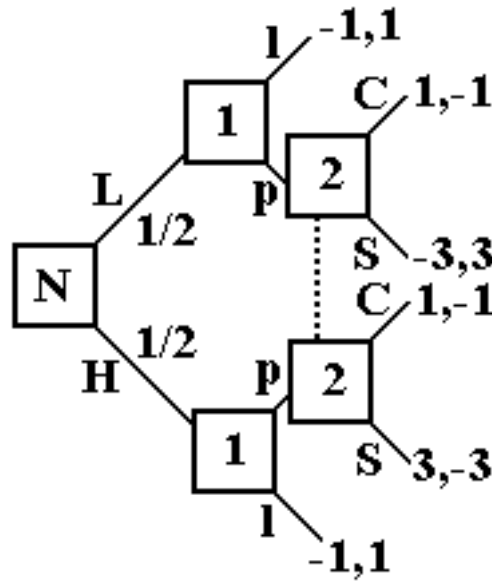


Figura 33: Variante della forma estesa dell'esercizio 2 (dettagli nel testo)

Il giocatore 2 vede la mossa di 1 senza vedere il segnale emesso da N . Da qui discende la presenza di un insieme informativo con i due nodi decisionali per 2 in modo che le strategie per 2 siano $S_2 = \{C, S\}$. Le strategie per 1 sono le seguenti:

$$S_1 = \{l, p\} \times \{l, p\} = \{ll, lp, pl, pp\} \quad (152)$$

nel caso che guardi la carta, mentre, se non la guarda, le strategie sono:

$$S_1 = \{l, p\} \quad (153)$$

e si ha un insieme informativo che comprende i due nodi di decisione del giocatore 1. Da tali considerazioni risulta abbastanza agevole la determinazione della forma normale.

Un altro esempio di gioco di cui si danno sia la forma estesa sia la forma normale è quello illustrato nella figura 34. Il gioco è a due giocatori in cui 1 muove per primo e può scegliere:

1. A , nel qual caso il gioco termina e 2 non ha nessuna mossa a disposizione mentre i payoff sono (nell'ordine 1, 2) pari a 4 e 6;
2. B , nel qual caso 2 ha a disposizione le mosse E (payoff, nell'ordine 1, 2, 4 e 1) e F (payoff 7 e 3)
3. C o D : in questo caso 2 non discrimina le due mosse di 1 per cui se non vede A o B non sa se 1 ha giocato C o D e può rispondere o con G o con H .

Le strategie a disposizione dei due giocatori sono:

1. per il giocatore 1 $S_1 = \{A, B, C, D\}$
2. per il giocatore 2 $S_2 = \{E, F\} \times \{G, H\} = \{EG, EH, FG, FH\}$

Se 1 gioca A ottiene 4, se gioca B , siccome 2 massimizza la propria utilità e gioca F , ottiene 7. Dalla tabella di figura 34 (b) si vede, infatti, che:

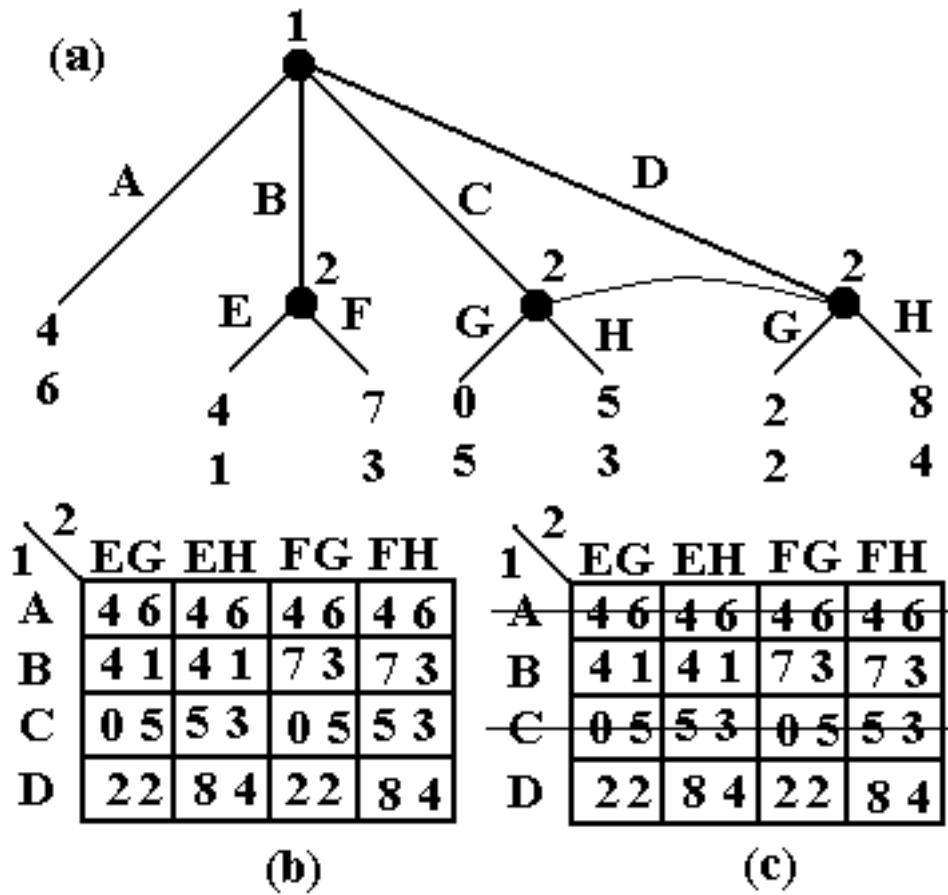
1. B domina debolmente A ,
2. D domina strettamente C .

Sotto l'ipotesi di razionalità dei giocatori come conoscenza comune, 2 sa che 1 non giocherà mai C per cui se non vede A o B sa di essere in D e gioca H ottenendo 4 per se e facendo ottenere 8 a 1 per cui 1, che sa risolvere il gioco così come lo risolve 2, gioca D .

L'ultimo gioco che si prende brevemente in esame è quello illustrato nella figura 35. In figura 35 (a) si ha la forma estesa di un gioco con due giocatori e a mosse successive la cui forma normale è illustrata in 35 (b).

Le strategie dei giocatori 1 e 2 sono, rispettivamente:

1. $S_1 = \{A, B\}$,
2. $S_2 = \{C, D\}$

Figura 34: *Esercizio 3 (dettagli nel testo)*

Se 1 gioca *A* il gioco termina mentre, se gioca *B*, 2 può giocare o *C* o *D*: fra le due mosse, 2 sceglie *C* dalla quale ottiene un payoff più alto di quello che ottiene se sceglie *D*.

È facile vedere, pertanto, che 1 gioca *B* perchè sa che 2 giocherà *C* in modo che i payoff sono, rispettivamente, 4 e 1. Facendo un'analisi del gioco alla ricerca di NE si ha:

1. se 2 gioca *C* la miglior mossa per 1 è *B* (perchè $4 > 2$) e se 1 gioca *B* la miglior mossa per 2 è *C* (perchè $1 > 0$) per cui (B, C) è NE per il gioco;
2. se 2 gioca *D* la miglior mossa per 1 è *A* e se 1 gioca *A* 2 è indifferente fra *C* e *D* ma solo se 2 gioca *D* la miglior mossa di 1 è *A* per cui (A, D) è NE per il gioco. Vedremo che tale NE, non essendo ricavabile con

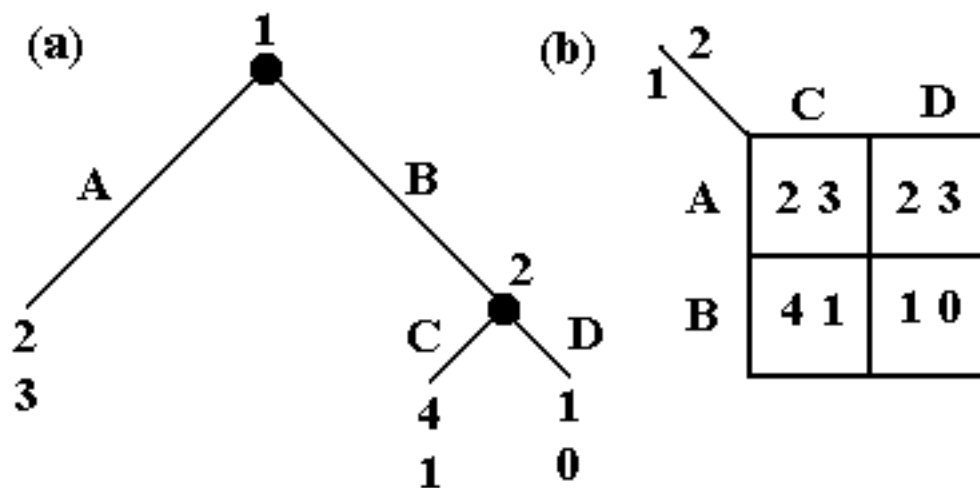


Figura 35: *Esercizio 4 (dettagli nel testo)*

un procedimento di induzione a ritroso, corrisponde ad una minaccia non credibile.

4 Quarta Lezione

4.1 Giochi a informazione incompleta

Si sono visti per ora giochi in cui le funzioni utilità sono note a tutti i giocatori ovvero le utilità sono **informazione comune** dal momento che ogni giocatore conosce le preferenze (sotto forma di utilità) di tutti gli altri. In questo caso è possibile usare tecniche di dominanza stretta perchè ogni

		2	
		C	D
1	A	2 3	3 2
	B	1 1	2 4

Figura 36: *Dominanza stretta (dettagli nel testo)*

giocatore conosce le preferenze di tutti gli altri: si parla di conoscenza mutua. Si possono tuttavia avere casi in cui i giocatori conoscono le proprie preferenze ma non quelle degli altri.

Nel caso di figura 36, supponendo di essere nel caso della conoscenza comune, si ha:

1. la strategia B è dominata strettamente dalla strategia A e sia 1 sia 2 lo sanno per cui entrambi rimuovono la riga della tabella associata alla strategia B di 1;
2. nel gioco ridotto così ottenuto C domina strettamente D (cosa che non è vera nel gioco di partenza) per cui entrambi rimuovono anche la colonna associata alla strategia D e quindi non resta che il profilo di strategie (A, C) .

Tutto ciò si basa sul fatto che 1 sa che 2 sa che 1 sa e così via. In base all'analisi vista per i NE si ha:

1. se 2 sceglie C la miglior risposta per 1 è A e se 1 sceglie A la miglior risposta per 2 è C per cui (A, C) è NE;
2. se 2 sceglie D la miglior risposta per 1 è A ma se 1 sceglie A la miglior risposta per 2 è C per cui non si ha un NE se 2 muove D .

Tornando all'analisi per dominanza iterata si ha che se si ha un ulteriore round non è sufficiente la **conoscenza mutua** (ovvero 1 conosce le preferenze di 2 e 2 quelle di 1) ma mi serve la **conoscenza comune** ovvero ogni giocatore conosce le preferenze degli altri e sa che anche gli altri sanno e così via all'infinito (virtualmente). Se si hanno **giochi a informazione completa** le preferenze dei giocatori sono **conoscenza comune**. Vediamo ora i giochi a **informazione incompleta**.

Esempio 4.1 (Battaglia dei sessi) *La figura 37 illustra un gioco a informazione incompleta in cui il giocatore 1 (marito) non conosce quale sia il tipo di giocatore 2 (moglie) che si trova davanti:*

1. nel caso della figura 37 (a) si ha una moglie (giocatore 2) che si comporta da moglie (perchè preferisce C (cinema) a S (stadio)),
2. nel caso della figura 37 (b) si ha una moglie che si comporta da marito (perchè preferisce S a C).

Il giocatore 1 non conosce, a priori, a quale tipologia appartiene il giocatore 2 (mentre per 1 è disponibile solo la tipologia "comportamento da marito").

All'inizio del gioco si ha un ente, detto **Natura** o **Caso**, che:

1. muove per primo,
2. non ha preferenze (per cui non è un vero e proprio giocatore) ovvero tutte le sue mosse hanno associata una probabilità nota a priori,
3. invia segnali $\theta_i \in \Theta_i$ a certi giocatori, segnali che non sono visti dagli altri giocatori e, pertanto, sono informazioni private.

Nel caso della figura 37 il giocatore 2 riceve un segnale che lo specializza come *moglie che si comporta da moglie* oppure *moglie che si comporta da marito* ma tale segnale non è noto a 1 che, pertanto, può solo fare ipotesi in merito al tipo effettivo di 2 (da qui l'incompletezza dell'informazione).

Nota 4.1 *La **Natura** sceglie i segnali θ_i osservati, in genere in privato, dai singoli giocatori.*

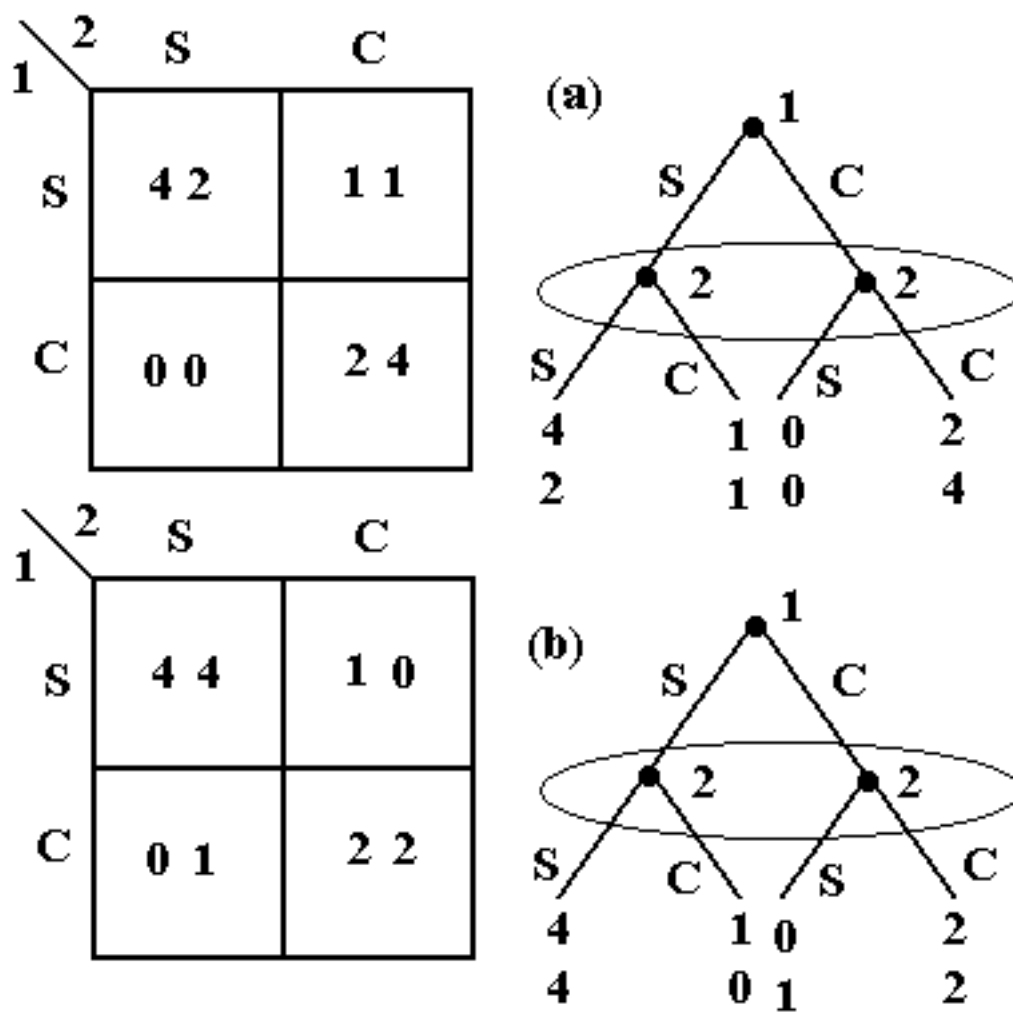


Figura 37: *Battaglia dei sessi con segnali privati*(dettagli nel testo)

Definizione 4.1 Se Θ_i rappresenta l'insieme dei segnali osservati dal giocatore i (ovvero l'insieme dei tipi possibili per il giocatore i) si definisce come **profilo dei tipi** il seguente vettore:

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta = \times_{i=1}^n \Theta_i \quad (154)$$

dove θ_i è il segnale osservato dal giocatore i fra quelli per lui possibili che formano l'insieme Θ_i , ovvero $\theta_i \in \Theta_i$. Si noti che θ rappresenta un insieme di tipi effettivi dell'insieme di quelli possibili Θ .

Definizione 4.2 Dati:

1. un profilo di strategie pure $s \in S$ (ovvero una indicazione di come giocano i giocatori),
2. un profilo dei tipi θ ,

l'utilità del giocatore i ($i = 1, \dots, n$) è espressa come $u_i(s, \theta)$, ovvero dipende dalle strategie adottate dai giocatori e dai loro tipi (ovvero dai segnali che ciascuno di loro ha ricevuto).

Nel caso dei profili dei tipi non si ha conoscenza comune poichè θ non è noto a tutti i giocatori ciascuno dei quali conosce solo il proprio θ_i . **Conoscenza comune** è la distribuzione di probabilità secondo la quale la Natura sceglie i tipi dei vari giocatori per cui ogni θ_i è caratterizzato da una **distribuzione di probabilità** P .

Definizione 4.3 (Giochi Bayesiani) Un gioco Bayesiano a informazione completa è descritto come :

$$\Gamma_B = \{\{\Theta_i, u_i, S_i\}_{i=1}^n, P\} \quad (155)$$

in cui:

1. la distribuzione di probabilità P è nota a tutti i giocatori;
2. si ha una tripla $\{\theta_i, u_i, S_i\}$ per ogni giocatore i in cui θ_i è noto solo al giocatore i .

Si parla di **gioco Bayesiano** perchè i vari Θ_i sono fra di loro indipendenti: se 1 osserva Θ_1 non ha nessuna informazione in merito agli altri Θ_j ($j \neq 1$) e lo stesso vale per tutti gli altri giocatori per cui le distribuzioni Θ_j non dipendono da Θ_i ($i \neq j = 1, \dots, n$) ovvero si ha una indipendenza delle distribuzioni.

Esempio 4.2 (Esempio 4.1, continuazione) Vediamo un esempio di quanto asserito riferito al caso della figura 37 (Battaglia dei sessi). In questo caso:

1. i segnali osservati privatamente dal marito (giocatore 1) sono $\Theta_1 = \{\text{marito}\}$,
2. i segnali osservati privatamente dalla moglie (giocatore 2) sono $\Theta_2 = \{\text{moglie, marito}\}$.

Le strategie pure sia della moglie (in entrambi i ruoli) sia del marito sono:

$$S_1 = S_2 = \{S, C\} \quad (156)$$

mentre per 2 (moglie) si hanno le seguenti probabilità (una il complemento dell'altra) associate ai due segnali che 2 può ricevere:

1. $P\{\theta_2 = \text{marito}\} = \frac{1}{2}$
2. $P\{\theta_2 = \text{moglie}\} = \frac{1}{2}$

1 non sa che tipo di moglie ha di fronte, se con preferenza da moglie o da marito, per cui il concetto di equilibrio che si vuole definire deve specificare cosa fa la moglie con i due tipi di preferenze.

1 in Θ_1 vede solo marito mentre 2 in Θ_2 può vedere sia marito sia moglie. Tutti gli elementi di Γ_B sono conoscenza comune tranne che gli effettivi valori assunti dai segnali ricevuti (o visti) dai singoli giocatori che sono conoscenza privata.

Sempre in questo caso si ha:

1. Θ_1 contiene un solo elemento per cui 2 ha piena conoscenza del tipo di giocatore 1 che si trova di fronte;
2. d'altra parte 1 non conosce in modo deterministico che tipo di moglie ha di fronte perchè non conosce il segnale θ_2 ma sa solo che:

$$\theta_2 \in \Theta_2 = \{\text{marito, moglie}\} \quad (157)$$

La figura 37 presenta il caso in cui non si raffigura l'intervento della Natura mentre la figura 38 contiene la descrizione in forma estesa del gioco "Battaglia dei sessi" in cui compaiono le mosse della Natura con le relative probabilità.

Nel caso in cui compare la Natura come giocatore imparziale che esegue la prima mossa, si ha che tale mossa presenta più esiti (due in questo caso) con probabilità note (agli altri giocatori) che danno luogo ad altrettante realizzazioni del gioco. Nel caso in esame:

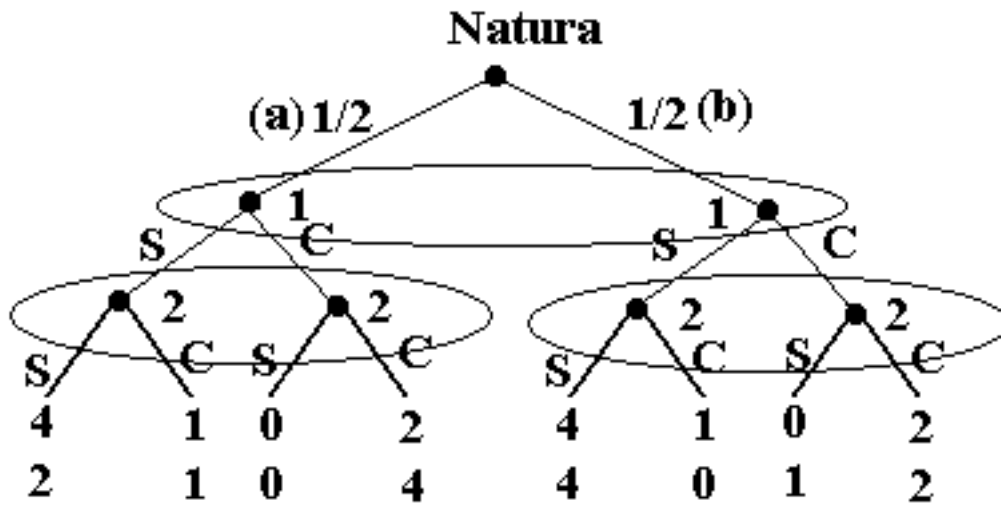


Figura 38: *Battaglia dei sessi con Natura* (dettagli nel testo)

1. se 2 ha osservato “moglie” ci si trova nella parte del gioco che segue il ramo etichettato (a),
2. se 2 ha osservato “marito” ci si trova nella parte del gioco che segue il ramo etichettato (b)

Il giocatore 1 non ha tale conoscenza perchè non conosce θ_2 . Si noti che i rami (a) e (b) sono etichettati con le relative probabilità con cui la Natura “estrae” i segnali θ_2 da Θ_2 .

Nella figura 38 l'insieme informativo del giocatore 1 dipende dal fatto che 1 non conosce quale scelta abbia fatto effettivamente N mentre gli insiemi informativi del giocatore 2 rappresentano il fatto che i due giocatori muovono simultaneamente.

4.2 Rappresentazione dei giochi a informazione incompleta

Sorge ora il problema (già esaminato e, in parte, risolto nella sezione precedente) di come rappresentare i giochi a informazione incompleta. Nel caso di giochi a informazione completa una possibile rappresentazione in forma normale è stata illustrata, ad esempio, in figura 36. Nel caso di giochi a informazione incompleta si deve stabilire la mossa giocata da un giocatore in funzione del valore del segnale da lui ricevuto. Si parla, in questo caso, di

metastrategie del giocatore i come:

$$ms_i : \Theta_i \longrightarrow S_i \quad (158)$$

ovvero come di una funzione ms_i che mappa l'insieme dei segnali θ_i che i può ricevere sull'insieme delle sue strategie pure S_i , per cui ad ogni segnale corrisponde un insieme di strategie pure in modo che la ms_i sia una corrispondenza. Tornando al caso della “Battaglia dei sessi” si deve stabilire come il giocatore 2 gioca nei due insiemi di informazione mostrati in figura 38.

Se MS_i rappresenta l'insieme delle metastrategie individuate dalla corrispondenza ms_i per il giocatore i si ha:

1. il giocatore 1 ha come insieme dei segnali $\Theta_1 = \{\text{marito}\}$,
2. il giocatore 2 ha come insieme dei segnali $\Theta_2 = \{\text{marito}, \text{moglie}\}$.

Usando la (158) (specializzata nei due casi come funzione da $\Theta_1 = \{\text{marito}\}$ a $\{S, C\}$ e da $\Theta_2 = \{\text{marito}, \text{moglie}\}$ a $\{S, C\}$), si ha:

1. $MS_1 = \{S, C\}$
2. $MS_2 = \{SS, SC, CS, CC\}$

La struttura di MS_2 merita qualche commento. Si può vedere la cosa nei due modi seguenti:

1. MS_2 contiene le coppie xy in cui x e y assumono valori in $\{S, C\}$ e x individua la mossa se 2 si comporta da moglie mentre y individua la mossa se 2 si comporta da marito da cui le quattro combinazioni;
2. $MS_2 = \{ms_2\}$ dove le ms_2 è definita, in base alla (158), da $\{\text{marito}, \text{moglie}\}$ a $\{S, C\}$ per cui se ho:

$$(a) \quad ms_2(\text{marito}) = S$$

$$(b) \quad ms_2(\text{moglie}) = S$$

ottengo SS (le altre tre si ottengono in modo simile).

In altre parole, le metastrategie del giocatore 2, MS_2 , sono ottenute dalle sue strategie pure eseguendo il prodotto cartesiano $\{S, C\} \times \{S, C\}$ delle strategie in modo da stabilire come si comporta il giocatore 2 per ognuna delle scelte operate da N . Essendo il gioco a mosse simultanee, il giocatore 1 ha come strategie quelle viste. Se il gioco fosse a mosse successive anche il giocatore 1 avrebbe un insieme di strategie identico a quelle del giocatore 2, dovendo stabilire come muovere a seguito di ogni possibile mossa del giocatore 2.

4.3 Equilibri di Nash in giochi a *informazione incompleta*

A questo punto si deve individuare come è possibile definire un equilibrio di Nash (*NE* nel seguito) per questo tipo di giochi denotati come Γ_{BN} , ovvero **forma normale dei giochi Bayesiani**.

Definizione 4.4 Se MS_i sono le metastrategie del giocatore i -esimo si ha:

$$\Gamma_{BN} = \{\hat{u}_i, MS_i\}_{i=1}^n \quad (159)$$

con:

$$\hat{u}_i : MS \rightarrow \mathbb{R} \quad (160)$$

avendo posto $MS = \times_{i=1}^n MS_i$ in modo che sia:

$$\hat{u}_i(ms) = E_{\Theta}[u_i(ms_1(\theta_1), \dots, ms_n(\theta_n), \Theta)] \quad (161)$$

in cui E_{Θ} rappresenta il valore atteso in base alla distribuzione di probabilità dei segnali in Θ .

Vediamo che ruoli hanno i vari “attori”, ovvero la Natura e i giocatori. La Natura definisce un profilo di tipi (o segnali), uno per ogni giocatore, per cui definisce:

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \quad (162)$$

e comunica ciascun tipo θ_i ad ogni giocatore i in modo privato. I giocatori si comportano in modo che:

- il giocatore 1 sceglie $ms_1(\theta_1) \in S_1$,
- il giocatore 2 sceglie $ms_2(\theta_2) \in S_2$,
- $\vdots$
- il giocatore n sceglie $ms_n(\theta_n) \in S_n$.

A questo punto si ha l'utilità attesa del giocatore i quando la Natura sceglie $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, ovvero un profilo di segnali, uno per ogni giocatore. Tale utilità la indico con $\hat{u}_i$ in modo da individuare l'utilità attesa di i nello stato del mondo in cui la Natura sceglie $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.

In un **gioco a informazione incompleta**, con riferimento alla (161), si ha che la $\hat{u}_i$ dipende da:

1. s_i , strategia pura del giocatore i ,
2. s_{-i} , strategie pure degli altri giocatori,

3. θ , profilo dei tipi dei giocatori.

Nel caso della figura 38 si ha che il ramo etichettato come (a) deriva dal fatto che θ_2 vale *moglie* mentre il ramo etichettato come (b) deriva dal fatto che θ_2 vale *marito*. Per risolvere un gioco come quello di figura 38 devo conoscere θ . Se tale conoscenza non è necessaria mi trovo di fronte ad un gioco ad informazione completa.

Definizione 4.5 (NE in un gioco Bayasiano o BNE) *Un insieme di metastrategie $\mathbf{ms} \in MS$ è NE di un gioco Bayesiano Γ_B sse $\mathbf{ms}$ è NE di un gioco Bayesiano in forma normale Γ_{BN} ovvero sse:*

$$\hat{u}_i(ms_i, ms_{-i}) \geq \hat{u}_i(ms'_i, ms_{-i}) \quad (163)$$

$\forall ms'_i \in MS_i$ in cui ms_i e ms'_i sono metastrategie del giocatore i e ms_{-i} sono le metastrategie degli altri $n - 1$ giocatori.

Esempio 4.3 *Con riferimento alla figura 38, le metastrategie dei due giocatori formano gli insiemi:*

$$MS_1 = \{S, C\} \quad (164)$$

$$MS_2 = \{SS, SC, CS, CC\} \quad (165)$$

in cui per 2 le metastrategie sono del tipo xy dove x è la mossa di 2 (*moglie*) se si comporta da marito e y se si comporta da moglie.

Se:

1. 1 (*il marito*) gioca C mentre:

(a) 2 gioca SS i payoff sono 0,0 e 0,1 entrambi con probabilità $1/2$ per cui l'utilità attesa è
per 1:

$$(0 + 0) \frac{1}{2} = 0 \quad (166)$$

per 2:

$$(0 + 1) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (167)$$

(b) 2 gioca SC i payoff sono 0,0 e 2,2, entrambi con probabilità $1/2$, per cui l'utilità attesa è
per 1:

$$(0 + 2) \frac{1}{2} = 1 \quad (168)$$

per 2:

$$(0 + 2) \frac{1}{2} = 1 \quad (169)$$

- (c) 2 gioca *CS* i payoff sono 2, 4 e 0, 1, entrambi con probabilità 1/2, per cui l'utilità attesa è
per 1:

$$(2 + 0)\frac{1}{2} = 1 \quad (170)$$

per 2:

$$(4 + 1)\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (171)$$

- (d) 2 gioca *CC* i payoff sono 2, 4 e 2, 2, entrambi con probabilità 1/2, per cui l'utilità attesa è
per 1:

$$(2 + 2)\frac{1}{2} = 2 \quad (172)$$

per 2:

$$(2 + 4)\frac{1}{2} = 3 \quad (173)$$

2. 1 (il marito) gioca *S* mentre:

- (a) 2 gioca *SS* i payoff sono 4, 2 e 4, 4, entrambi con probabilità 1/2, per cui l'utilità attesa è
per 1:

$$(4 + 4)\frac{1}{2} = 4 \quad (174)$$

per 2:

$$(2 + 4)\frac{1}{2} = 3 \quad (175)$$

- (b) 2 gioca *SC* i payoff sono 4, 2 e 1, 0, entrambi con probabilità 1/2, per cui l'utilità attesa è
per 1:

$$(4 + 1)\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (176)$$

per 2:

$$(2 + 0)\frac{1}{2} = 1 \quad (177)$$

- (c) 2 gioca *CS* i payoff sono 1, 1 e 4, 4, entrambi con probabilità 1/2, per cui l'utilità attesa è
per 1:

$$(1 + 4)\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (178)$$

per 2:

$$(1 + 4)\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (179)$$

(d) 2 gioca *CC* i payoff sono 1, 1 e 1, 0, entrambi con probabilità $1/2$, per cui l'utilità attesa è per 1:

$$(1 + 1)\frac{1}{2} = 1 \quad (180)$$

per 2:

$$(1 + 0)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (181)$$

I payoff così calcolati sono riportati nella tabella di figura 39.

		MS₂			
		SS	SC	CS	CC
MS₁	C	0 1/2	1 1	1 5/2	2 3
	S	4 3	5/2 1	5/2 5/2	1 1/2

Figura 39: Battaglia dei sessi: metastrategie e payoff (dettagli nel testo)

Dopo aver calcolato tutte le entry della tabella si procede come nel caso dei giochi a informazione completa solo che, in questo caso, sono in gioco metastrategie.

Si cercano gli equilibri come se si avessero strategie pure e tali equilibri sono quelli del gioco a informazione incompleta da cui siamo partiti.

È facile vedere, esaminando i payoff della tabella, che:

1. per il giocatore 2 la strategia *SC* è strettamente dominata dalla strategia *CS*,
2. (S, SS) è un *NE*,
3. (C, CC) è un *NE*,

ed entrambi sono, pertanto, *BNE*.

La metodologia funziona bene se il numero degli elementi di *MS* non è molto alto ovvero se:

1. l'insieme delle strategie pure dei singoli giocatori S_i non è molto grande (nel caso visto entrambi i giocatori hanno come strategie pure $\{S, C\}$),

2. *l'insiemi dei segnali che ogni giocatore può ricevere θ_i non è molto grande (nel caso visto si ha che 1 riceve $\theta_1 = \{\text{marito}\}$ e 2 riceve $\theta_2 = \{\text{marito}, \text{moglie}\}$).*

4.4 Altre definizioni di equilibrio

All'equilibrio la metastrategia ms_i è la risposta ottimale del giocatore i —esimo al comportamento degli altri. Si ha la seguente proposizione.

Proposizione 4.1 *Un profilo di metastrategie pure $\mathbf{ms}$ è BNE di Γ_B sse:*

$$E_{\Theta_i}[u_i(ms_i(\Theta_i), ms_{-i}(\Theta_{-i}), \Theta)] \geq E_{\Theta_i}[s'_i, ms_{-i}(\Theta_{-i}), \Theta_i, \Theta_{-i}] \quad (182)$$

in cui si ha $\Theta = (\Theta_i, \Theta_{-i})$.

Si considera il comportamento del giocatore i non **ex-ante**, ovvero prima che veda il segnale, ma **ex-post**, ovvero dopo che lo ha visto, per cui i non gioca $ms_i(\theta_i)$ ma s'_i e ciò deve valere $\forall s'_i \in S_i, \forall \theta_i \in \Theta_i$ e per tutti i giocatori $i = 1, \dots, n$.

Per il giocatore i si ha l'utilità dopo che ha osservato il segnale θ_i ma ciò non vale per gli altri, per i quali si ha θ_{-i} : ogni giocatore osserva il proprio segnale ma non vede quelli degli altri e, pertanto, si parla di **informazione incompleta**. La definizione della u_i prevede che i conosca θ_i ma poichè i non conosce i segnali ricevuti dagli altri giocatori può solo usare s'_i e scegliere fra le seguenti azioni:

1. $ms_i(\theta_i) \in S_i$,
2. $s'_i \in S_i$.

Se il calcolo è quello di $E_{\Theta_i}[E_{\Theta_i}[u_i()]]$ si ottiene $\hat{u}_i(ms)$: la differenza è fra massimizzare una sommatoria e massimizzare gli addendi. Nel caso della “Battaglia dei sessi” si hanno tre giocatori:

1. marito,
2. moglie con preferenze da marito,
3. moglie con preferenze da moglie.

Il primo è un giocatore “puro” perchè ha un solo comportamento possibile (riceve un solo segnale) mentre gli altri due sono un giocatore “specializzato” mediante due segnali diversi.

4.5 Asta di primo prezzo (inizio)

La situazione è la seguente. Si ha **un venditore** di un bene e n potenziali compratori o **offerenti** (per cui si hanno n offerte): ogni offerente fa un'offerta in modo privato (non visto dagli altri) e la passa al venditore. Chi offre di più ottiene il bene messo all'asta e paga un prezzo pari alla propria offerta. Se si hanno offerte di pari entità massima, i relativi offerenti sono inseriti in una lotteria equa (con tanti eventi equiprobabili quanti sono gli offerenti a pari merito) al cui vincitore viene assegnato il bene. Si ha quindi, in modo più formale:

1. n offerte,
2. $\forall i = 1, \dots, n$ si ha il tipo del giocatore i ovvero $\Theta_i = [0, 1]$,
3. $\forall i = 1, \dots, n$, $V_i \in \Theta_i$ dove V_i è la valutazione del bene da parte del giocatore i ,
4. se i "vince" l'asta pagando p la sua utilità è data da $V_i - p$ e dipende solo da $\theta_i \in \Theta_i$,
5. la V_i è distribuita con una funzione di ripartizione o distribuzione F , tale che $F(k) = P(V_i \leq k)$, e densità f continua e non nulla su $[0, 1]$,
6. $\forall i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, V_i e V_j sono indipendenti e identicamente distribuite (in breve *iid*),
7. le offerte possibili (e quindi le possibili strategie pure) sono $S_i \in [0, +\infty)$.

Si devono definire le utilità U_i dei singoli giocatori:

$$U_i = \begin{cases} V_i - s_i & \text{se } s_i > s_j \forall i \neq j \\ \frac{V_i - s_i}{k} & \text{se ho } k \text{ offerte uguali} \\ 0 & \text{se } \exists j \neq i \text{ tale che } s_j > s_i \end{cases} \quad (183)$$

A questo punto il gioco è specificato dal momento che si hanno **i giocatori**, **le strategie** e **i payoff**. Il gioco è a **informazione incompleta** perchè ogni giocatore i conosce solo la propria valutazione V_i e di tale gioco si vuole un BNE.

Un BNE è un profilo di strategie:

$$\beta_1 \dots \beta_n \quad (184)$$

definite come:

$$\beta_i : [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty) \quad (185)$$

dalle valutazioni alle offerte.

Se, ad esempio, il giocatore i ha una valutazione pari a $V_i = 0.6$ e fa un'offerta pari alla sua valutazione si ha $\beta_i = 0.6$ per cui, se vince l'asta, ha una utilità nulla. Si può dimostrare che per un qualunque BNE deve essere:

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta \quad (186)$$

ovvero tutti i giocatori hanno la stessa funzione offerta. Si noti che non è vero che tutti fanno la stessa offerta ma è vero che tutti i giocatori adottano la stessa strategia di offerta per cui posso avere:

1. $\beta_1(0.6) = \beta_2(0.6) \neq \beta_1(0.2)$,
2. $\beta_1(0.6) = \beta_2(0.6) \neq \beta_1(0.2) = \beta_2(0.2)$

Se vale la (186) (con le ipotesi di seguito specificate) l'equilibrio si dice **simmetrico**. Sulla β si fanno le seguenti ipotesi.

1. β è strettamente crescente (ovvero chi ha una valutazione più alta di un bene offre di più) e derivabile.
2. $\beta(0) \geq 0$ da cui $\beta(0) = 0$: se un giocatore (con valutazione 0) vince paga $\beta(0)$ che deve essere 0 perchè se no avrei una utilità $0 - \beta(0) \leq 0$.

Si vuole l'utilità di i (con valutazione V) quando offre $b \in \mathbb{R}$. Si hanno due casi (se si esclude il caso di parità):

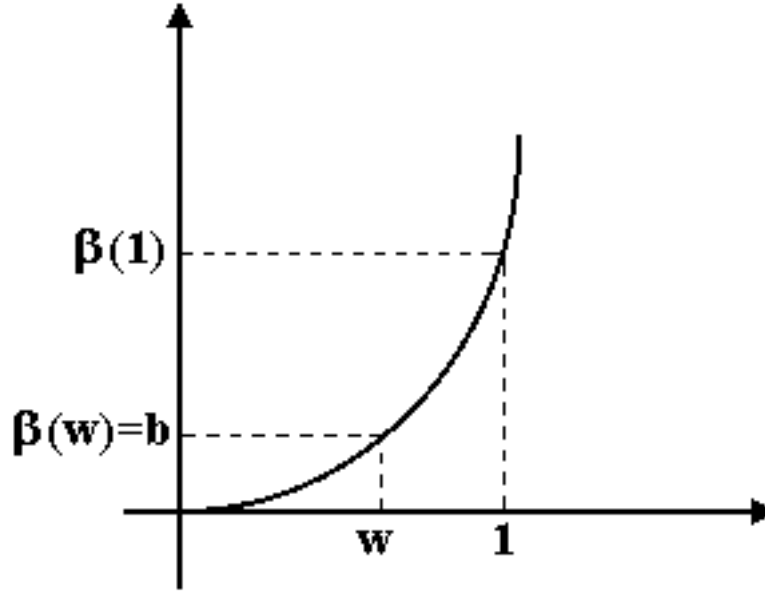
1. i vince l'asta e la sua utilità è $V - b$,
2. i perde l'asta e la sua utilità è nulla,

per cui l'utilità attesa del giocatore i è data da:

$$(V - b)P(b > \beta(V_j)) \quad (187)$$

$\forall j \neq i$. In questo caso l'offerta di i è migliore di quella degli altri $j \neq i$ che offrono $\beta(V_j)$. Sotto le ipotesi:

1. V_i con distribuzione continua;
2. β continua,

Figura 40: *Andamento possibile di β (dettagli nel testo)*

si ha, come nel caso delle v. a. continue:

$$P(\beta(V_j) = k) = 0 \quad (188)$$

per cui si ha $b \in [0, \beta(1)] = Im(\beta)$. Poichè β è crescente e derivabile il massimo dell'immagine lo si ha in $\beta(1)$.

Si vede ora perchè l'offerta non possa assumere valori qualunque.

Offrire $b > \beta(1)$ è stupido in quanto non ottimale perchè in tal caso se l'offerente vince l'asta paga più della sua valutazione e perciò ha una utilità negativa. Dato $b \in [0, \beta(1)]$ (vedi la figura 40) $\exists w \in (0, 1]$ tale che:

$$\beta(w) = b \quad (189)$$

(conseguenza del teorema dei valori intermedi) cioè l'offerta che si deve fare viene fatta all'equilibrio dall'offerente di tipo w .

Scrivo ora la relazione che esprime l'utilità attesa per il giocatore i e di cui voglio il massimo rispetto a b (nei calcoli sfrutto l'identità $b = \beta(w)$):

$$(V - b)P(b > \beta(V_j)) = (V - \beta(w))P(\beta(w) > \beta(V_j)) \quad (190)$$

$\forall j \neq i$.

La β , come visto, è strettamente crescente per cui si ha che la condizione:

$$\beta(w) > \beta(V_j) \quad (191)$$

equivale alla:

$$w > V_j \quad (192)$$

per cui la (190) (dal momento che $P(\beta(w) > \beta(V_j)) = P(w > V_j)$ con w fissato e che la condizione $j \neq i$ si traduce in $n - 1$ offerenti con la stessa distribuzione F , per cui si ha $P(w > V_j) = F^{n-1}(w)$) si trasforma nella⁴:

$$(V - \beta(w))F^{n-1}(w) \quad (194)$$

di cui si vuole il massimo. All'equilibrio (ovvero all'ottimo) si deve avere necessariamente:

1. $b = \beta(w)$
2. $w = V$

ovvero il b ottimo è $\beta(V)$ (vedi la figura 40): poichè gli altri $n - 1$ giocatori giocano secondo β ovvero usando β allora anche per i è ottimo usare β che, pertanto, rappresenta la funzione cercata.

A questo punto riprendo la (194) come funzione di w e impongo la condizione necessaria di ottimo (sufficiente per come ho specificato la β) per cui la derivo rispetto a w e impongo uguale a 0 la derivata in modo da ottenere:

$$-\beta'(w)F^{n-1}(w) + (V - \beta(w))(n - 1)F^{n-2}(w)f(w) = 0 \quad (195)$$

in cui $f(w)$ è la derivata di $F(w)$. Risolvendo la (195) (ponendo $V = w$) ottengo:

$$V(n - 1)F^{n-2}(V)f(V) = \beta'(V)F^{n-1}(V) + \beta(V)(n - 1)F^{n-2}(V)f(V) \quad (196)$$

ovvero una equazione differenziale in cui l'incognita è $\beta(V)$, con la condizione iniziale $\beta(0) = 0$. Per risolvere tale equazione differenziale posso calcolare l'integrale definito fra 0 e k dei due membri:

1. per il secondo membro ho che la primitiva è:

$$\beta(V)F^{n-1}(V) \Big|_0^k \quad (197)$$

con $\beta(0) = 0$,

⁴Si sfrutta il seguente fatto:

$$F(w) = P(V_j \leq w) = P(w \geq V_j) = P(w > V_j) + P(w = V_j) \quad (193)$$

con $P(w = V_j) = 0$ essendo le v. a. continue.

2. per il primo membro ho:

$$\int_0^k V dF^{n-1}(V) = \int_0^k (n-1)F^{n-2}f(V)dV \quad (198)$$

in modo da ottenere:

$$\int_0^k V dF^{n-1}(V) = \beta(k)F^{n-1}(k) \quad (199)$$

e quindi:

$$\beta(k) = \frac{\int_0^k V dF^{n-1}(V)}{F^{n-1}(k)} = E[V_{-1}^{(1)} \mid V_{-1}^{(1)} < k] \quad (200)$$

in cui $F^{n-1}(k)$ è relativa a tutti gli altri $n-1$ giocatori.

Nota 4.2 *Lo scopo è ottenere β ovvero la funzione di offerta comune a tutti i giocatori.*

5 Quinta Lezione

5.1 Asta di primo prezzo (continuazione)

Nota 5.1 (Integrazione per parti) *Per risolvere l'equazione (200) (vedi la fine della lezione precedente) si usa l'integrazione per parti la cui formulazione generale è la seguente:*

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du \quad (201)$$

Se ora si pone:

1. $u = z$,
2. $v = F^{n-1}(z)$,
3. $F^{n-1}(0) = 0$,

l'equazione (200) che qui riscriviamo (con alcune modifiche) per comodità:

$$\beta(V) = \frac{\int_0^V z dF^{n-1}(z)}{F^{n-1}(V)} \quad (202)$$

si traduce nella seguente:

$$\beta(V) = V - \frac{\int_0^V F^{n-1}(z) dz}{F^{n-1}(V)} < V \quad (203)$$

in cui:

$$\frac{\int_0^V F^{n-1}(z) dz}{F^{n-1}(V)} \quad (204)$$

rappresenta quanto i offre di meno rispetto alla propria valutazione V del bene messo all'asta. Ogni offerente offre meno della propria valutazione, se offre una cifra uguale alla propria valutazione del bene e vince l'asta la sua utilità è nulla mentre non ha senso che offra di più della sua valutazione (in caso di vittoria dell'asta avrebbe una utilità negativa). Si noti che:

$$\left(\frac{F(z)}{F(V)}\right)^{n-1} \quad (205)$$

decresce al crescere di n in quanto $F(V) \in (0, 1)$, $z \in (0, V)$ e $F(z) < F(V)$ per cui il rapporto fra le due grandezze è minore di 1 e tende a 0 al crescere di n .

Se ho una densità $f > 0$ allora la distribuzione F è crescente e l'integrale fra 0 e V che compare nella (203) tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, dove n rappresenta il numero di partecipanti all'asta. Ciò vuol dire che tanto più alto è il numero dei partecipanti quanto più ciascuno di essi tende a fare un'offerta prossima alla propria valutazione del bene messo all'asta. Nella (202) al numeratore compare $F^{n-1}(z)$ ovvero le distribuzioni degli altri $n - 1$ giocatori mentre al denominatore compare la valutazione del giocatore i sotto forma della V argomento della F^{n-1} . Se si ricorda la (200) si ha che in essa compare la grandezza:

$$E[V_{-1}^{(1)} \mid V_{-1}^{(1)} < V] \quad (206)$$

in cui V è la valutazione del giocatore i -esimo e $V_{-i}^{(1)}$ è la valutazione più alta degli altri. La (206) esprime una condizione dipendente dal fatto che il giocatore i vince l'asta.

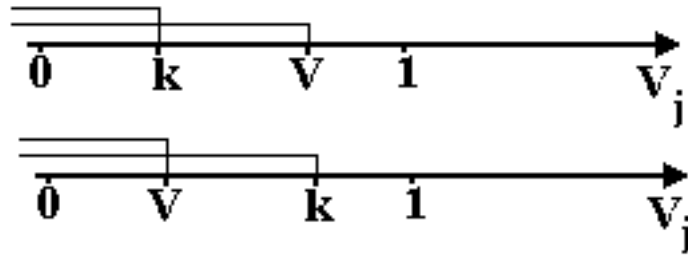


Figura 41: Asta di primo prezzo (dettagli nel testo)

Con riferimento alla figura 41 si può calcolare la $P\{V_j \leq k \mid V_j < V\}$ nei due casi $k < V$ (in alto) e $k \geq V$ (in basso). Si ha la seguente relazione di validità generale:

$$P\{V_j \leq k \mid V_j < V\} = \frac{P\{V_j \leq k \ \& \ V_j < V\}}{P\{V_j < V\}} \quad (207)$$

Nel caso $k < V$ la (207) diviene:

$$\frac{P\{V_j \leq k\}}{P\{V_j < V\}} = \frac{F(k)}{F(V)} \quad (208)$$

mentre, nel caso $k \geq V$, la (207) diviene:

$$\frac{P\{V_j \leq V\}}{P\{V_j < V\}} = 1 \quad (209)$$

dal momento che si tratta di v.a. continue e che la probabilità che una v. a. assuma un preciso valore è nulla. Sfruttando tale risultato e l'indipendenza

delle distribuzioni si vuole la probabilità che tutti i V_j siano inferiori a k . Si ha quindi:

$$P\{V_j \leq k \forall j \neq i \mid V_j < V \forall j \neq i\} = \left(\frac{F(k)}{F(V)}\right)^{n-1} \quad (210)$$

ovvero, essendo $V_{-1}^{(1)}$ il massimo dei $V_j \forall j \neq i$:

$$P\{V_{-1}^{(1)} \leq k \forall j \neq i \mid V_j < V \forall j \neq i\} = \left(\frac{F(k)}{F(V)}\right)^{n-1} \quad (211)$$

in cui:

$$\left(\frac{F(k)}{F(V)}\right)^{n-1} \quad (212)$$

è una funzione di ripartizione e quindi:

$$\frac{dF^{n-1}(z)}{F^{n-1}(V)} \quad (213)$$

è una densità in modo che sia:

$$\frac{\int_0^V z dF^{n-1}(z)}{F^{n-1}(V)} = E[V_{-1}^{(1)} \mid V_{-1}^{(1)} < V] \quad (214)$$

Nella (214) si ha che il primo membro è il valore atteso della valutazione più alta degli altri condizionato dal fatto che tale valore non è maggiore di V ovvero dell'offerta V_i del giocatore i -esimo.

Nota 5.2 (Ricavo del venditore) *Il ricavo del venditore è l'offerta del maggior offerente.*

Se con $V^{(1)}$ indico il valore più alto fra tutti quelli offerti e con R indico il ricavo del venditore ho $R = \beta(V^{(1)})$ e il calcolo di R coincide con la valutazione della seguente espressione:

$$R = E[V^{(2)} \mid V^{(2)} \leq V^{(1)}] \quad (215)$$

in cui $V^{(2)}$ è la valutazione più alta subito inferiore a $V^{(1)}$ ovvero è la seconda valutazione più alta. Si parla di “ordered statistics”. Si ha, quindi, dalla (215) in cui $V^{(1)}$ gioca il ruolo di un parametro:

$$E[R] = E_{V^{(1)}}[E[V^{(2)} \mid V^{(2)} \leq V^{(1)}]] \quad (216)$$

Nella (216) compare una doppia aspettazione tramite la quale si ricava che:

$$E[R] = E[V^{(1)}] \quad (217)$$

ovvero il ricavo ottimo coincide con la prima valutazione più alta. Vediamo ora come sia possibile arrivare a tale risultato. Si ha:

$$E[R] = E_{V^{(1)}}[\beta(V^{(1)})] = E_{V^{(1)}}\left[\frac{\int_0^V z dF^{n-1}(z)}{F^{n-1}(V^{n-1})}\right] \quad (218)$$

Se considero:

$$P(V^{(1)} \leq k) = F^n(k) + nF^{n-1}(k)(1 - F(k)) \quad (219)$$

(in cui conteggio tutte le offerte inferiori a k (primo addendo) e n volte il caso in cui $n - 1$ sono inferiori a k mentre 1 è più alta) ho la funzione di ripartizione di $V^{(1)}$ e quindi la (217).

5.2 Altri tipi di aste

5.2.1 Aste “all pay”

Sono aste in cui n partecipanti fanno un'offerta e chi offre di più vince l'asta ma tutti pagano, ciascuno la propria offerta: gli offerenti offrono di meno (se perdono devono pagare) ma chi vende incassa da tutti per cui un eventuale minor incasso rispetto al caso dell'asta di primo prezzo dipende da quanto sono minori le offerte dei singoli partecipanti. Per ogni funzione di distribuzione F il ricavo atteso è identico al caso precedente mentre cambia la funzione offerta che ora è del tipo:

$$\beta(V) = \int_0^V z dF^{n-1}(z) \quad (220)$$

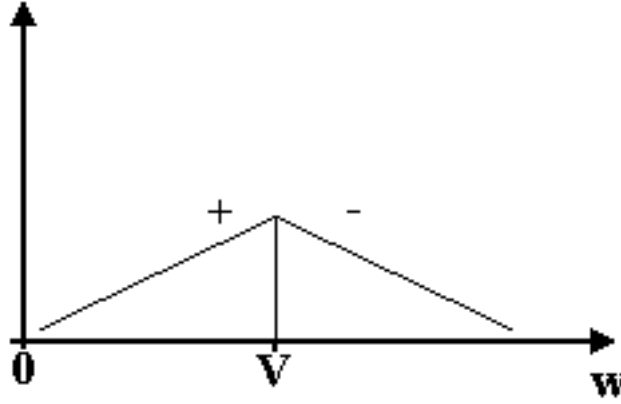
In questo tipo di asta il venditore incassa gli stessi soldi che incassa nel caso dell'asta di primo prezzo a patto che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

1. le distribuzioni dei giocatori sono le stesse,
2. le distribuzioni sono fra loro indipendenti.

5.2.2 Aste di secondo prezzo

Sono aste in cui n partecipanti fanno un'offerta e chi offre di più vince l'asta ma paga un prezzo pari alla seconda offerta più alta: il ricavo atteso è identico a quello nel caso di asta di primo prezzo. Per quanto riguarda la funzione offerta si ha:

$$\beta(V) = \frac{\int_0^V z dF^{n-1}(z)}{F^{n-1}(V)} \quad (221)$$

Figura 42: *(Dettagli nel testo)*

Tale relazione la si ricava imponendo condizioni del primo ordine. Tale soluzione, però, non è unica dato che ne esistono altre. Si deve dimostrare che $w = V$ è ottimale. In questo caso la condizione del primo ordine (derivata prima uguale a zero) è sufficiente per cui si deve verificare che, data β , $w = V$ è ottimale per il tipo V del giocatore i -esimo. Si ha:

$$\beta(w) = w - \frac{\int_0^w F^{n-1}(z)dz}{F^{n-1}} \quad (222)$$

ovvero:

$$(V - \beta(w))F^{n-1}(w) = (V - w + \frac{\int_0^w F^{n-1}(z)dz}{F^{n-1}(w)})F^{n-1}(w) = (V - w)F^{n-1}(w) + \int_0^w F^{n-1}(z)dz \quad (223)$$

in cui nel primo passaggio si usa la (222). Se ora derivo rispetto a w ottengo (vedi la figura 42):

$$-F^{n-1}(w) + (V - w)(F^{n-1}(w))' + F^{n-1}(w) = (V - w)(F^{n-1}(w))' \quad (224)$$

che ha lo stesso segno di $V - w$ perchè F è crescente e lo stesso vale per F^{n-1} per cui la sua derivata è positiva. Si ha quindi:

1. se $w < V$ il segno è positivo,
2. se $w > V$ il segno è negativo

per cui si ha un massimo per $w = V$.

5.3 Giochi dinamici

I **giochi dinamici** sono giochi in cui i giocatori eseguono le mosse in successione e non simultaneamente: in questo caso un giocatore, al momento di eseguire la sua mossa, conosce le mosse precedenti fatte dagli altri (nonchè le sue). L'aggettivo "dinamico" traduce il fatto che un giocatore può adattare la sua strategia alle mosse fatte dai giocatori che hanno giocato prima di lui.

Esempio 5.1 La figura 43 presenta un esempio di gioco dinamico descritto in forma estesa e in forma normale. In questo caso gli insiemi informativi sono dei singoletti per cui le strategie pure dei giocatori sono:

1. $S_1 = \{A, B\}$,
2. $S_2 = \{C, D\}$.

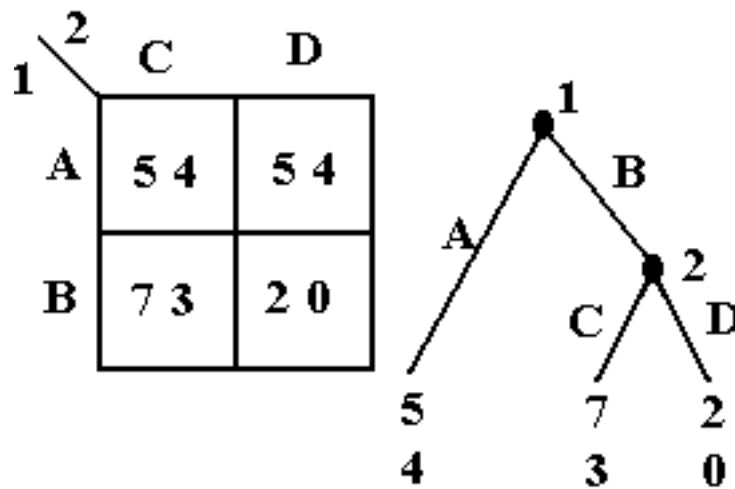


Figura 43: Esempio di gioco dinamico (dettagli nel testo)

Il gioco può essere risolto per dominanza debole notando che $C \succeq D$ per cui, nel gioco ridotto, si ha:

$$B \succ A \quad (225)$$

in modo che l'unico NE credibile sia (B, C) .

La forma normale perde un po' delle informazioni contenute nella forma estesa ma dalla sua analisi si può dedurre che:

1. si hanno due NE in strategie pure: (A, D) e (B, C) ,
2. si hanno infiniti equilibri in strategie miste.

Se si ipotizzano le seguenti distribuzioni di probabilità:

1. per il giocatore 1, $(p, 1 - p)$;
2. per il giocatore 2, $(q, 1 - q)$;

e si impone che sia:

1. $u_1(A, \sigma_2) = u_1(B, \sigma_2)$,
2. $u_2(\sigma_1, C) = u_2(\sigma_1, D)$,

dalla seconda condizione si ottiene $p = 1$ (cioè il giocatore 1 gioca una strategia pura A) in modo che q possa assumere qualunque valore in $(0, 1)$.

Se analizzo il gioco in forma estesa ho che:

1. se 1 gioca A il gioco termina con i payoff (nell'ordine) 5 e 4 e il comportamento di 2 è ininfluenza dal momento che non gli spetta di muovere;
2. se 1 pensa di giocare B può pensare che 2 risponda con D e in questo caso i payoff sono (nell'ordine) 2 e 0 ma tale ipotesi non è fondata dato che 2 giocando C ottiene un payoff più elevato (3 invece di 0) per cui (A, D) è un NE poco credibile;
3. la mossa D serve a "spaventare" 1 in modo da indurlo a giocare A ma, nel contesto del gioco di figura 43, tale minaccia non è credibile per cui 1 gioca B a cui 2 replica con C in modo che i payoff siano, nell'ordine, 7 e 3.

Prima di analizzare e risolvere i giochi dinamici si introducono alcune definizioni preliminari fra cui quella di **sottogioco** e di **equilibrio per i sottogiochi**.

Definizione 5.1 (Definizione di sottogioco) Un **sottogioco** è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1. inizia con un insieme di informazione che è un singoletto (ovvero è composto da un solo nodo);
2. contiene tutti i nodi successori del suo nodo iniziale;
3. non spezza insiemi di informazioni che contengono nodi successori del nodo iniziale.

Con riferimento alla figura 44 (a) si ha:

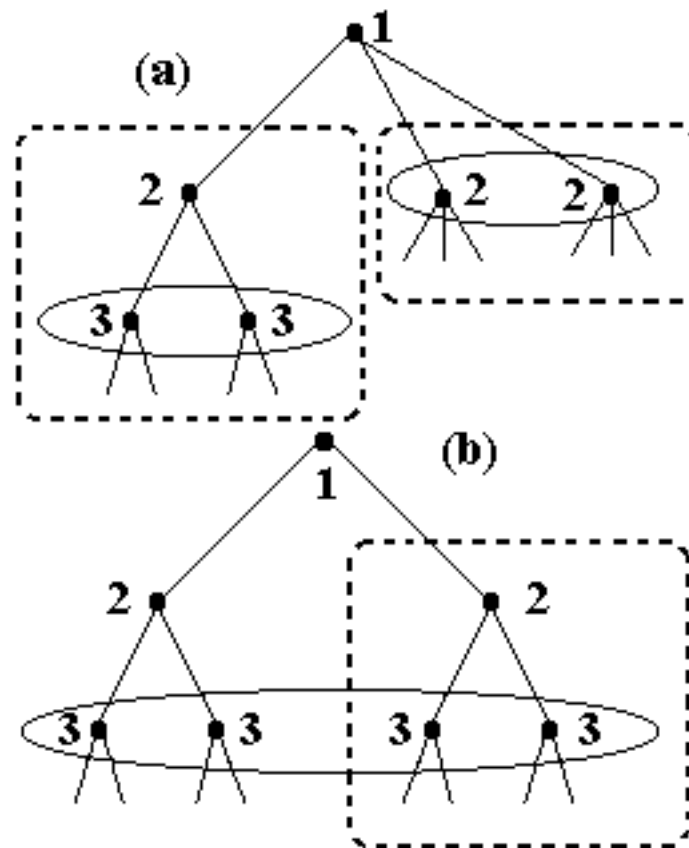


Figura 44: *Sottogiochi e non (dettagli nel testo)*

1. il rettangolo tratteggiato di sinistra individua un sottogioco,
2. il rettangolo tratteggiato di destra non individua un sottogioco perchè viola la prima delle proprietà suddette,
3. l'unico altro sottogioco è il gioco stesso.

Con riferimento alla figura 44 (b) si ha:

1. il rettangolo tratteggiato di destra non individua un sottogioco perchè viola la terza delle proprietà suddette,
2. il gioco presenta un solo sottogioco che coincide con il gioco stesso.

Nota 5.3 *Se i giocatori sanno di essere in un sottogioco questo può essere visto come un gioco a sè stante, autonomo rispetto al gioco nella sua globa-*

lità. In questo caso si può volere un NE del sottogioco, detto *SPNE* ovvero **Subgame Perfect NE** che rappresenta un raffinamento del concetto di NE.

Definizione 5.2 Dato un gioco rappresentato in forma estesa Γ_E , un suo sottogioco proprio è un sottogioco che non coincide con il gioco dato e soddisfa le proprietà della Definizione 5.1. Lo si indica con γ_{Γ_E} .

Definizione 5.3 Un profilo di strategie **pure** o **miste** è un SPNE per un gioco in forma estesa Γ_E se induce un NE in ogni sottogioco proprio γ_{Γ_E} di Γ_E .

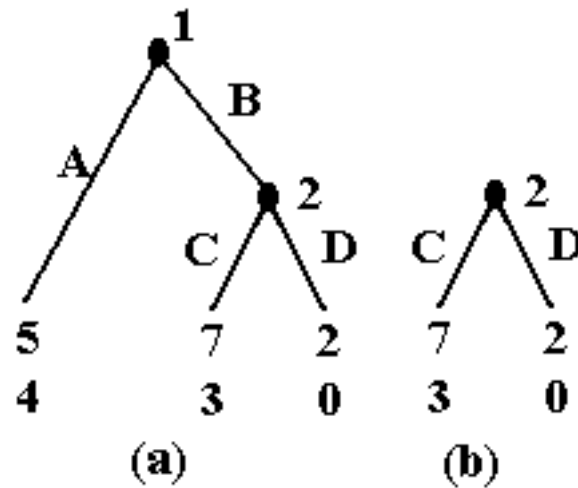


Figura 45: Sottogiochi propri e non (dettagli nel testo)

Con riferimento alla figura 45 si ha che i sottogiochi del gioco che vi viene rappresentato sono:

1. il gioco intero di figura 45 (a),
2. il sottogioco proprio di figura 45 (b).

Poichè il gioco Γ_E è un sottogioco di sè stesso ogni NE è anche un SPNE. Dall'analisi svolta nell'Esempio 5.1 si ha che (A, D) è un NE, si vuole sapere se è anche un SPNE. Per verificarlo considero l'unico sottogioco proprio mostrato in figura 45 (b). Tale sottogioco coinvolge solo il giocatore 2: è facile vedere che, essendo $3 > 0$, un NE del sottogioco è C per cui (A, D) induce nel sottogioco la mossa D (distinta da C). Tale mossa non è un NE per il sottogioco per cui (A, D) induce D nel sottogioco mentre il NE del sottogioco

è C : da qui segue che (A, D) non è SPNE.

L'altro NE individuato nell'Esempio 5.1 è (B, C) che, per quanto detto prima, è un SPNE dato che induce nel sottogioco la mossa C che è NE per il sottogioco. Si ha quindi che (B, C) è l'unico SPNE del gioco nella sua interezza.

Se 2 non può giocare o vede restringere la sua scelta in modo da non poter giocare C (precludendosi una scelta per lui ottimale) tale fatto (se noto) influenza 1 che, a priori, può sempre scegliere A o B : se sceglie B sa che dopo può solo seguire D con payoff 2 e 0 per cui 1 sceglie A con payoff 5 e 4.

Esempio 5.2 Nel caso del gioco di figura 46 si hanno due possibili sottogiochi:

1. il gioco nella sua interezza,
2. il sottogioco proprio che si diparte dal nodo etichettato con 1 distinto dalla radice dell'albero.

Se si considera l'unico sottogioco proprio e lo si rappresenta sia in forma estesa sia in forma normale (vedi la figura 47) è possibile analizzarlo alla ricerca di eventuali NE in strategie pure. Nel sottogioco proprio si ha che per

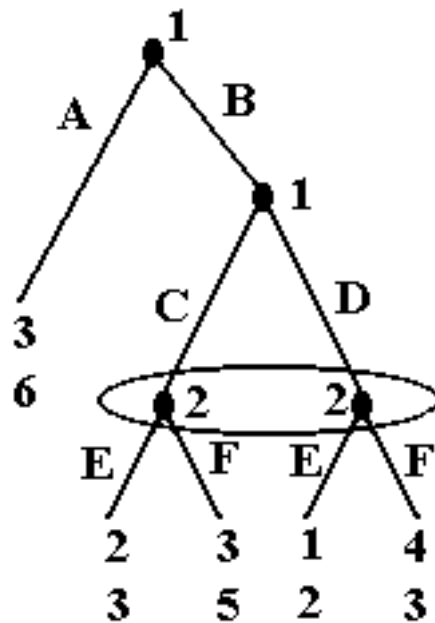


Figura 46: NE e SPNE (dettagli nel testo)

il giocatore 2 la strategia F è strettamente dominante dal momento che per i payoff di 2 si ha:

1. $5 > 3$,
2. $3 > 2$

per cui 2 gioca F e, quindi, 1 gioca D dal momento che $4 > 3$. Se riporto tali discorsi sulla forma normale ho che, dalla dominanza di F su E per 2, segue la dominanza (cancellazioni iterate) di D su C per 1 per cui l'unico NE del sottogioco proprio è (D, F) . Da ciò segue che ogni SPNE del gioco intero Γ_E deve essere fatto così. Siccome 2 deve giocare F , se 1 gioca C tale

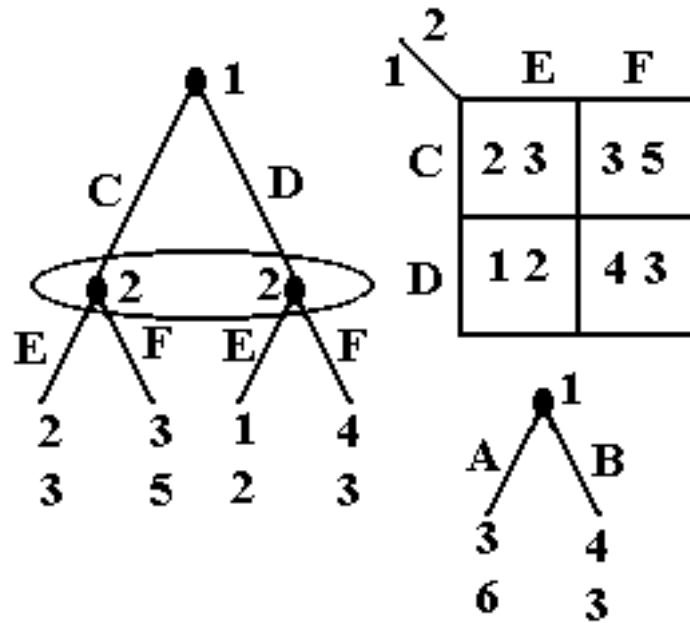


Figura 47: Sottogioco con SPNE (dettagli nel testo)

mossa non induce un NE nel sottogioco proprio ma se 1 gioca D allora la mossa induce un NE nel sottogioco proprio. In tal caso posso sostituire il sottogioco proprio con l'esito che ne rappresenta il NE in modo da ottenere il gioco ridotto raffigurato in basso a destra nella figura 47.

Da tale gioco ridotto (che contiene il NE del sottogioco proprio) si vede che 1 preferisce B (perchè $4 > 3$) per cui si ha il SPNE di Γ_E .

In modo formale si ha che il SPNE del gioco Γ_E è dato da:

$$BD, F \quad (226)$$

ovvero da una strategia di 1 e dalla mossa di 2 e quindi:

$$S_E = (s_1, s_2) = (\{BD\}, \{F\}) \quad (227)$$

Nel gioco completo le strategie di 1 sono, infatti, le seguenti:

$$S_1 = \{A, B\} \times \{C, D\} = \{AC, AD, BC, BD\} \quad (228)$$

mentre le strategie di 2 sono:

$$S_2 = \{E, F\} \quad (229)$$

Si parla di **backward induction** per ogni sottogioco terminale (ovvero per ogni sottogioco che non contiene sottogiochi).

Siccome nell'unico sottogioco proprio si ha un solo NE dato da (D, F) è facile vedere che:

1. (AC, E) è un NE ma non è uno SPNE,
2. (AD, E) è un NE ma non è uno SPNE.

Nota 5.4 Il fatto che per il giocatore 2 si ha una dominanza stretta nell'unico sottogioco proprio significa che 2 gioca una strategia pura per cui lo stesso vale anche per il giocatore 1.

Esempio 5.3 Se si modifica l'esempio delle figure 46 e 47 come illustrato in figura 48 si ha che il gioco presenta di nuovo un solo sottogioco proprio, indicato dal rettangolo tratteggiato e denotato con γ . In questo caso per 2 nè F nè E sono strettamente dominanti. Se si rappresenta il sottogioco in forma normale (vedi la tabella in figura 48) nel sottogioco si hanno i seguenti NE in strategie pure:

1. se 2 gioca E 1 gioca C mentre se 1 gioca C allora 2 gioca E per cui (C, E) è NE per il sottogioco;
2. se 2 gioca F 1 gioca D mentre se 1 gioca D allora 2 gioca F per cui (D, F) è NE per il sottogioco.

In strategie miste l'unico NE è dato da:

1. $(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F)$

calcolato assegnando le probabilità $x, 1 - x$ a 2 e $y, 1 - y$ a 1, calcolando le utilità attese ed imponendo le condizioni di indifferenza.

In questo caso è meno evidente come procedere all'indietro con la backward induction dal momento che il sottogioco proprio ha tre NE (due in strategie pure e uno in strategie miste). A questo punto ci si pongono le seguenti domande.

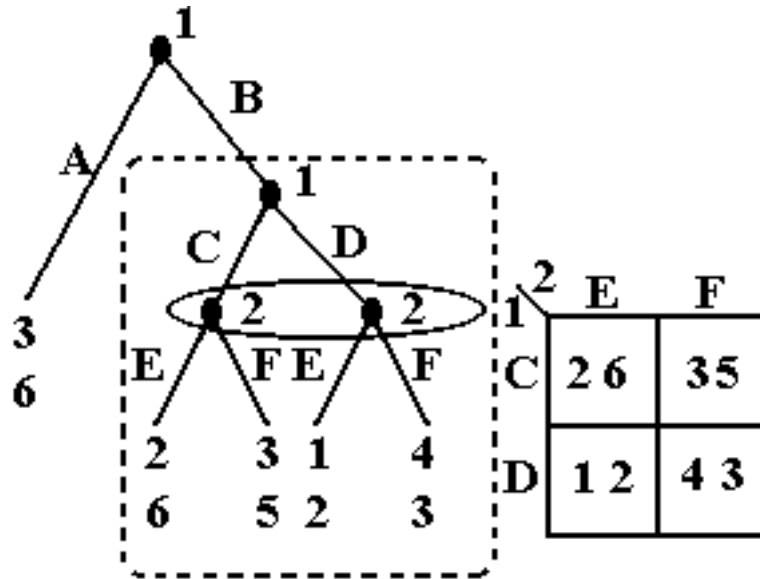


Figura 48: Gioco con sottogioco e SPNE (dettagli nel testo)

1. Se esistono SPNE che inducono il NE (C, E) nel sottogioco proprio γ : con riferimento alla figura 49(a) si ha un gioco ridotto in cui nel gioco completo il sottogioco è sostituito dal NE (C, E) per cui 1 sceglie A e non B per massimizzare la propria utilità e quindi (AC, E) è SPNE in quanto induce (C, E) nel sottogioco.
2. Se esistono SPNE che inducono il NE (D, F) nel sottogioco proprio γ : con riferimento alla figura 49(b) si ha un gioco ridotto in cui nel gioco completo il sottogioco è sostituito dal NE (D, F) per cui 1 sceglie B e non A per massimizzare la propria utilità e quindi (BD, F) è SPNE in quanto induce (D, F) nel sottogioco.
3. Se esistono SPNE che inducono il NE $(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F)$ nel sottogioco proprio γ : con riferimento alla figura 49(c) si ha un gioco ridotto in cui nel gioco completo il sottogioco è sostituito dal NE $(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F)$ per cui 1 sceglie A e non B per massimizzare la propria utilità e quindi $(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F)$ è SPNE.

Nel gioco complessivo le strategie dei due giocatori sono:

$$S_1 = \{A, B\} \times \{C, D\} = \{AC, AD, BC, BD\} \quad (230)$$

$$S_2 = \{E, F\} \quad (231)$$

Nell'esempio di figura 49 si hanno tre SPNE ovvero:

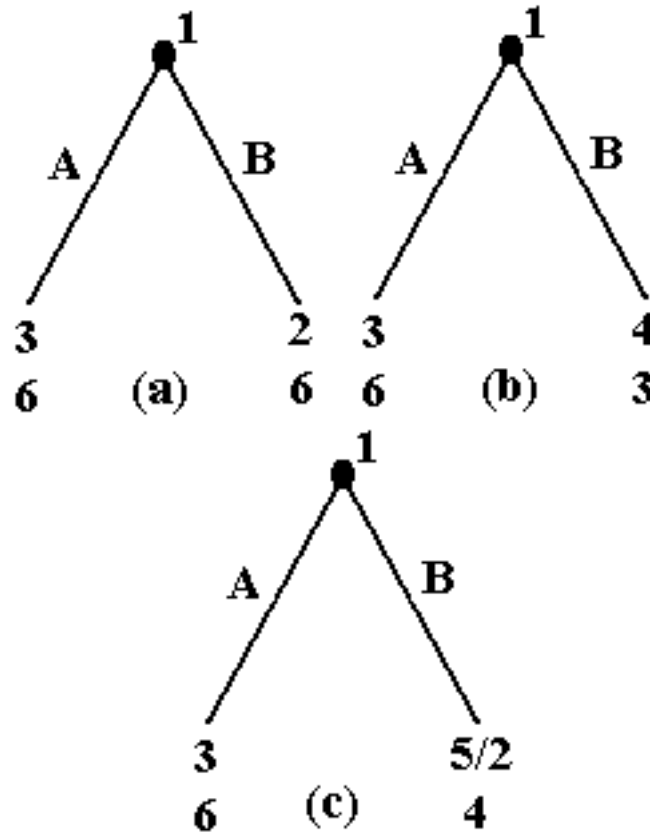


Figura 49: *Giochi ridotti e SPNE (dettagli nel testo)*

1. (AC, E)
2. $(A\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F)$
3. (BD, F)

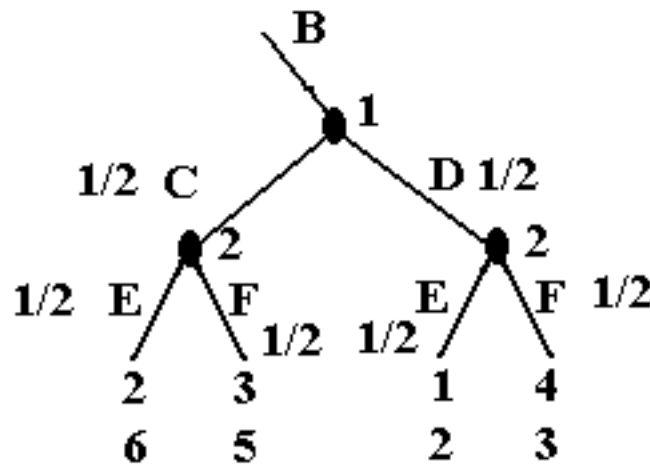
Nei primi due 1 gioca A e il gioco termina, nel terzo si entra nel sottogioco. La figura 50 illustra il calcolo delle utilità per la strategia mista $(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F)$ (vedi anche la figura 49(c)). Si hanno le seguenti utilità attese:

1. per il giocatore 1

$$(2 + 3 + 1 + 4)\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (232)$$

2. per il giocatore 2

$$(6 + 5 + 2 + 3)\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 4 \quad (233)$$

Figura 50: *Strategia mista (dettagli nel testo)*

5.4 Esercizi

5.4.1 Esercizio 1

La figura 51 presenta un gioco a somma nulla a due giocatori con mosse simultanee in forma estesa. Il gioco si svolge nel modo seguente:

1. il giocatore 1 può o terminare il gioco subito (mossa Q , per quit) con payoff $1/3, -1/3$ oppure entrare nel gioco (mossa E , per enter),
2. se 1 inizia il gioco vero e proprio entrambi puntano simultaneamente *testa* (H) o *croce* (T);
3. se entrambi puntano H o T vince 2 e i payoff sono $-1, +1$;
4. se uno punta T e l'altro H vince 1 e i payoff sono $+1, -1$.

Le strategie pure dei due giocatori sono le seguenti:

1. $S_1 = \{Q, E\} \times \{H, T\} = \{QH, QT, EH, ET\}$
2. $S_2 = \{H, T\}$

La figura 52 presenta la forma normale dello stesso gioco. È possibile usare la rappresentazione in forma normale per ricavare le **strategie miste**. A tale scopo si assegnano distribuzioni di probabilità σ_1 e σ_2 rispettivamente alle strategie pure S_1 e S_2 ovvero:

1. $\sigma_1 = \{p, q, z, 1 - p - q - z\}$

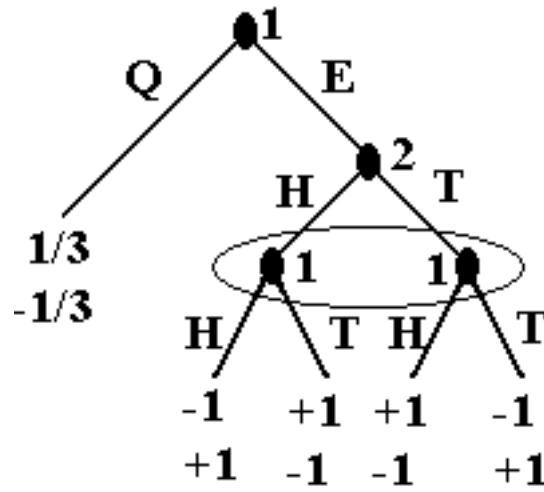


Figura 51: *Esercizio 1: forma estesa (dettagli nel testo)*

$$2. \sigma_2 = \{r, 1 - r\}$$

con $p, q, r, z \in [0, 1]$ (vedi la figura 52).

Se considero il sottogioco (A) di figura 52, sfruttando l'indipendenza statistica delle mosse dei due giocatori, ottengo la seguente espressione delle utilità attese:

$$(rp + rq + (1 - r)p + (1 - r)q, rp + rq + (1 - r)p + (1 - r)q)\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T \quad (234)$$

svolgendo i calcoli e semplificando si arriva a:

$$(p + q, p + q)\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T \quad (235)$$

eguagliando le due utilità attese si ha come unica soluzione

$$p = q = 0 \quad (236)$$

per cui il giocatore 1 non sceglie le strategie QH e QT .

Partendo dalla (236) si considera ora il sottogioco (B) di figura 52. Il calcolo delle utilità attese dà luogo alle seguenti relazioni:

1. per il giocatore 1

$$E[1] = -rz + r(1 - z) + z(1 - r) - (1 - r)(1 - z) \quad (237)$$

		$\mathbf{r}$		$\mathbf{1-r}$	
		$\mathbf{H}$		$\mathbf{T}$	
$\mathbf{p}$	$\mathbf{QH}$	$\mathbf{1/3 -1/3}$		$\mathbf{1/3 -1/3}$	} (A)
	$\mathbf{QT}$	$\mathbf{1/3 -1/3}$		$\mathbf{1/3 -1/3}$	
$\mathbf{z}$	$\mathbf{EH}$	$\mathbf{-1 +1}$		$\mathbf{+1 -1}$	} (B)
	$\mathbf{ET}$	$\mathbf{+1 -1}$		$\mathbf{-1 +1}$	

Figura 52: *Esercizio 1: forma normale (dettagli nel testo)*

2. per il giocatore 2

$$E[2] = rz - r(1 - z) - z(1 - r) + (1 - r)(1 - z) \quad (238)$$

ovvero $E[1] = -E[2]$.

Svolgendo i calcoli nelle (237) e (238), semplificando ed eguagliando le espressioni così ottenute (condizione di indifferenza) si hanno i valori di probabilità che rendono i giocatori 1 e 2 indifferenti alle strategie con probabilità non nulla (ovvero EH e ET per 1 e H e T per 2):

$$r = z = \frac{1}{2} \quad (239)$$

per cui un NE in strategie miste è possibile con le seguenti distribuzioni di probabilità:

1. $\sigma_1 = \{0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$
2. $\sigma_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

cui corrispondono le strategie miste:

1. per 1: $\frac{1}{2}EH + \frac{1}{2}ET$
2. per 2: $\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}T$

5.4.2 Esercizio 2

La figura 53 (a) presenta la forma estesa di un gioco a due giocatori e a mosse successive in cui i giocatori 1 e 2 hanno le seguenti strategie:

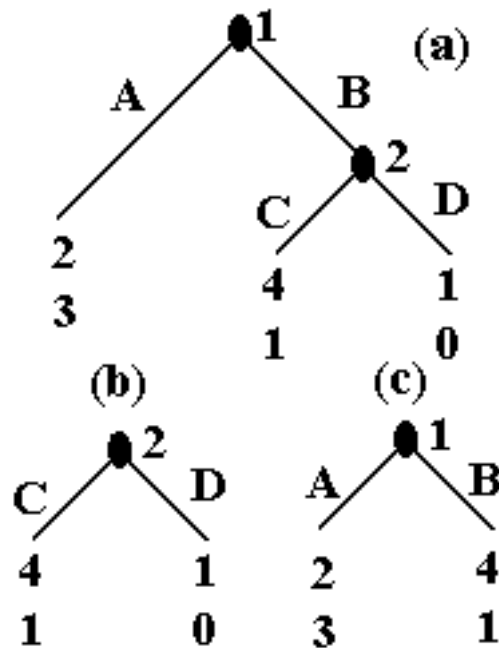


Figura 53: *Esercizio 2: forma estesa (a) sottogioco proprio (b) e gioco ridotto (c) (dettagli nel testo)*

1. $S_1 = \{A, B\}$
2. $S_2 = \{C, D\}$

Dall'analisi della forma normale di tale gioco (vedi la figura 54) si ha che i NE in strategie pure sono:

1. (B, C)
2. (A, D)

Si vuole ora valutare se entrambi i NE che si sono trovati sono legati a minacce credibili o no. Per fare ciò si può svolgere un'analisi dei sottogiochi. Il gioco di figura 53 (a) contiene un solo sottogioco proprio (rappresentato in figura 53 (b)). Tale sottogioco ha come NE la strategia C.

1 ²		C	D
		A	B
A	2 3	2 3	
B	4 1	1 0	

Figura 54: *Esercizio 2: forma normale (dettagli nel testo)*

A questo punto, se si ricava il gioco ridotto (rappresentato in figura 53 (c)), si vede come nel gioco ridotto 1 scelga, per massimizzare la propria utilità, B per cui (B, C) è sia SPNE (perchè induce un NE nel sottogioco proprio) sia NE del gioco nella sua interezza (per quanto visto in precedenza): da ciò discende che l'equilibrio (A, D) è legato ad una minaccia non credibile. Ragionando in altro modo si ha (partendo dal presupposto di conoscenza mutua e comportamenti razionali):

1. se il giocatore 2 ha la possibilità di giocare (ovvero se 1 non gioca A) allora sceglie C perchè ottiene un payoff migliore (1 invece di 0);
2. il giocatore 1 sa che se gioca A ottiene 2 ma se gioca B , siccome 2 tenderà a massimizzare la propria utilità giocando C , ottiene 4

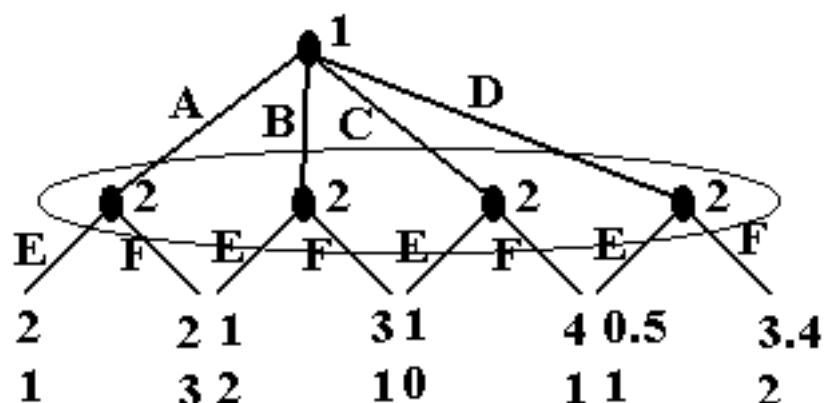
per cui 1 gioca B .

5.4.3 Esercizio 3 (cenni)

La figura 55 illustra la forma estesa di un gioco a due giocatori con mosse simultanee: il giocatore 2 non conosce la mossa fatta da 1 per cui non può adeguare ad essa la propria strategia. Ciò implica che le strategie pure dei due giocatori sono le seguenti:

1. $S_1 = \{A, B, C, D\}$
2. $S_2 = \{E, F\}$

La figura 56 dà la forma normale dello stesso gioco. Contrariamente alle convenzioni usate finora, le etichette delle righe sono le strategie di 2 e quelle

Figura 55: *Esercizio 3: forma estesa (dettagli nel testo)*

2 \ 1		A	B	C	D
		E	F		
	E	2 1	1 2	1 0	0.5 1
	F	2 3	3 1	4 1	3.4 2

Figura 56: *Esercizio 3: forma normale (dettagli nel testo)*

delle colonne le strategie di 1 mentre i payoff sono nell'ordine 1, 2.

Da una sua analisi si vede che non si ha una dominanza nè per 1 nè per 2.

Vediamo di ricavare i NE in strategie pure. Si ha:

1. se 2 gioca *E* la miglior risposta per 1 è *A* ma se 1 gioca *A* la miglior risposta per 2 è *F* per cui non esiste un NE con 2 che gioca *E*;
2. se 2 gioca *F* la miglior risposta per 1 è *C* e se 1 gioca *C* la miglior risposta per 2 è *F* per cui (C, F) è un NE con 2 che gioca *F*.

La ricerca di NE in strategie miste prevede l'assegnazione di una distribuzione di probabilità alle strategie di 2 (tipo $(x, 1 - x)$) e la definizione dei vari

supporti possibili per 1 con relativi assegnamenti di distribuzioni di probabilità. Si valutano poi le utilità attese nei vari casi e si impongono le condizioni di indifferenza.

Possibili supporti per 1 sono:

1. $\{A, B, C, D\}$ con distribuzione $y, w, z, 1 - y - w - z$,
2. $\{A, B, C\}$ con distribuzione $y, w, 1 - y - w, 0$,
3. $\{A, B, D\}$ con distribuzione $y, w, 0, 1 - y - w$,
4. $\{B, C, D\}$ con distribuzione $0, w, z, 1 - w - z$,
5. $\{A, B\}$ con distribuzione $y, 1 - y, 0, 0$,
6. $\{A, C\}$ con distribuzione $y, 0, 1 - y, 0$,
7. $\{A, D\}$ con distribuzione $y, 0, 0, 1 - y$,
8. $\{B, C\}$ con distribuzione $0, w, 1 - w, 0$,
9. $\{B, D\}$ con distribuzione $0, w, 0, 1 - w$,
10. $\{C, D\}$ con distribuzione $0, 0, z, 1 - z$,

e li si deve esaminare tutti.

5.4.4 Esercizio 4

Con riferimento alle figure 53 e 54 si vogliono i NE in strategie miste del gioco ivi rappresentato. Si suppone che:

1. 1 gioca A con probabilità q e B con probabilità $(1 - q)$ ovvero a 1 è associata una distribuzione di probabilità pari a $(q, 1 - q)$;
2. 2 gioca C con probabilità p e D con probabilità $(1 - p)$ ovvero a 2 è associata una distribuzione di probabilità pari a $(p, 1 - p)$.

I supporti possibili per 1 sono:

1. $\{A\}$ con distribuzione $1, 0$ ovvero strategia pura,
2. $\{B\}$ con distribuzione $0, 1$ ovvero strategia pura,
3. $\{A, B\}$ con distribuzione $q, 1 - q$ ovvero strategia mista.

I supporti possibili per 2 sono:

1. $\{C\}$ con distribuzione $1, 0$ ovvero strategia pura,
2. $\{D\}$ con distribuzione $0, 1$ ovvero strategia pura,
3. $\{C, D\}$ con distribuzione $p, 1 - p$ ovvero strategia mista.

Supponiamo 2 giochi una strategia mista con distribuzione di probabilità $(p, 1 - p)$, per il giocatore 1 si hanno le seguenti utilità attese:

$$u_1(A, \sigma_2) = 2p + 2(1 - p) = 2 \quad (240)$$

$$u_1(B, \sigma_2) = 4p + (1 - p) = 1 + 3p \quad (241)$$

La condizione di indifferenza per 1 rispetto al giocare A o B è che sia $u_1(A, \sigma_2) = u_1(B, \sigma_2)$ da cui, svolgendo semplici calcoli, si ricava:

$$p = \frac{1}{3} \quad (242)$$

Ragionando in modo analogo nel caso della strategia mista per 2 si ha:

$$u_2(C, \sigma_1) = 3q + (1 - q) = 1 + 2q \quad (243)$$

$$u_2(D, \sigma_1) = 3q + 0(1 - q) = 3q \quad (244)$$

La condizione di indifferenza per 2 rispetto al giocare C o D è che sia $u_2(\sigma_1, C) = u_2(\sigma_1, D)$ da cui, svolgendo semplici calcoli, si ricava:

$$q = 1 \quad (245)$$

ovvero 2 è indifferente fra C e D solo se 1 gioca la strategia pura A .

6 Sesta Lezione

6.1 Backward induction

Si introduce una procedura che ci permette di ricavare equilibri di tipo SPNE, ovvero NE perfetti nei sottogiochi. Tale procedura è detta induzione all'indietro o **backward induction** (BI).

Definizione 6.1 *Si definisce **sottogioco terminale** ogni sottogioco che non contenga altri sottogiochi al proprio interno.*

Definizione 6.2 (BI: definizione operativa) *La BI si basa sui passi seguenti:*

1. *si individuano tutti i **sottogiochi terminali**:*
2. *per ogni sottogioco terminale si individuano i possibili **NE**, compresi quelli in strategie miste;*
3. *ogni sottogioco terminale è sostituito dalle utilità del profilo di strategie che corrisponde all'equilibrio ovvero:*
 - (a) *se il NE è unico si ha una sola sostituzione,*
 - (b) *se non è unico si hanno tante sostituzioni quanti i NE;*
4. *per ogni sottogioco sostituito si verifica se il profilo di strategie che individua un NE nel gioco complessivo induce un NE nel sottogioco (per cui si ha un SPNE) oppure no (e non si ha un SPNE);*
5. *si ripetono i passi precedenti fino a che non si riesce più ad individuare alcun sottogioco terminale.*

Esempio 6.1 *La figura 57 presenta un gioco in forma estesa in cui compaiono i tre sottogiochi terminali evidenziati dai poligoni tratteggiati etichettati con (1), (2) e (3). Si ha:*

1. *nel sottogioco terminale (2) il giocatore 2 preferisce M a L (ha una utilità più alta nel primo caso);*
2. *nel sottogioco terminale (3) il giocatore 1 preferisce P a Q (ha una utilità più alta nel primo caso);*
3. *il sottogioco terminale (1) deve essere esaminato a parte.*

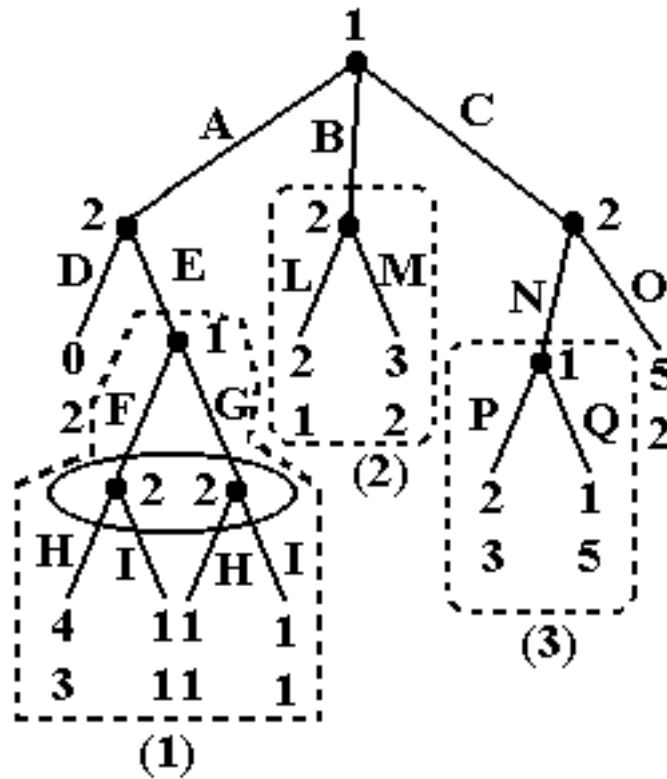


Figura 57: Sottogiochi terminali (dettagli nel testo)

Se rappresento il sottogioco terminale (1) in forma normale ho la tabella 2. Da un'esame di tale tabella si può facilmente vedere che in strategie pure si ha:

1. (F, H) è un NE,
2. (G, I) è un NE,

È facile vedere che non si hanno NE in strategie miste. Se $(q, 1-q)$ fosse una distribuzione di probabilità per 2 e $(p, 1-p)$ fosse una distribuzione di probabilità per 1 dovrei avere le seguenti condizioni di indifferenza, rispettivamente per il giocatore 1 e per il giocatore 2:

1. $4q + (1-q) = q + (1-q)$ da cui $q = 0$,
2. $3p + (1-p) = p + (1-p)$ da cui $p = 0$.

1 vs. 2	H	I
F	4,3	1,1
G	1,1	1,1

Tabella 2: Forma normale del sottogioco (1)

in modo che il giocatore 1 sia indifferente fra F e G solo se il giocatore 2 sceglie la strategia I mentre il giocatore 2 è indifferente fra H e I solo se il giocatore 1 sceglie la strategia G .

Il sottogioco terminale (1) ha due NE per cui devo operare due sostituzioni. Per prima cosa sostituisco al sottogioco (1) un NE del sottogioco, ovvero il profilo di strategie (F, H) , in modo da ottenere la situazione di figura 58 (alto). In tale gioco ridotto ho due nuovi sottogiochi terminali, evidenziati dai poligoni tratteggiati etichettati con (1) e (2). Si ha:

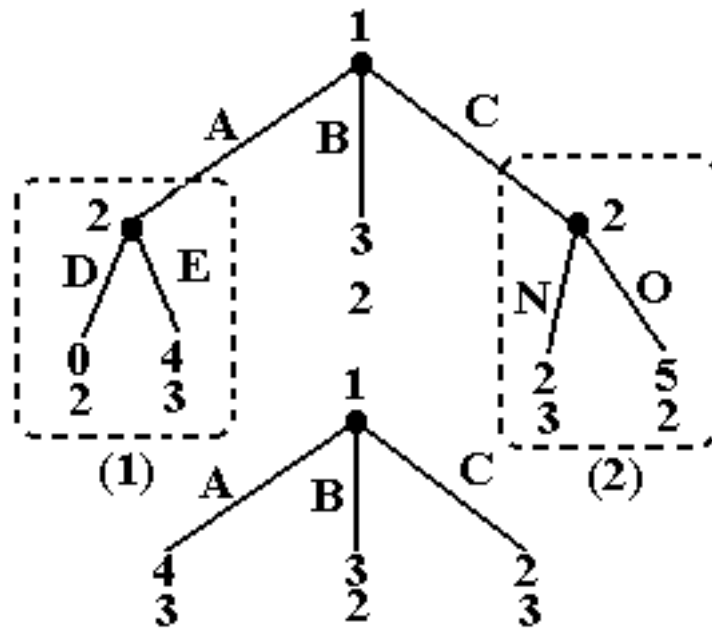


Figura 58: Sottogiochi terminali con riduzioni (dettagli nel testo)

1. nel sottogioco terminale (1) il giocatore 2 preferisce E a D (ha una utilità più alta nel primo caso),
2. nel sottogioco terminale (2) il giocatore 2 preferisce N a O (ha una utilità più alta nel primo caso).

In questo modo si ottiene il gioco ulteriormente ridotto raffigurato in figura 58 (basso): per tale gioco si ha che il giocatore 1 sceglie A piuttosto che B o C perchè così ottiene una utilità maggiore.

In questo modo si è ricavato un SPNE come equilibrio di strategie.

Nel gioco complessivo le strategie dei due giocatori sono, nell'ordine:

$$S_1 = \{A, B, C\} \times \{F, G\} \times \{P, Q\} \quad (246)$$

$$S_2 = \{D, E\} \times \{H, I\} \times \{L, M\} \times \{N, O\} \quad (247)$$

A questo punto si devono indicare le strategie di 1 e 2 che portano all'SPNE nel caso del processo di applicazione della BI ora esaminato. Tali strategie sono, per i due giocatori nell'ordine:

1. $\{AFP\}$ ovvero le mosse preferite da 1 in tutti i casi in cui si può trovare a giocare;
2. $\{EHMN\}$ ovvero le mosse preferite da 2 in tutti i casi in cui si può trovare a giocare.

Se, in modo simile a quanto fatto nel caso precedente, sostituisco il NE (G, I) si ha la situazione di figura 59 (alto). In tale figura si hanno i due sottogiochi terminali evidenziati dai poligoni tratteggiati etichettati con (1) e (2). In questo caso si ha:

1. nel sottogioco terminale (1) il giocatore 2 preferisce D a E (ha una utilità più alta nel primo caso),
2. nel sottogioco terminale (2) il giocatore 2 preferisce N a O (ha una utilità più alta nel primo caso),

Si ottiene così il gioco ulteriormente ridotto raffigurato in figura 59 (basso): per tale gioco si ha che il giocatore 1 sceglie B piuttosto che A o C perchè così ottiene una utilità maggiore.

In questo modo si è ricavato un SPNE come equilibrio di strategie.

Di nuovo si devono indicare le strategie di 1 e 2 che portano all'SPNE nel caso del processo di applicazione della BI ora esaminato. Tali strategie sono:

1. per 1: $\{BGP\}$ ovvero le mosse preferite da 1 in tutti i casi in cui si può trovare a giocare;
2. per 2: $\{DIMN\}$ ovvero le mosse preferite da 2 in tutti i casi in cui si può trovare a giocare.

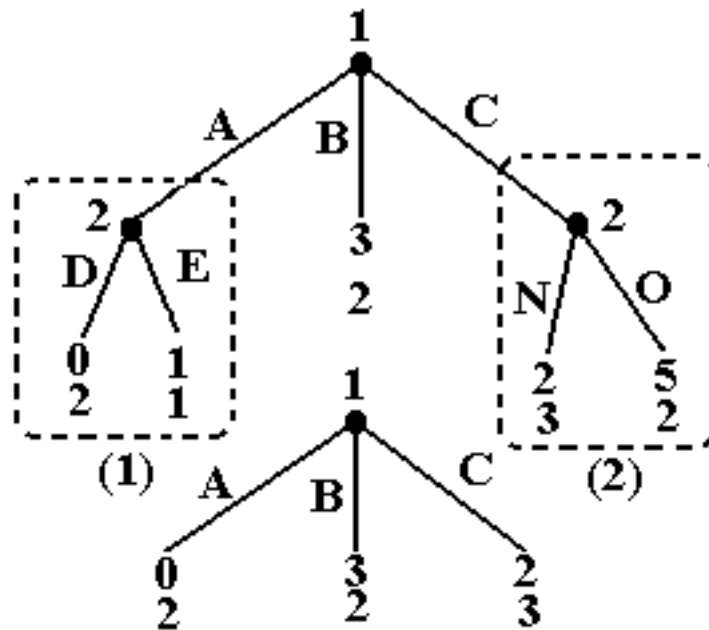


Figura 59: Sottogiochi terminali con riduzioni (dettagli nel testo)

Nota 6.1 Esistono molti giochi che hanno più NE. Si vogliono condizioni per:

1. l'esistenza,
2. l'unicità.

Nei **giochi finiti** l'esistenza è assicurata ma non l'unicità. È possibile definire il concetto di equilibrio in modo da avere assicurata l'unicità? Si può far ricorso al concetto di SPNE. Se si hanno molti sottogiochi si hanno molte restrizioni alle strategie, se non si hanno sottogiochi propri ogni NE è SPNE per cui la definizione di SPNE è tanto più restrittiva quanto più alto è il numero dei sottogiochi.

Nel caso di **giochi a informazione perfetta** (ovvero nei giochi in cui, al momento di giocare, ogni giocatore conosce tutte le mosse che sono state fatte da lui e dagli altri nel passato) ad ogni nodo corrisponde un sottogioco, dato che ogni nodo appartiene ad un insieme di informazione distinto (singoletto). Nel caso di SPNE si hanno alcuni “casi strani” in presenza di:

1. giochi troppo complicati,
2. indifferenze.

Vediamo un esempio.

Esempio 6.2 La figura 60 presenta un gioco a mosse successive a due giocatori in forma estesa e in forma normale. Le strategie dei giocatori sono, rispettivamente:

1. $S_1 = \{X, Y\}$,
2. $S_2 = \{A, B\} \times \{C, D\} = \{AC, AD, BC, BD\}$

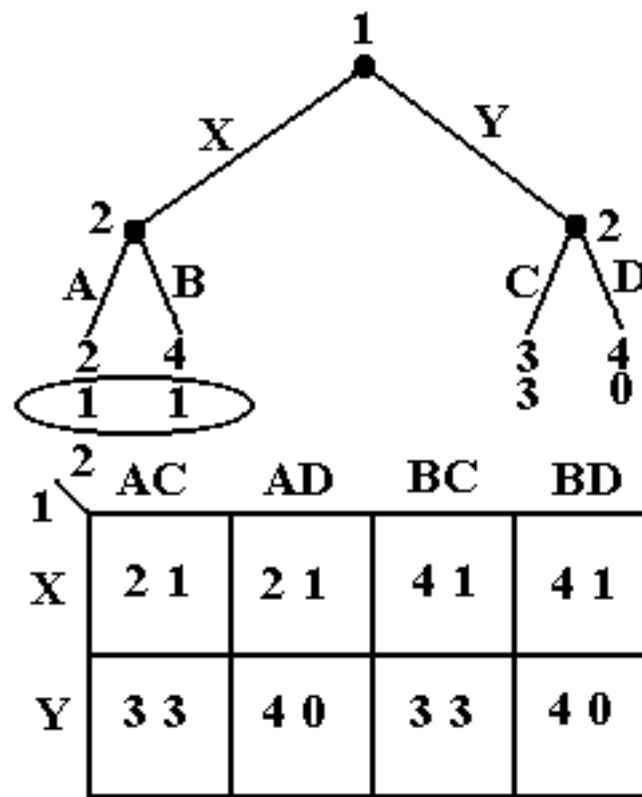


Figura 60: Gioco con indifferenze (dettagli nel testo)

La presenza di una condizione di indifferenza per 2 (evidenziata in figura 60 da un circoletto) induce più SPNE mediante BI. Il gioco di figura 60 presenta, infatti, due sottogiochi terminali: quello che contiene le mosse A e B per il giocatore 2 e quello che contiene le mosse C e D, sempre per il giocatore 2. Il primo dà luogo alle due sostituzioni A e B mentre il secondo solo alla C per cui le strategie associate agli SPNE con BI sono:

1. (Y, AC) ,

2. (X, BC) .

Esempio 6.3 (Gioco del centipede) *Il gioco è illustrato (in forma estesa) in figura 61. Si tratta di un gioco a informazione perfetta che si svolge*

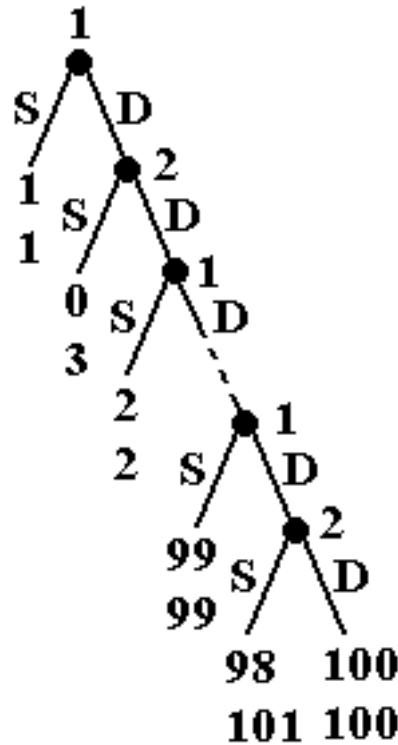


Figura 61: *Gioco del centipede (dettagli nel testo)*

come segue: ad ogni turno sia 1 sia 2 possono giocare o S (e il gioco termina con i payoff indicati) o D (e il turno passa all'altro) fino al centesimo turno (in cui muove 2) quando il gioco termina comunque con i payoff indicati. Se si ragiona in termini di BI pura si vede che il gioco termina subito perchè 1 gioca S . Vediamo il motivo. Se 1 pensa di arrivare fino in fondo allora sa che 2 gioca S per cui a lui al turno prima conviene giocare S . Lo stesso ragionamento lo può fare 2 che al turno ancora prima gioca S e così via a ritroso fino alla prima mossa di 1 che gioca S e si prende 1 invece di 100 che prenderebbe se arrivasse alla fine del gioco. Si ha quindi che $(1, 1)$ è un SPNE ma che non è Pareto ottimo perchè entrambi hanno possibilità di migliorare la propria situazione: se 1 adottasse la strategia di giocare D all'inizio e

di proseguire e se anche 2 giocasse D alla sua prima mossa e decidesse di proseguire entrambi arriverebbero alla fine del gioco avendo payoff identici e pari a 100. Si noti che non si tratta di strategie “canoniche” perchè ad ogni passo il giocatore cui spetta di muovere ha interesse a deviare, si tratta di strategie cooperative.

6.2 Giochi finitamente ripetuti

Si esaminano ora i cosiddetti **giochi ripetuti**, ovvero giochi che sono ripetuti un certo numero n di volte (e non solo una), con n che può essere potenzialmente infinito o, almeno, non noto a priori ai giocatori. Si è visto il caso del gioco di Bertrand Γ_N in cui si hanno due imprese che fissano simultaneamente i prezzi e vendono certe quantità di certi prodotti. Se lo stesso gioco è ripetuto T volte lo si indica con $\Gamma_N(T)$. In tal caso si ha:

1. $t = 0$ si gioca il gioco Γ_N e si osserva l'esito,
2. $t = 1$ si gioca il gioco Γ_N e si osserva l'esito,
3. $t = 2$ si gioca il gioco Γ_N e si osserva l'esito,
4. ...

Per ogni $t > 1$ e fino a $t = T$ si hanno comportamenti condizionati dalla storia passata.

Definizione 6.3 (Descrizione formale) *Si considera un gioco che viene ripetuto $T + 1$ volte (ovvero si hanno $T + 1$ ripetizioni). Dato $t \in (0, T]$ le due imprese scelgono i prezzi $(p_{1,t}, p_{2,t})$ avendo osservato i prezzi nei periodi precedenti a t . Si ha che i prezzi $(p_{1,t}, p_{2,t})$ dipendono da:*

$$\{(p_{1,\tau}, p_{2,\tau})\}_{\tau=0}^{t-1} \quad (248)$$

con $t > 1$. Se indico con π_{it} i profitti di $i = 1, 2$ negli istanti $t = 1, \dots, T$ e con $\delta \in (0, 1)$ il **fattore di sconto** ho che il profitto totale è dato dalla seguente quantità:

$$\sum_{t=0}^T \delta^t \pi_{it} = \pi_{i0} + \delta \pi_{i1} + \delta^2 \pi_{i2} + \dots + \delta^T \pi_{iT} \quad (249)$$

ovvero i profitti di un'impresa all'istante 1 valgono meno dei profitti che ha fatto all'istante 0 e così via. Il fattore di sconto δ indica quanto valgono i profitti del futuro ($t > 0$) rispetto a quelli di oggi ($t = 0$). L'insieme delle

strategie se $T = 0$, ovvero se sono nel caso statico di gioco ripetuto solo una volta, è dato dall'intervallo in cui le ditte scelgono i prezzi:

$$S_1 = S_2 = [0, +\infty) \quad (250)$$

Se $T = 1$ (ovvero si ripete il gioco 2 volte per $t = 0$ e $t = 1$) si ha, ad esempio per 1:

$$S_1 = \{(p_{1,0}, f(p_{1,0}, p_{2,0})) \in [0, +\infty) \times \Phi\} \quad (251)$$

in cui la $f(p_{1,0}, p_{2,0})$ è il prezzo al tempo $t = 1$ che dipende dai prezzi al tempo $t = 0$ e Φ è l'insieme delle funzioni in $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Esempio 6.4 (Problema statico nel caso del monopolio) *Se p e c indicano, rispettivamente, il prezzo e il costo unitari e $x(p)$ la quantità venduta al prezzo p , il profitto è dato dalla seguente quantità:*

$$(p - c)x(p) \quad (252)$$

Si definisce la quantità:

$$p^m = \operatorname{argmax}_{p \geq 0} ((p - c)x(p)) \quad (253)$$

in cui la funzione argmax restituisce l'insieme dei valori di p per il quali la funzione argomento della argmax assume il valore massimo. Si suppone che ci sia un solo massimo per cui la argmax restituisce il solo valore del prezzo cui corrisponde il massimo profitto.

Esempio 6.5 (Problema statico nel caso del duopolio) *Nel caso del duopolio si sa che l'unico NE è dato da:*

$$(p_1, p_2) = (c, c) \quad (254)$$

in cui i profitti sono nulli perchè entrambe le imprese (o ditte) vendono al prezzo di costo c . Se, indicando con p^m il prezzo in regime di monopolio, si ha:

$$(p_1, p_2) = (p^m, p^m) \quad (255)$$

si ha che le imprese si dividono ancora equamente il mercato e che il profitto di ogni impresa è dato dalla seguente relazione:

$$(p^m - c) \frac{x(p^m)}{2} > 0 \quad (256)$$

in cui:

1. si ha il > 0 perchè $p^m > c$,

2. $x(p^m)$ è la quantità venduta in regime di monopolio,

3. il profitto di ciascuna impresa è la metà del profitto del monopolista.

Se il gioco viene ripetuto si hanno strategie in cui le imprese cooperano e ciascuna sceglie un prezzo pari a p^m . La soluzione naturale con i giochi ripetuti è SPNE.

Esempio 6.6 Nel caso della figura 62 si ha un gioco ripetuto in cui le parti evidenziate ed etichettate come (1) e (2) sono ripetizioni del gioco base in cui 1 ha due mosse a ciascuna delle quali corrispondono due mosse per 2, ovvero è il gioco nella versione statica e perciò senza ripetizioni.

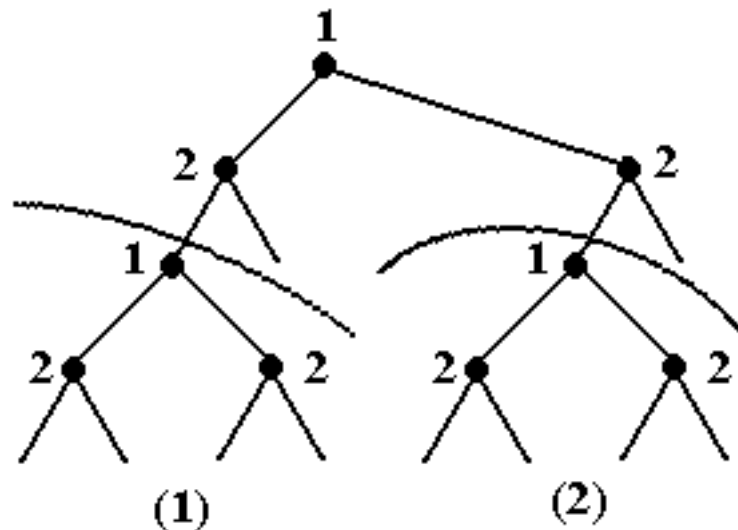


Figura 62: *Gioco ripetuto (dettagli nel testo)*

Nel caso del gioco del duopolio ripetuto si afferma che:

$$(p_{1,t}, p_{2,t}) = (c, c) \quad (257)$$

è SPNE.

Il gioco viene ripetuto un numero finito di volte e questo ci permette di esaminarlo con la BI dal momento che si possono individuare i **giochi terminali** ovvero quelli eseguiti all'ultima ripetizione o nell'ultimo periodo.

Nel caso della figura 62 se si considera l'ultima ripetizione del gioco si sa che l'equilibrio è dato dalla condizione in cui le ditte praticano entrambe un

prezzo pari a quello di costo per cui si ha NE in (c, c) . Sostituendo ai giochi terminali i relativi NE si ottiene una situazione analoga alla precedente in cui i nuovi giochi terminali hanno i NE in (c, c) . Reiterando le sostituzioni si ottiene che i NE sono:

$$(p_{1,t}, p_{2,t}) = (c, c) \quad (258)$$

con $t = 0, \dots, T$. Si ricorda che, in questo caso, T assume un valore finito. Tale risultato presuppone che nessuna delle due imprese possa modificare il proprio comportamento e fare profitti a scapito dell'altra. Ad esempio, se l'impresa 2 gioca c ad ogni ripetizione, ovvero per $t \in [0, T]$, l'impresa 1 può fare qualcosa? No, infatti:

1. se alza il prezzo sopra c non vende nulla e non fa profitti,
2. se abbassa il prezzo sotto c vende a un prezzo inferiore a quello di costo per cui fa profitti negativi.

In entrambi i casi i profitti (nelle varie ripetizioni) sono negativi o nulli e la loro somma pesata (con pesi strettamente positivi) non può che essere negativa o nulla.

Il concetto di SPNE prevede che i sottogiochi siano ripetizioni del gioco base (il gioco ripetuto una sola volta) all'istante $i > 0$: sostituisco i sottogiochi con i loro NE e itero il ragionamento fino ad arrivare alla prima esecuzione del gioco. Ogni sottogioco viene ripetuto T volte.

Nota 6.2 Si dice che un comportamento è **razionale** se ad ogni ripetizione del gioco si esegue un'analisi SPNE.

6.3 Giochi a infinite ripetizioni

Si considera ora il caso in cui un gioco sia ripetuto un numero arbitrariamente alto di volte in modo che nessuno dei giocatori possa prevederne la fine. Si parla di **giochi a infinite ripetizioni** e li si denota come $\Gamma_N(\infty)$. Se π_{it} ($i = 1, 2$) indica il profitto dell'impresa i all'istante t e δ (fattore di sconto) è una variabile esogena che assume valori nell'intervallo $[0, 1]$, si possono scrivere le definizioni dei profitti totali delle imprese come:

$$\pi_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_{it} \quad (259)$$

per $i = 1, 2$.

Proposizione 6.1 (SPNE per il duopolio in $\Gamma_N(\infty)$) *Si afferma che:*

$$(p_{1,t}, p_{2,t}) = (c, c) \quad (260)$$

è SPNE in $\Gamma_N(\infty)$.

Si ragiona in modo simile al caso di un numero finito di ripetizioni dal momento che, ad ogni iterazione, il profitto è:

1. nullo se l'impresa vende a un prezzo pari o superiore a quello di costo perchè non vende nulla e, quindi, non fa profitto;
2. negativo se l'impresa vende a un prezzo inferiore a quello di costo.

In più, il gioco con ∞ ripetizioni coincide con quello con $\infty - i$ ripetizioni (con i finito).

Nota 6.3 *Si noti che il termine sottogioco si può usare in più contesti:*

1. in quello della definizione 6.1,
2. per individuare la forma estesa di una singola ripetizione in un gioco ripetuto un numero finito o infinito di volte,
3. per indicare la forma estesa di un gioco ripetuto un numero finito o infinito di volte da cui venga rimosso (nel solo secondo caso) un numero finito di ripetizioni.

Il contesto chiarisce quale sia il significato da usare. In questo contesto si dice che un sottogioco coincide con il gioco in cui si ha un numero minore di ripetizioni ovvero $\Gamma_N(\infty) = \Gamma_N(\infty - i)$.

Se con p^m indico il prezzo in condizioni di monopolio, in $\Gamma_N(\infty)$ ho una strategia **trigger** del tipo:

$$(p_{1,t}, p_{2,t}) = (p^m, p^m) \quad (261)$$

se:

1. entrambe le imprese iniziano con p^m ovvero si ha:

$$(p_{1,0}, p_{2,0}) = (p^m, p^m) \quad (262)$$

2. se $\forall \tau < t$

$$(p_{1,\tau}, p_{2,\tau}) = (p^m, p^m) \quad (263)$$

allora:

$$(p_{1,t}, p_{2,t}) = (p^m, p^m) \quad (264)$$

altrimenti

$$(p_{1,t}, p_{2,t}) = (c, c) \quad (265)$$

ovvero le imprese iniziano con la (262) e proseguono con la (264) (nel qual caso i profitti sono pari alla metà del profitto in caso di monopolio) fino a che vale la (263). Se una delle due viola il patto, alla ripetizione successiva scatta la punizione per cui entrambe passano alla (265). In altro modo si ha: si inizia con (p^m, p^m) e si continua in tal modo fino a che una delle due non devia (entrambe hanno, sulla singola ripetizione, interesse a farlo): a questo punto, dalla ripetizione successiva alla deviazione in poi, entrambe passano a (c, c) .

Nota 6.4 Tali strategie sono SPNE sse $\delta \geq \frac{1}{2}$

Nota 6.5 Una impresa sgarra se pratica un prezzo pari a $p^m - \varepsilon$ (con $\varepsilon > 0$) in modo da prendersi tutto il mercato e facendo sì che l'altra sia costretta a reagire con $p^m - 2\varepsilon$. Dato che la scelta è simultanea alla ripetizione successiva alla violazione si ha che entrambe scelgono un prezzo pari a c .

Esempio 6.7 La situazione è illustrata in figura 63. Alla ripetizione i -esima si ha una violazione da parte di una delle due imprese: si ha una impresa che continua a praticare lo stesso prezzo e non fa profitti perchè fuori mercato (punto marcato con y in figura 63) mentre l'altra pratica un prezzo minore e fa profitti maggiori (punto marcato con x in corrispondenza dell'ascissa i in figura 63). All'istante $i+1$ scatta la punizione, entrambe vendono a prezzo di costo e fanno profitti nulli (successione di punti marcati con x in corrispondenza delle ascisse $i+1$ e successive in figura 63).

Si può dimostrare che la successione dei punti marcati con "o" è conveniente rispetto alla successione dei punti marcati con x in figura 63 se $\delta \geq 1/2$ ovvero, in generale, tanto più alto è il valore del tasso di sconto δ quanto più pesano i profitti futuri rispetto al profitto presente e, perciò, tanto minore è l'interesse a sgarrare dagli accordi presi.

Dimostrazione 6.1 Si hanno due tipi di sottogiochi:

1. quelli in cui la strategia prescrive l'equilibrio statico (c, c) in cui nessuna delle due imprese fa profitti perchè entrambe vendono a prezzo di costo;

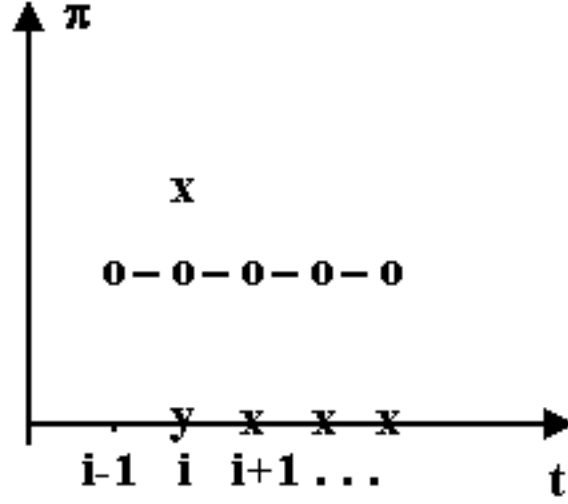


Figura 63: *Gioco ripetuto: convenienza della violazione (dettagli nel testo)*

2. quelli in cui la strategia prescrive l'equilibrio statico (p^m, p^m) in cui entrambe le imprese fanno un profitto pari a:

$$(p^m - c) \frac{x(p^m)}{2} \quad (266)$$

Se mi trovo in un sottogioco del primo tipo, tale fatto induce un NE in ogni sottogioco: se l'impresa 2 pratica un prezzo pari a c l'impresa 1 non può aumentare il profitto dato che (c, c) giocato per sempre è un NE di quel sottogioco che è $\Gamma_N(\infty)$. In tale situazione entrambe le imprese fanno profitti nulli.

Se, invece, mi trovo in un sottogioco del secondo tipo la situazione è la seguente. Nell'intervallo $[k, k + 1]$ con $k = 0, \dots, \infty$ il profitto di ciascuna impresa è costante ad ogni iterazione e vale:

$$\pi_{it} = (p^m - c) \frac{x(p^m)}{2} \quad (267)$$

Se ora uso la (259) e considero che il profitto è costante ad ogni iterazione ho:

$$(p^m - c) \frac{x(p^m)}{2} (1 + \delta + \delta^2 + \dots) \quad (268)$$

in cui compare una serie geometrica di ragione δ la cui somma vale:

$$\frac{1}{1 - \delta} \quad (269)$$

per cui ciascuna impresa nel gioco ripetuto infinite volte ha un profitto totale dato dalla:

$$(p^m - c) \frac{x(p^m)}{2(1 - \delta)} \quad (270)$$

Se una delle due imprese devia e pratica un prezzo inferiore pari a:

$$p = p^m - \varepsilon \quad (271)$$

ottiene un profitto da monopolista dato che si prende tutto il mercato. In tal modo la ditta che sgarra ottiene un profitto pari a:

1. $x(p)(p - c)$ per l'iterazione corrente,
2. 0 per tutte le iterazioni future,

con $p < p^m$ dato che $p = p^m - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. A questo punto si vuole il massimo della $x(p)(p - c)$ con $p < p^m$.

Si ha un massimo in p^m per cui, per definizione di massimo, per gli altri valori di p la funzione stà sotto, altrimenti il valore p^m sarebbe stato definito in modo scorretto. Dal momento che non si conoscono p e, a fortiori, $x(p)$, sfruttando quanto detto prima, si procede ad una maggiorazione in modo da scrivere:

$$x(p)(p - c) \leq x(p^m)(p^m - c) \quad (272)$$

Si ha che ad una impresa non conviene deviare sse quanto guadagna in tutto il resto del gioco (a infinite ripetizioni) è maggiore o uguale a quello che guadagna con la deviazione corrente (dal momento che dall'istante successivo il profitto per entrambe sarà nullo, dal momento che scatta la ritorsione da parte dell'altra impresa) ovvero sse:

$$(p^m - c) \frac{x(p^m)}{2(1 - \delta)} \geq x(p^m)(p^m - c) \geq x(p)(p - c) \quad (273)$$

Svolgendo i calcoli nella prima disuguaglianza della (273) si ottiene

$$\delta \geq \frac{1}{2} \quad (274)$$

cioè ad una impresa non conviene deviare se attribuisce abbastanza importanza al futuro in un gioco a durata infinita.

Nota 6.6 Se un gioco ha durata infinita (ovvero viene ripetuto un numero infinito di volte) e da esso si rimuove un numero finito di ripetizioni la durata del gioco rimane infinita.

Nota 6.7 (Giochi a durata finita) *Se ho un numero finito T di ripetizioni allora:*

$$(p_{1,t}, p_{2,t}) = (c, c) \quad (275)$$

con $t = 0, \dots, T$, è l'unico SPNE del gioco $\Gamma_N(T)$, quale che sia T anche grandissimo. Lo si verifica applicando la BI a partire dai sottogiochi terminali del gioco nella sua totalità: ogni sottogioco terminale ha (c, c) come NE per cui operando sostituzioni e riduzioni successive si arriva a (c, c) come NE del gioco ridotto senza sottogiochi propri e tale NE è SPNE perchè induce un NE in ogni sottogioco proprio.

6.4 Modelli di scambio

Vediamo ora alcune applicazioni a **modelli di scambio fra agenti**, in cui le preferenze di tutti gli agenti non sono conoscenza comune e, anzi, alcune preferenze costituiscono una conoscenza privata. Esamineremo in dettaglio i casi seguenti:

- 1 venditore e 1 compratore,
- 1 venditore e più di 1 compratore.

Si parla, al proposito, di **equilibri Bayesiani**.

6.4.1 Caso di un 1 venditore e 1 compratore

La situazione è quella di un venditore che può produrre qualsiasi quantità del prodotto che vende ad un costo marginale unitario costante c . Se la quantità di merce venduta è q e l'incasso del venditore è t il **profitto per il venditore** è:

$$t - cq \quad (276)$$

mentre l'**utilità del compratore** è:

$$u(q, \theta) - t \quad (277)$$

in cui θ è un profilo che il compratore conosce ma che non è noto al venditore e che caratterizza il tipo del compratore.

Definizione 6.4 (Contratto) *Un **contratto** è una coppia (q, t) in cui q è la quantità di merce scambiata fra il venditore e il compratore e t è il trasferimento di denaro fra il compratore e il venditore.*

Nota 6.8 *L'utilità di riserva (ovvero il valore dell'utilità in assenza di accordi ovvero in assenza di scambio) per entrambi gli agenti è nulla, ovvero sia il compratore sia il venditore hanno una utilità di riserva nulla. Si possono avere casi in cui il venditore ha una utilità di riserva negativa (ad esempio nel caso venda merci deperibili per cui, se non le vende, subisce un danno) e lo stesso vale per il compratore (nel caso si tratti di beni di prima necessità).*

Nota 6.9 *Nel caso di **utilità di riserva nulla** il venditore ha tutto il potere contrattuale, nel senso che si limita a proporre al compratore una serie di contratti e il compratore ne sceglie uno (o anche nessuno).*

Definizione 6.5 (Temporizzazione del gioco) *Il gioco è strutturato nelle seguenti fasi:*

1. *la Natura sceglie il segnale θ osservato solo dal compratore, per cui il venditore non conosce il tipo del compratore che ha di fronte;*
2. *il venditore progetta una serie di contratti e tale insieme può contenere anche un numero infinito di elementi;*
3. *il compratore sceglie un contratto (o anche nessuno) fra quelli che gli propone il venditore;*
4. *si ha la transizione merce per denaro.*

I risultati del gioco dipendono dalle ipotesi seguenti che sono state fatte sul segnale θ e su $u(q, \theta)$.

1. $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$ ovvero θ può assumere due soli valori $\theta_L > 0$ e $\theta_H > \theta_L$ in modo da definire:

$$\Delta(\theta) = \theta_H - \theta_L > 0 \quad (278)$$

2. Per $u(q, \theta)$ si ipotizza, in modo da semplificare le cose, una struttura del tipo:

$$u(q, \theta) = \theta v(q) \quad (279)$$

ma tale ipotesi non è necessaria. Per avere calcoli facili è cruciale che sia:

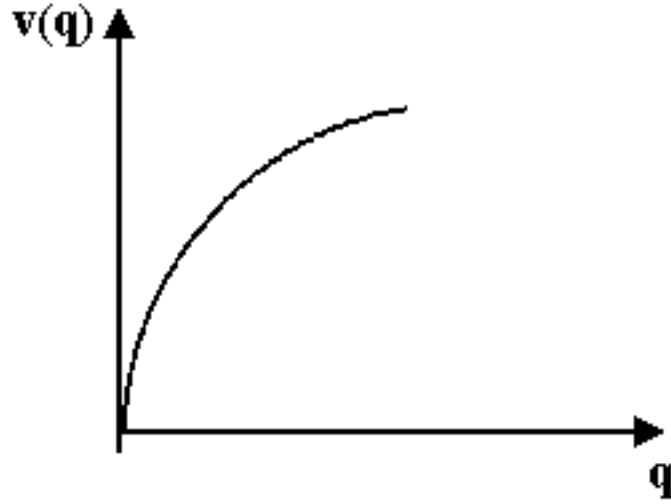
$$\frac{\partial^2 u}{\partial q \partial \theta} \geq 0 \quad (280)$$

Si deve, pertanto, stabilire come è fatta la funzione $v(q)$ dandone una definizione. La figura 64 raffigura un possibile andamento per tale funzione.

Si ha:

$$v : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (281)$$

ed in più:

Figura 64: $v(q)$ (dettagli nel testo)

1. la v è strettamente crescente ovvero $v'(q) > 0 \forall q \geq 0$,
2. la v è strettamente concava ovvero $v''(q) < 0 \forall q \geq 0$,
3. $v(0) = 0$.

Con una tale caratterizzazione si ha, quindi:

$$u(q, \theta) = \theta v(q) \quad (282)$$

con $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$.

Si hanno i due casi:

1. θ basso, si valuta $\theta_L v(q)$;
2. θ alto, si valuta $\theta_H v(q)$;

ovvero si ha la funzione utilità con, rispettivamente, valutazione bassa o alta del compratore. Infine, si impongono le seguenti condizioni in modo da avere un problema non banale:

$$\theta_L v'(0) > c > \lim_{q \rightarrow \infty} \theta_H v'(q) \quad (283)$$

Vediamo due casi particolari:

1. informazione completa (ogni insieme di informazione contiene un solo nodo),
2. informazione incompleta (ogni insieme di informazione può contenere più di un nodo).

Nel caso di **informazione completa**, il venditore conosce il tipo del compratore, ovvero conosce il segnale θ , e quindi conosce $u(q, \theta)$. In questo caso il venditore prepara un solo contratto dato che il segnale θ è noto sia al venditore sia al compratore.

Il problema, a questo punto, è sapere come si prepara quell'unico contratto in modo da massimizzare il guadagno del venditore. Si hanno due soli casi da esaminare dal momento che il compratore può appartenere a due soli tipi (o θ_L o θ_H).

Supponiamo sia $\theta = \theta_H$.

Il contratto (q, t) (in pratica “ti do q se mi paghi t ”) proposto dal venditore al compratore viene accettato sse l'utilità del compratore ($u(q, \theta) = \theta v(q)$) è tale che il suo profitto è non inferiore alla sua utilità di riserva (che per le ipotesi fatte vale 0) ovvero sse:

$$\theta_H v(q) - t \geq 0 \quad (284)$$

Il fatto di avere $\geq$ dipende dal fatto che se con $\theta_H v(q) - t = 0$ il compratore rifiuta non si ha un massimo per cui si deve avere la condizione $\geq$ che equivale a ridurre il pagamento t di un ε in modo che il compratore accetti.

Se si ha:

$$\theta_H v(q) - t > 0 \quad (285)$$

(in cui $\theta_H v(q)$ rappresenta l'utilità del compratore di tipo θ_H è possibile per il venditore aumentare il prezzo t con una variabile di scarto $\varepsilon > 0$ in modo da avere l'eguaglianza. Nel caso della (285), infatti, il compratore accetta il contratto (q, t) che, tuttavia, non è ottimale per il venditore perchè se il venditore, a parità di q (e quindi di $v(q)$), prepara un contratto con t di poco maggiore $t + \varepsilon$ tale contratto è accettato dal compratore (mentre il venditore ha un profitto maggiore). Il contratto $(q, t + \varepsilon)$ è accettato dal compratore e dà un guadagno maggiore al venditore. Da ciò discende che se il contratto (q, t) è ottimo allora non lo si può migliorare (dando un guadagno maggiore al venditore e mantenendolo accettabile dal compratore) per cui deve essere:

$$\theta_H v(q) - t = 0 \quad (286)$$

In tal caso il compratore accetta essendo indifferente. Il profitto del venditore risulta (usando la (286) nella definizione di profitto):

$$t - cq = \theta_H v(q) - cq \quad (287)$$

e lo si dice **guadagno sociale dello scambio**. Tale guadagno sociale si compone di due parti:

1. $\theta_H v(q)$ il beneficio del compratore,
2. cq il costo del venditore,

non dipende da t ma indica come il surplus sociale è suddiviso fra il venditore e il compratore. Il venditore si prende tutto il benessere sociale generato dallo scambio mentre il compratore si prende 0 ovvero la (286): il benessere sociale coincide con il profitto.

A questo punto si vuole determinare la quantità venduta q in modo da massimizzare la seguente funzione:

$$g(q) = \theta_H v(q) - cq \quad (288)$$

con:

$$g'(q) = \theta_H v'(q) - c \quad (289)$$

$$g''(q) = \theta_H v''(q) < 0 \quad (290)$$

Per la (290) vale il < 0 perchè $v''(q) < 0$ e $\theta_H > 0$. La $g(q)$ è **concava** perchè lo è la $v(q)$ e cq è una funzione lineare in q .

Dal momento che dalla (283) (riscrivendo la disuguaglianza di destra) si ha:

$$0 > \lim_{q \rightarrow +\infty} \theta_H v'(q) - c = \lim_{q \rightarrow +\infty} g'(q) \quad (291)$$

mentre dalla (289) si ha:

$$g'(0) = \theta_H v'(0) - c > \theta_L v'(0) - c > 0 \quad (292)$$

(essendo $\theta_H > \theta_L$) si ottengono le seguenti condizioni sulla g' :

$$g'(0) > 0 \quad (293)$$

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} g'(q) < 0 \quad (294)$$

Dalle (293) e (294), per la continuità della g' , segue che si ha un valore di q tale che:

$$g'(q) = 0 \quad (295)$$

e tale valore individua un punto di ottimo.

Si ha, quindi, che esiste un valore della quantità scambiata $\dot{q}_H$ tale che:

$$g'(\dot{q}_H) = 0 \quad (296)$$

in modo che sia (dalla (289)):

$$\theta_H v'(\dot{q}_H) = c \quad (297)$$

La (297) definisce la quantità nel contratto ottimo per il venditore e per tale contratto si ha un trasferimento dato dalla:

$$\dot{t}_H = \theta_H v(\dot{q}_H) \quad (298)$$

determinato usando la (286).

Si è visto come ottenere un contratto ottimale per il venditore se si sa che il tipo del compratore è θ_H . Il contratto ottimo è $(\dot{q}_H, \dot{t}_H)$ definito dalle (297) e (298).

Sia ora $\theta = \theta_L$ ovvero il venditore sa che il compratore è di tipo θ_L . In questo caso, per analogia, il contratto ottimo è $(\dot{q}_L, \dot{t}_L)$ con:

$$\theta_L v'(\dot{q}_L) = c \quad (299)$$

e:

$$\dot{t}_L = \theta_L v(\dot{q}_L) \quad (300)$$

Quale che sia il tipo del compratore, il venditore, che conosce tale tipo, definisce il contratto in modo da massimizzare il surplus e prenderlo tutto lui.

Informazione incompleta

Vediamo ora il caso di **informazione incompleta**, ovvero il caso in cui il tipo del compratore non è noto al venditore.

In questo caso il venditore non conosce il tipo θ del compratore e sa soltanto che:

1. $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$,
2. $\theta_H > \theta_L$,
3. $\theta_L > 0$,
4. $\Delta\theta = \theta_H - \theta_L > 0$.

In questo caso un atteggiamento *naive* ci assicura che due contratti bastano: se ho tre o più contratti, il compratore di tipo θ_H ne sceglie uno (quello che preferisce) e lo stesso dicasi per il tipo θ_L per cui di contratti ne bastano due dal momento che le considerazioni fatte valgono per tipi θ_H e θ_L generici.

Vediamo ora le cose dal punto di vista del **venditore** e del **compratore**.

Il **venditore** propone due contratti tipo:

1. $(\dot{q}_L, \dot{t}_L)$

2. $(\dot{q}_H, \dot{t}_H)$

e lascia che il compratore ne scelga uno.

Il **compratore** può essere di due tipi: θ_L o θ_H .

Supponiamo che il compratore sia di tipo θ_H .

Se il compratore è di tipo θ_H ricava una utilità nulla dal contratto progettato per lui, ovvero da $(\dot{q}_H, \dot{t}_H)$, mentre dal contratto progettato per il tipo θ_L , ovvero $(\dot{q}_L, \dot{t}_L)$, ha una utilità pari a:

$$\theta_H v(\dot{q}_L) - \theta_L v(\dot{q}_L) = \Delta \theta v(\dot{q}_L) > 0 \quad (301)$$

ovvero l'utilità che gli viene dal suo tipo con il contratto preparato per l'altro meno l'utilità che ricaverebbe dal contratto se il suo tipo fosse θ_L : tale quantità è strettamente positiva per come sono definite le grandezze in essa coinvolte. Si ha quindi che il compratore di tipo θ_H ha una utilità (o guadagno) maggiore dallo scegliere il contratto preparato per il tipo θ_L .

Supponiamo che il compratore sia di tipo θ_L .

Se il compratore è di tipo θ_L ha una utilità nulla dal contratto progettato per lui ovvero da $(\dot{q}_L, \dot{t}_L)$ mentre dal contratto $(\dot{q}_H, \dot{t}_H)$ ha una utilità pari a:

$$\theta_L v(\dot{q}_H) - \theta_H v(\dot{q}_H) = -\Delta \theta v(\dot{q}_H) < 0 \quad (302)$$

per cui anche lui sceglierebbe $(\dot{q}_L, \dot{t}_L)$ e ciò equivale ad avere il solo contratto $(\dot{q}_L, \dot{t}_L)$ come contratto ottimo per il venditore.

Lo scopo del **venditore** è, invece, quello di avere due contratti in modo che il compratore di tipo θ_H scelga il contratto progettato per lui e lo stesso faccia il compratore di tipo θ_L .

A tale scopo il **venditore** progetta due contratti (o, meglio, due tipologie di contratti):

1. (q_L, t_L) ,

2. (q_H, t_H) ,

in modo da separare i due tipi ovvero in modo che:

1. il compratore di tipo θ_H preferisca (q_H, t_H) a (q_L, t_L) ,

2. il compratore di tipo θ_L preferisca (q_L, t_L) a (q_H, t_H) .

Perchè θ_H scelga (q_H, t_H) invece di (q_L, t_L) deve essere che l'utilità che il tipo θ_H ricava dal contratto (q_H, t_H) sia maggiore o uguale a quella che ricava dal contratto (q_L, t_L) ovvero deve essere:

$$\theta_H v(q_H) - t_H \geq \theta_H v(q_L) - t_L \quad (303)$$

Chiameremo la relazione (303) *ICH* ovvero **compatibilità con incentivi di tipo H**.

In modo analogo se si vuole che θ_L scelga (q_L, t_L) invece di (q_H, t_H) deve essere che l'utilità che il tipo θ_L ricava dal contratto (q_L, t_L) sia maggiore o uguale a quella che ricava dal contratto (q_H, t_H) ovvero deve essere:

$$\theta_L v(q_L) - t_L \geq \theta_L v(q_H) - t_H \quad (304)$$

Chiameremo la relazione (304) *ICL* ovvero **compatibilità con incentivi di tipo L**. Oltre alle (303) e (304) si hanno altri due vincoli denominati, rispettivamente, *IRH* e *IRL*:

$$\theta_H v(q_H) - t_H \geq 0 \quad (305)$$

$$\theta_L v(q_L) - t_L \geq 0 \quad (306)$$

che stabiliscono l'accettabilità di ciascun contratto da parte del tipo di compratore per il quale il contratto è stato progettato, nel caso in cui l'utilità di riserva sia nulla.

Si ha che la coppia di contratti:

1. (q_L, t_L)
2. (q_H, t_H)

viola la (303) ovvero il vincolo *ICH*.

Si hanno contratti che:

1. massimizzano il profitto del venditore,
2. soddisfano i vincoli (303), (304), (305) e (306)

in modo che θ_H scelga (q_H, t_H) e θ_L scelga (q_L, t_L) .

L'espressione generale del profitto del venditore che si vuole massimizzare è data dalla seguente quantità:

$$t - cq \quad (307)$$

ovvero dalla differenza fra l'incasso e la spesa di produzione. Se il compratore è di tipo θ_H il profitto è:

$$t_H - cq_H \quad (308)$$

Se il compratore è di tipo θ_L il profitto è:

$$t_L - cq_L \quad (309)$$

Per procedere si assegna una distribuzione di probabilità a $\{\theta_L, \theta_H\}$ in modo che sia:

1. $p_L = P(\theta = \theta_L)$,
2. $p_H 1 - p_L = P(\theta = \theta_H)$.

In tal modo si può calcolare il profitto atteso di cui si vuole il massimo:

$$\max (1 - p_L)(t_H - cq_H) + p_L(t_L - cq_L) \quad (310)$$

rispetto alle grandezze t_H, t_L, q_H, q_L e sotto i vincoli (303), (304), (305) e (306).

Se i vincoli non sono soddisfatti non ha senso dire che:

1. θ_H sceglie (q_H, t_H) ,
2. θ_L sceglie (q_L, t_L) .

Il teorema è ben posto per cui il problema ha soluzione e l'insieme delle quantità t_H, t_L, q_H, q_L che definiscono i due contratti è chiuso e limitato per cui la soluzione esiste. Si vuole sapere come è fatta. Si noti che la formulazione non esclude l'ipotesi che i contratti siano uguali ma prevede che i contratti siano diversi.

Lemma 6.1 [*Primo passo*] *Si vuole verificare che il vincolo IRH è ridondante.*

Si hanno i contratti:

1. (q_L, t_L)
2. (q_H, t_H)

con i vincoli:

$$\theta_H v(q_H) - t_H \geq \theta_H v(q_L) - t_L \quad (311)$$

$$\theta_L v(q_L) - t_L \geq \theta_L v(q_H) - t_H \quad (312)$$

$$\theta_H v(q_H) - t_H \geq 0 \quad (313)$$

$$\theta_L v(q_L) - t_L \geq 0 \quad (314)$$

come noto detti, nell'ordine, ICH, ICL, IRH e IRL.

Il vincolo IRH (313) è ridondante nel senso che se sono soddisfatti i vincoli ICH, ICL e IRL allora è soddisfatto anche IRH: infatti IRH è implicato da ICH e IRL e dal fatto che $\theta_H > \theta_L$.

Dal vincolo IRL e dal fatto che $\theta_H > \theta_L$ ho:

$$\theta_H v(q_L) - t_L > \theta_L v(q_L) - t_L \geq 0 \quad (315)$$

e da *ICH*:

$$\theta_H v(q_H) - t_H \geq \theta_H v(q_L) - t_L \geq \theta_L v(q_L) - t_L \geq 0 \quad (316)$$

da cui:

$$\theta_H v(q_H) - t_H \geq 0 \quad (317)$$

ovvero il vincolo *IRH*.

[Secondo passo] Si vuole verificare che all'ottimo il vincolo *IRL* è stringente ovvero è attivo (e quindi vale con il segno di $=$).

Si prendono due contratti ammissibili (nel senso che soddisfano i vincoli (311), (312), (313) e (314)) del tipo (q_L, q_H, t_L, t_H) in modo che *IRL* non sia stringente ovvero in modo che sia:

$$\theta_L v(q_L) - t_L > 0 \quad (318)$$

In tali condizioni i contratti non sono ottimali, nel senso che ne trovo di migliori dato che posso prendere $(q_L, q_H, t_L + \varepsilon, t_H + \varepsilon)$ (con $\varepsilon > 0$ piccolo) che sono ammissibili e migliori (nel senso che danno profitti maggiori) della coppia iniziale. Se per (q_L, t_L) ho che vale la (318) lo stesso vale, per continuità, per $(q_L, t_L + \varepsilon)$. In modo simile si verifica che valgono *ICH* e *ICL*.

Si ha che (q_L, q_H, t_L, t_H) soddisfa *ICH*. Se t_H e t_L crescono entrambi di ε in modo che *ICH* e *ICL* continuino a valere ho che $(q_L, q_H, t_L + \varepsilon, t_H + \varepsilon)$ è ammissibile e migliore dato che i costi per il venditore non cambiano mentre gli incassi crescono. In tal modo si vede che all'ottimo (ovvero quando i contratti non possono migliorare più) si ha che *IRL* vale come uguaglianza.

[Terzo passo] Si vuole verificare che all'ottimo il vincolo *ICH* è stringente ovvero è attivo (e quindi vale con il segno di $=$).

Lo si fa con ragionamenti analoghi al caso precedente.

[Quarto passo] Si vuole verificare che all'ottimo il vincolo *ICL* è equivalente a $q_H \geq q_L$ (tale relazione è vera per ogni funzione di profitto).

Vediamo perchè il vincolo *ICL* ovvero:

$$\theta_L v(q_L) - t_L \geq \theta_L v(q_H) - t_H \quad (319)$$

è equivalente a $q_H \geq q_L$.

Se considero *ICH* e *ICL* e sommo m. a m. le:

$$\theta_H v(q_H) - t_H \geq \theta_H v(q_L) - t_L \quad (320)$$

$$\theta_L v(q_L) - t_L \geq \theta_L v(q_H) - t_H \quad (321)$$

svolgendo i calcoli e semplificando (utilizzando la $\Delta(\theta) = \theta_H - \theta_L$):

$$\Delta\theta v(q_H) \geq \Delta\theta v(q_L) \quad (322)$$

ovvero (dividendo m . a m . per Δ):

$$v(q_H) \geq v(q_L) \quad (323)$$

ed essendo v crescente si ha:

$$q_H \geq q_L \quad (324)$$

Se (vedi il secondo passo) considero il vincolo *IRL* stringente ho:

$$\theta_L v(q_L) - t_L = 0 \quad (325)$$

da cui:

$$t_L = \theta_L v(q_L) \quad (326)$$

Se sostituisco la (326) nella (320) ottengo (se considero il vincolo all'uguaglianza):

$$t_H = \theta_H v(q_H) - \Delta \theta v(q_L) \quad (327)$$

Nota 6.10 (Commento al Lemma) Il compratore di tipo θ_L ha utilità nulla come nel caso a informazione completa dato che il vincolo *IRH* vale all'uguaglianza.

Il compratore di tipo θ_H paga la somma data dalla (327) ovvero:

$$t_H = \theta_H v(q_H) - \Delta \theta v(q_L) \quad (328)$$

che è una cifra strettamente positiva.

Il venditore non conosce il tipo del compratore ma deve rispettare i vincoli *ICH* e *ICL*. Si ha che valgono le seguenti relazioni:

1. $\frac{\partial t_H}{\partial q_L} < 0$,
2. $\frac{\partial v}{\partial q_L} > 0$ essendo v crescente,

ovvero quanto più vendo al tipo θ_L tanto meno incasso dal tipo θ_H . Dalla (328) ho che tanto maggior è q_L (per la (324)) con v crescente tanto più è utile per θ_H scegliere il contratto (q_H, t_H) .

Se considero il vincolo *ICH* e fisso q_H nel contratto (q_H, t_H) il prezzo t_H deve essere tale che:

$$\frac{\partial t_L}{\partial q_H} = 0 \quad (329)$$

(la ricavo dalla $t_L = \theta_L v(q_L)$) ovvero quello che si incassa dal compratore di tipo θ_L è indipendente da quello che si vende al compratore di tipo θ_H . Si noti che la quantità q_L è inferiore a quella che si ha nel caso di informazione

completa.

Riprendendo la:

$$\max (1 - p_L)(t_H - cq_H) + p_L(t_L - cq_L) \quad (330)$$

si ha che la soluzione è data dalle seguenti relazioni:

1. $t_L = \theta_L v(q_L)$,
2. $t_H = \theta_H v(q_H) - \Delta \theta v(q_L)$

Non si considera il “vincolo” $q_H \geq q_L$. Se si risolve il problema di massimo e tale vincolo risulta soddisfatto *ex post* allora siamo in una condizione di ottimo.

Se sostituisco le espressioni delle t_L e t_H nella (330) ottengo:

$$\max (1 - p_L)(\theta_H v(q_H) - \Delta \theta v(q_L) - cq_H) + p_L(\theta_L v(q_L) - cq_L) \quad (331)$$

Per ottenere il massimo si deriva l'argomento della funzione *max*:

1. rispetto a q_H in modo da massimizzare la differenza dei termini in cui compare q_H che sono quelli che ho nel caso di informazione completa per cui il valore $\tilde{q}_H$ che massimizza coincide con il valore trovato nel caso di informazione completa $\dot{q}_H$,
2. rispetto a q_L .

Se calcolo:

$$\frac{\partial [(1 - p_L)(\theta_H v(q_H) - \Delta \theta v(q_L) - cq_H) + p_L(\theta_L v(q_L) - cq_L)]}{\partial q_L} \quad (332)$$

ottengo

$$-(1 - p_L)\Delta \theta v'(q_L) + p_L \theta_L v'(q_L) - cp_L \quad (333)$$

La (333) all'ottimo assume un valore nullo o negativo: assume un valore negativo se l'ottimo è in $\tilde{q}_L = 0$ mentre assume un valore nullo se l'ottimo è in $\tilde{q}_L > 0$, tenendo conto del fatto che $q_L \in \mathbb{R}_+$. La soluzione del problema senza che si consideri esplicitamente il vincolo $q_H \geq q_L$ soddisfa tale vincolo ed è una soluzione del problema generale. Si deve comunque verificare che in ogni caso è:

$$\tilde{q}_H > \tilde{q}_L \quad (334)$$

in quanto (vedi anche la figura 65):

$$\tilde{q}_H = \dot{q}_H > \dot{q}_L \quad (335)$$

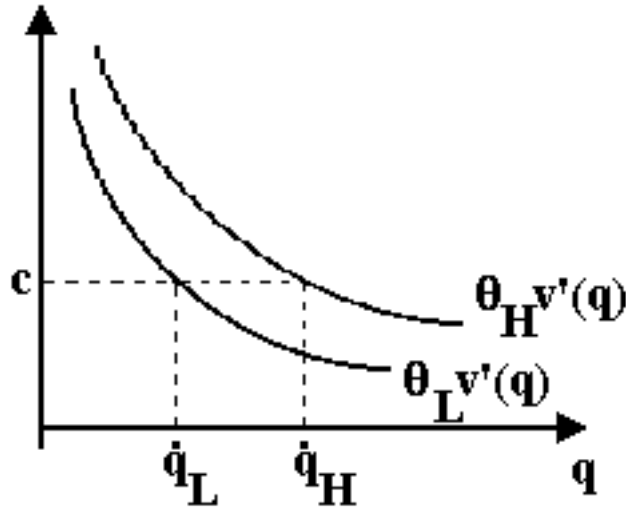


Figura 65: (Dettagli nel testo)

Il valore di $\dot{q}_L$ deriva da una condizione su θ_L e $v' > 0$ per cui si ha:

$$\dot{q}_L > \tilde{q}_L \Rightarrow \tilde{q}_H > \tilde{q}_L \quad (336)$$

Se considero la (332) in cui ho sostituito i valori per t_H e t_L ottengo che tale relazione assume valori negativi $\forall q_L > \tilde{q}_L$ dato che (vedi anche la figura 65):

$$p_L(\theta_L v'(q_L) - c) \leq 0 \quad (337)$$

$\forall q_L > \dot{q}_L$ e:

$$(1 - p_L)\Delta\theta v(q_L) < 0 \quad (338)$$

per cui il q_L ottimo (ovvero quello in corrispondenza del massimo della funzione) è minore di $\dot{q}_L$ ovvero è:

$$\dot{q}_L > \tilde{q}_L \quad (339)$$

Si è così trovato un massimo senza considerare il vincolo $q_H \geq q_L$.

Il massimo così calcolato soddisfa tale vincolo per cui rappresenta la soluzione ottima.

I contratti ottimi sono caratterizzati dalle seguenti quantità:

1. $\hat{q}_H = \tilde{q}_H = \dot{q}_H$,
2. $\hat{q}_L = \tilde{q}_L < \dot{q}_L$,

in cui $\dot{q}_H$ e $\dot{q}_L$ sono dette **quantità socialmente ottimali** mentre gli scambi di danaro $\hat{t}_H$ e $\hat{t}_L$ soddisfano i vincoli *IRL* e *ICH* con il segno di uguaglianza ovvero sono ricavati dalle:

1. $t_L = \theta_L v(q_L)$,
2. $t_H = \theta_H v(q_H) - \Delta \theta v(q_L)$.

La $\tilde{q}_L < \dot{q}_L$ deriva dalle seguenti condizioni sulle derivate parziali:

1. $\frac{\partial t_H}{\partial q_L} < 0$
2. $\frac{\partial t_L}{\partial q_H} = 0$

Il compratore di tipo θ_H ha una utilità in genere strettamente positiva sse $\tilde{q}_L > 0$. Se ha informazione privata sulle preferenze il venditore progetta i contratti ma il compratore di tipo θ_H può scegliere il contratto progettato per il compratore di tipo θ_L . Il venditore deve fare in modo che ciò non accada. Si hanno i seguenti casi limite:

1. se $p_L \longrightarrow 1$ allora $\hat{q}_L \longrightarrow \dot{q}_L$,
2. se $p_L \longrightarrow 0$ allora contrasto l'effetto negativo e $\hat{q}_L \longrightarrow 0$

Il valore ottimo di q_L è $\hat{q}_L < \dot{q}_L$. Se il compratore sceglie il contratto (q_L, t_L) all'ottimo la quantità scambiata vale $\hat{q}_L$ mentre lo scambio di danaro ammonta a $\hat{t}_L$. L'utilità per il compratore di tipo θ_L è:

$$\theta_L v(\hat{q}_L) - \hat{t}_L \quad (340)$$

mentre il profitto del venditore vale:

$$\hat{t}_L - c\hat{q}_L \quad (341)$$

In questo caso il venditore può offrire di più a parità di prezzo ovvero $\hat{q}_L + dq_L$ in modo che l'utilità per il compratore aumenti (dato che la funzione v è crescente). Si hanno le seguenti variazioni:

1. variazione dell'utilità: $\theta_L v'(\hat{q}_L) dq_L - dt_L \geq 0$ per cui il compratore accetta,
2. variazione del profitto: $dt_L - c dq_L$ valida nel caso di dt_L e dq_L piccoli.

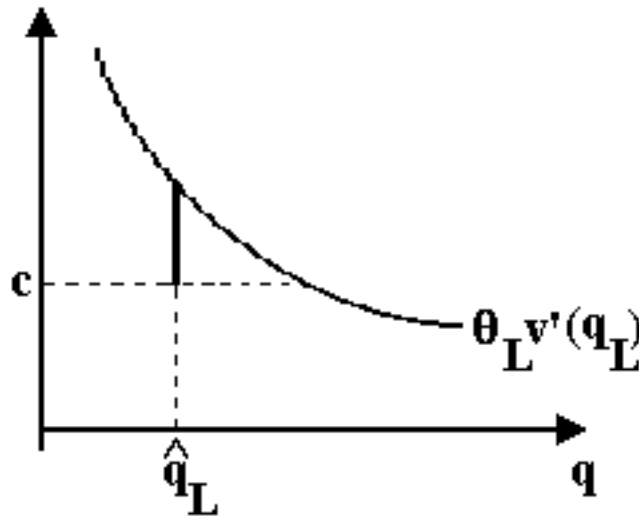


Figura 66: *Variazione del profitto (Dettagli nel testo)*

In pratica si sceglie $dt_L = \theta_L v'(q_L) dq_L$ in modo che la variazione di utilità sia verificata all'uguaglianza e la variazione del profitto (vedi il segmento in grassetto della figura 66) vale:

$$(\theta_L v'(\hat{q}_L) - c) dq_L \quad (342)$$

in cui $\theta_L v'(\hat{q}_L) > 0$ e $dq_L > 0$ per ipotesi. Ciò che pesa è il fattore:

$$\frac{\partial t_H}{\partial q_L} \quad (343)$$

per cui $\hat{q}_L$ non è efficiente.

Nota 6.11 (Commento di tipo economico) *La filosofia di base è quella di ridurre l'utilità del compratore in tutte le alternative che non vanno bene al venditore. Se considero la (333) la posso riscrivere come:*

$$[p_L \theta_L - (1 - p_L) \Delta \theta] v'(q_L) - c p_L \quad (344)$$

ovvero come:

$$p_L \left\{ \left[\theta_L - \frac{(1 - p_L)}{p_L} \Delta \theta \right] v'(q_L) - c \right\} \quad (345)$$

con:

$$J(\theta_L) = \left[\theta_L - \frac{(1 - p_L)}{p_L} \Delta \theta \right] \quad (346)$$

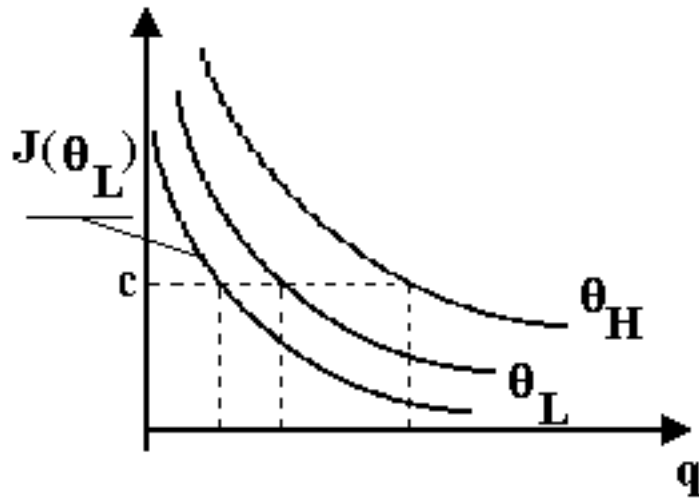


Figura 67: Curve di livello (Dettagli nel testo)

che denota la valutazione virtuale del tipo θ_L (vedi la figura 67).

Se $\tilde{q}_L > 0$ in $\tilde{q}_L$ la derivata si annulla ovvero la parte fra $\{\}$ si annulla e quindi:

$$J(\theta_L)v'(\tilde{q}_L) = c \quad (347)$$

Se avessi informazione completa e avessi un compratore di un tipo con una valutazione pari a $J(\theta_L)$ tale compratore riceverebbe una quantità data dalla (347).

Se si sceglie $\tilde{q}_L = \hat{q}_L$ ci si pone come nel caso di informazione completa ma con una valutazione $J(\theta_L) < \theta_L$ perchè a θ_L si sottrae $\frac{(1-p_L)}{p_L}\Delta\theta$. Si ha invece che $\hat{q}_H$ è scelto come nel caso di informazione completa.

7 Settima Lezione

7.1 Esercizi

7.1.1 Esercizio 1

Considero il caso di un **duopolio di Cournot** con eliminazione iterata. Se q_1 e q_2 sono le quantità prodotte dalle due imprese il relativo prezzo è espresso dalla funzione (348):

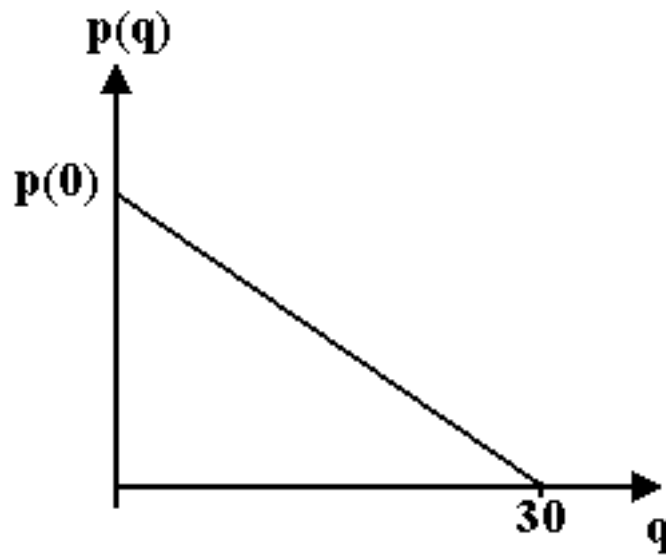


Figura 68: *Esercizio 1 (dettagli nel testo)*

$$p(q_1, q_2) = \begin{cases} a - b(q_1 + q_2) & \text{se } q = q_1 + q_2 \leq \frac{a}{b} \\ 0 & \text{se } q = q_1 + q_2 > \frac{a}{b} \end{cases} \quad (348)$$

ovvero (se $a = 30$, $b = 1$ e $c = 0$):

$$p(q_1, q_2) = \begin{cases} 30 - q_1 - q_2 & \text{se } q_1 + q_2 \leq 30 \\ 0 & \text{se } q_1 + q_2 > 30 \end{cases} \quad (349)$$

In questo esercizio si prende in esame una applicazione della tecnica di **cancelazione iterata di strategie strettamente dominate**. Si comincia con il considerare il profitto dell'impresa 1 che dipende, come il prezzo, dalle quantità prodotte dalle due imprese:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(30 - q_1 - q_2) \quad (350)$$

Derivando la (350) rispetto a q_1 si ha:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 30 - q_2 - 2q_1 \quad (351)$$

Sapendo che $0 < q_2 < 30$ posso dire che $0 < 30 - q_2 < 30$ per cui imponendo:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} < 0 \quad (352)$$

ottengo la condizione per la quale il profitto dell'impresa 1 decresce:

$$30 - q_2 - 2q_1 < 0 \quad (353)$$

ovvero:

$$q_1 > 15 - \frac{q_2}{2} \quad (354)$$

Se $q_2 = 0$ (ovvero se l'impresa 2 non produce) ho:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} \begin{cases} < 0 & \text{se } q_1 > 15 \\ \geq 0 & \text{se } q_1 \leq 15 \end{cases} \quad (355)$$

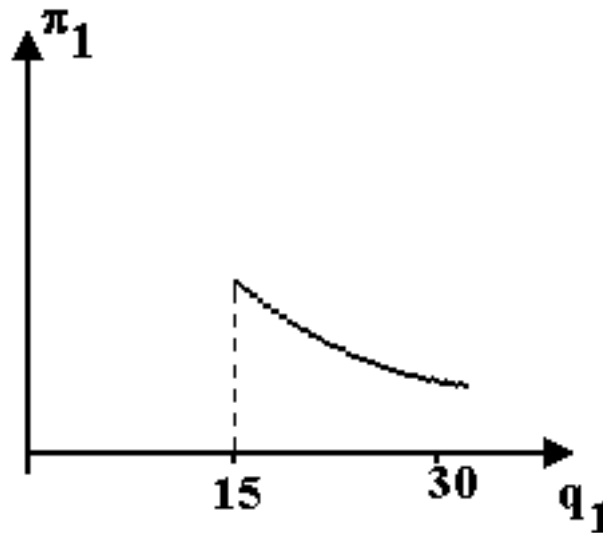


Figura 69: *Esercizio 1: andamento di π_1 (dettagli nel testo)*

Dalla figura 69 si ha che, se $q_1 > 15$ e $q_2 = 0$, $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} < 0$ ovvero il profitto dell'impresa 1 (π_1) decresce e, pertanto, ogni quantità $q_1 > 15$ è strettamente

dominato da $q_1 = 15$. Se, invece, $q_1 \leq 15$ e $q_2 = 0$, $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} \geq 0$ ovvero il profitto dell'impresa 1 (π_1) cresce o rimane costante.

Vediamo ora il profitto dell'impresa 2. In questo caso si ha:

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(30 - q_1 - q_2) \quad (356)$$

da cui, derivando rispetto a q_2 , si ha:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 30 - q_1 - 2q_2 \quad (357)$$

Le strategie (ovvero le possibili quantità che le singole imprese possono produrre) all'inizio del gioco sono le seguenti:

1. $S_1 = [0, +\infty)$
2. $S_2 = [0, +\infty)$

Dopo la prima iterazione per l'impresa 1 si ha che le strategie si sono ridotte a $S_1^{(1)} = [0, 15]$ dal momento che le strategie con $q_1 > 15$ sono strettamente dominate.

Per l'impresa 2 la situazione è simmetrica rispetto a quella dell'impresa 1 per cui anche per l'impresa 2 si ha che le strategie si sono ridotte a $S_2^{(1)} = [0, 15]$ dal momento che le strategie con $q_2 > 15$ sono strettamente dominate.

Alla seconda iterazione si dimostra che si ha $S_1^{(2)} = [15/2, 15]$.

Considero di nuovo la:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 30 - 2q_1 - q_2 \quad (358)$$

Siccome $q_2 \in S_2^{(1)}$ ho che nella (358) ho:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} > 0 \quad (359)$$

$\forall q_1 \in [0, 15/2]$. So che 2 non sceglie $q_2 > 15$ perchè tali strategie sono strettamente dominate per cui per 2 ho $S_2^{(1)}$. Se $q_2 \in [0, 15]$ allora $-q_2 \in [-15, 0]$ ovvero $30 - q_2 \in [15, 30]$ e, pertanto, dalla (358), ottengo $q_1 \in [15/2, 15]$. Con ragionamenti duali si ricava che $S_2^{(2)} = [15/2, 15]$. Iterando il ragionamento si arriva alla soluzione ottimale $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 10$.

A tale risultato si arriva anche in modo diretto imponendo uguali a zero le derivate delle funzioni profitto rispetto alle quantità q_1 e q_2 e svolgendo semplici calcoli

7.1.2 Esercizio 2: Asta di secondo prezzo

In questo tipo di asta si hanno n offerenti ognuno dei quali ha una valutazione v_i ($i = 1, \dots, n$) del bene messo all'asta ed una utilità:

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{se non vince} \\ v_i - b_i & \text{se vince} \end{cases} \quad (360)$$

dove b_i è la cifra che i paga per aggiudicarsi il bene.

Ho due casi:

1. le v_i sono conoscenza comune,
2. le v_i sono conoscenza privata con distribuzioni arbitrarie.

In entrambi i casi il risultato non cambia. Si dimostra che:

$$b_i = v_i \quad (361)$$

è una strategia **debolmente dominante** per i ed è l'**unica** a sua disposizione.

Nell'asta di secondo prezzo le offerte possono essere viste come mosse simultanee, chi offre di più vince e paga una cifra pari alla seconda offerta più alta. Si dimostra che, considerando il partecipante 1 per comodità (ma il ragionamento per simmetria vale per i generico), si ha che:

$$b_1 = v_1 \quad (362)$$

procura a 1 una utilità più alta (in senso debole ovvero con $\geq$) di quella procurata da ogni altra offerta diversa da v_1 per ogni insieme di offerte degli altri, ovvero per ogni b_{-1} . Se con b_{-1}^1 indico la più alta offerta fatta dagli altri ovvero:

$$b_{-1}^1 = \max\{b_2, \dots, b_n\} \quad (363)$$

si hanno tre casi:

$$b_1 = v_1 \begin{cases} > b_{-1}^1 & \text{se 1 offre più degli altri} \\ < b_{-1}^1 & \text{se 1 offre meno di almeno uno degli altri} \\ = b_{-1}^1 & \text{se 1 offre } b_{-1}^1 \end{cases} \quad (364)$$

Le offerte sono fatte in modo privato ovvero rappresentano mosse simultanee e quindi 1 non sa in che situazione si trova, al momento di fare la propria offerta, perchè non conosce le offerte degli altri.

Vediamo i tre casi singolarmente.

1. Se $b_1 = v_1$ e $b_1 > b_{-1}^1$ 1 vince l'asta e paga b_{-1}^1 cioè la seconda offerta più alta. In tal caso la sua utilità vale

$$v_1 - b_{-1}^1 > 0 \quad (365)$$

ed è l'utilità massima (differenza fra quello che ottiene, come valutazione, e quello che paga).

Se 1 offrisse di più di v_1 non migliorerebbe la propria situazione perchè otterrebbe la stessa utilità.

Se 1 offrisse meno di v_1 non migliorerebbe la propria situazione perchè otterrebbe la stessa utilità a patto di offrire comunque più di b_{-1}^1 perchè in caso contrario non vincerebbe l'asta. Riassumendo si ha che se $b_1 \neq v_1$ l'utilità di 1 non varia a patto che b_1 non scenda sotto b_{-1}^1 (in questo caso infatti 1 non vince l'asta).

2. Se $b_1 = v_1$ e $b_1 < b_{-1}^1$ 1 non vince l'asta e la sua utilità è nulla. Siccome $b_1 - b_{-1}^1 < 0$ se 1 offre di più può continuare a perdere ma può vincere se arriva ad offrire una cifra b_1 maggiore di b_{-1}^1 . In questo caso 1 vince e paga b_{-1}^1 che è maggiore della propria valutazione e, in tal modo, ottiene una utilità negativa pari a $v_1 - b_{-1}^1 < 0$ dal momento che paga più di quello che il bene vale per lui. Anche in questo caso una strategia ottimale è offrire $b_1 = v_1$.
3. Se $b_1 = v_1 = b_{-1}^1$ si hanno più partecipanti a pari merito per cui si andrebbe ad una lotteria equa solo che, nel caso di v. a. continue, la probabilità di tale evento è nulla.

Vediamo il ricavo R del venditore. Si ha:

$$R = v^{(2)} \quad (366)$$

ovvero il ricavo è la seconda migliore offerta dato un profilo di valutazioni e avendo fissato i e v_i : il venditore ricava una cifra pari alla seconda offerta più alta che è quanto paga chi offre di più per aggiudicarsi il bene. Si ha che è:

$$E[R] = E[v^{(2)}] \quad (367)$$

nel caso non si conoscano le valutazioni v_i ma si sappia che $v_i \in [a, b]$. Si verifica che il ricavo atteso coincide con quello dell'asta di primo prezzo mediante considerazioni simili.

7.1.3 Esercizio 3

Le figure 70 e 71 presentano:

1. la forma estesa,
2. la forma normale,

di un gioco con due giocatori a mosse successive (non può essere a mosse simultanee per come è fatta la forma estesa). In tale gioco le strategie pure

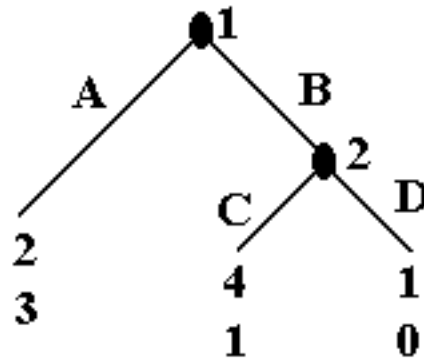


Figura 70: *Esercizio 3: forma estesa (dettagli nel testo)*

2 1		C	D
		A	B
A		2 3	2 3
B		4 1	1 0

Figura 71: *Esercizio 3: forma normale (dettagli nel testo)*

dei giocatori sono le seguenti:

1. $S_1 = \{A, B\}$
2. $S_2 = \{C, D\}$

Da una analisi della forma normale si vede come i *NE* in strategie pure del gioco sono:

1. (B, C)
2. (A, D)

Vediamo cosa succede nel caso di **strategie miste**. Ci si chiede: si hanno *NE* con 2 che sceglie una strategia mista?

Perchè ciò accada è necessario che 2 sia indifferente fra le sue strategie pure nel supporto della strategia mista cioè che 2 sia indifferente fra C e D quale che sia la strategia (mista) giocata da 1. Se $u_2(C, \sigma_1)$ rappresenta l'utilità attesa di 2 che gioca C mentre 1 gioca una strategia mista generica σ_1 e $u_2(D, \sigma_1)$ rappresenta l'analoga utilità attesa di 2 che gioca D si ha:

1. $u_2(C, \sigma_1) = 3\sigma_{1A} + 1\sigma_{1B}$
2. $u_2(D, \sigma_1) = 3\sigma_{1A} + 0\sigma_{1B}$

dove σ_{1X} è la probabilità che 1 esegua la mossa X con $X = A, B$. Se si impone la condizione di indifferenza per 2 ovvero:

$$u_2(C, \sigma_1) = u_2(D, \sigma_1) \quad (368)$$

si ottiene che deve necessariamente essere $\sigma_{1B} = 0$. 2 è indifferente fra C e D sse 1 gioca A ovvero:

$$C \sim_2 D \quad (369)$$

sse $\sigma_{1B} = 0 \iff \sigma_{1A} = 1$. Si ha una strategia mista per 2 con un equilibrio se 1 gioca una strategia pura, A . Ciò richiede che sia:

$$A \succeq_1 B \quad (370)$$

ovvero che A sia preferito a B da 1 perchè se avessi:

$$A \prec_1 B \quad (371)$$

avrei che 1 giocherebbe B con probabilità 1 e non A . Se con σ_{2Y} si indica la probabilità che 2 esegua la mossa Y con $Y = C, D$ si calcolano le utilità attese per 1:

1. $u_1(A, \sigma_2) = 2\sigma_{2C} + 2\sigma_{2D} = 2\sigma_{2C} + 2(1 - \sigma_{2C}) = 2$
2. $u_1(B, \sigma_2) = 4\sigma_{2C} + 1\sigma_{2D} = 4\sigma_{2C} + 1(1 - \sigma_{2C}) = 3\sigma_{2C} + 1$

Perchè sia $A \succeq_1 B$ deve essere $u_1(A, \sigma_2) \geq u_1(B, \sigma_2)$ ovvero, svolgendo i calcoli:

$$\sigma_{2C} \leq \frac{1}{3} \quad (372)$$

ovvero se vale la (372) ho che 1 giocherà A invece di B e quindi 2 sarà indifferente fra C e D . Le condizioni viste sono **necessarie** e **sufficienti** per cui:

$$(A, (\sigma_{2C}, \sigma_{2D})) \quad (373)$$

è un $NE \forall \sigma_{2C} \in [0, 1/3]$. Si noti che se 1 gioca A il gioco termina subito senza che 2 possa effettivamente muovere.

7.1.4 Esercizio 4

Si hanno due imprese $i = 1, 2$ ciascuna delle quali compie uno sforzo s_i per ottenere un sussidio (vedi la figura 72). Gli sforzi s_i assumono valori in

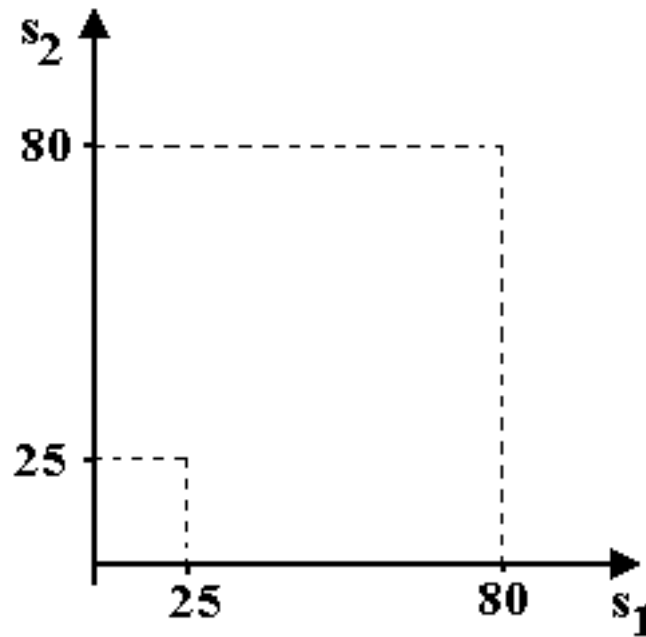


Figura 72: *Esercizio 4 (dettagli nel testo)*

$[0, 80]$ e hanno un costo pari a:

$$c(s_i) = s_i^2 \quad (374)$$

($i = 1, 2$) mentre il sussidio ottenuto (e che viene suddiviso in parti uguali fra le due ditte) vale:

$$100(s_1 + s_2) + \beta s_1 s_2 \quad (375)$$

in cui β è una sorta di coefficiente di correlazione. Da quanto detto si ricavano facilmente le utilità delle due imprese (o ditte):

$$u_1(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) + \frac{\beta}{2}s_1 s_2 - s_1^2 \quad (376)$$

$$u_2(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) + \frac{\beta}{2}s_1 s_2 - s_2^2 \quad (377)$$

Se $\beta = 0$ (nessuna influenza reciproca) ogni giocatore (impresa) ha una strategia strettamente dominante per cui si esamina tale caso come punto di partenza. Se $\beta = 0$ la (376) diventa:

$$u_1(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) - s_1^2 \quad (378)$$

Il valore ottimo di u_1 dipende sia da s_1 sia da s_2 ma il contributo di s_2 sparisce nel momento in cui calcolo il valore della derivata rispetto a s_1 ovvero il valore di s_1 per il quale la (378) assume valore ottimo non dipende dal valore di s_2 ovvero è lo stesso $\forall s_2$.

Il valore di s_1 per cui si ha l'ottimo è una strategia dominante per la ditta 1. Dalla (378), derivando rispetto a s_1 ed eguagliando a zero, si ha (vedi la figura 72):

$$\dot{s}_1 = 25 \quad (379)$$

In modo duale, con ragionamenti simili, dalla:

$$u_2(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) - s_2^2 \quad (380)$$

derivando rispetto a s_2 e imponendo la derivata uguale a 0 si ricava:

$$\dot{s}_2 = 25 \quad (381)$$

Si considera ora il caso $\beta \neq 0$ e si cerca di individuare tutti i NE del gioco. Si riprendono le (376) e (377):

$$u_1(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) + \frac{\beta}{2}s_1 s_2 - s_1^2 \quad (382)$$

$$u_2(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) + \frac{\beta}{2}s_1 s_2 - s_2^2 \quad (383)$$

Si nota che la (382) è strettamente concava in s_1 dal momento che:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial s_1^2} = -2 < 0 \quad (384)$$

ed in più:

1. $[0, 80]$ è un insieme convesso,
2. $u_1(s_1, s_2)$ è una funzione continua in s_2

Da tutto ciò segue che esistono più NE in strategie pure e miste.

Siccome deve essere $\beta \neq 0$ per semplificarci la vita considero $\beta = 2$ in modo da avere le seguenti espressioni delle utilità:

$$u_1(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) + s_1 s_2 - s_1^2 \quad (385)$$

$$u_2(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) + s_1 s_2 - s_2^2 \quad (386)$$

Volendo un NE in strategie pure uso le condizioni del primo ordine (ovvero calcolo le derivate prime rispetto a s_1 per la $u_1(s_1, s_2)$ e rispetto a s_2 per la $u_2(s_1, s_2)$ e le impongo uguali a 0) in modo da ottenere:

$$s_1 = 25 + \frac{s_2}{2} \quad (387)$$

$$s_2 = 25 + \frac{s_1}{2} \quad (388)$$

Le (387) (388) hanno una intersezione (vedi la figura 73) in un punto le cui coordinate sono ottenute dalla loro risoluzione (ottenuta sottraendo le due m. a m. e poi sostituendo il risultato ottenuto) e sono:

$$\dot{s}_1 = \dot{s}_2 = 50 \quad (389)$$

(in altro modo, dalla uguaglianza delle (387) (388) si ha $s_1 = s_2$ e, sostituendo in una delle due, si ha facilmente $s_1 = 50$). In strategie pure l'unico NE è quello dato dalla (389). Si verifica che è l'unico considerando anche i punti di frontiera degli intervalli $[0, 80]$.

Ci si chiede: esistono NE con strategie miste? Il gioco ha infinite strategie e la definizione dei NE può essere un problema. In ogni caso si può verificare che non esistono NE in strategie miste ovvero in ogni equilibrio 1 gioca una strategia pura e lo stesso vale per 2.

Se s'_1, s''_1, s'''_1 sono strategie pure per 1 e σ_1 è una strategia mista per 1 con:

1. $\sigma_1(s'_1) > 0$,
2. $\sigma_1(s''_1) = 1 - \sigma_1(s'_1)$,
3. $\sigma_1(s'''_1) = 0$

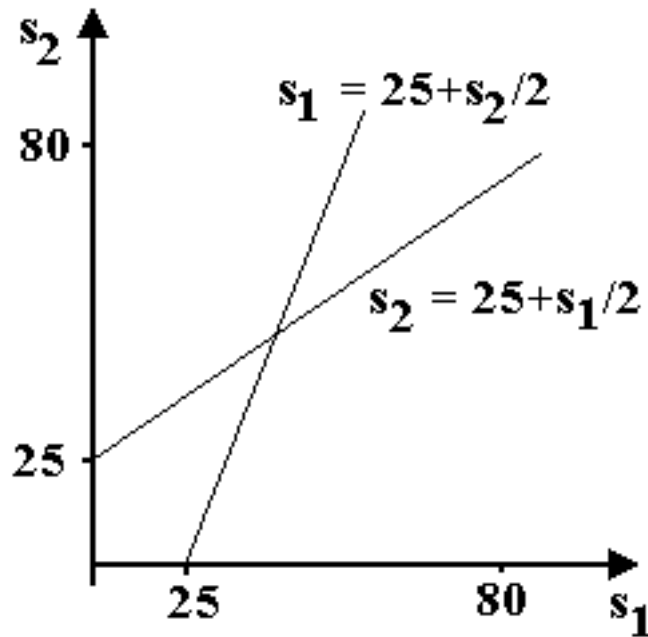


Figura 73: *Esercizio 4: andamenti delle derivate (dettagli nel testo)*

esiste una strategia pura per 1 migliore della σ_1 . Se 2 gioca una strategia mista con distribuzione di probabilità σ_2 perchè 1 sia indifferente fra s'_1 e s''_1 deve essere:

$$u_1(s'_1, \sigma_2) = u_1(s''_1, \sigma_2) \quad (390)$$

La $u_1(s''_1)$ è concava in s''_1 con σ_2 fissata. La figura 74 illustra quanto segue. Data una funzione f :

1. strettamente concava,
2. su un dominio convesso,
3. con

$$f(s'_1) = f(s''_1) \quad (391)$$

nel punto che è dato dalla combinazione convessa di s'_1 e s''_1 ho una condizione per la quale la funzione utilità u_1 assume un valore maggiore. Lo si vede nel caso della f di figura 74 (sinistra). Data la f ho che $\forall x_1, x_2$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$ per la concavità ho:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (392)$$

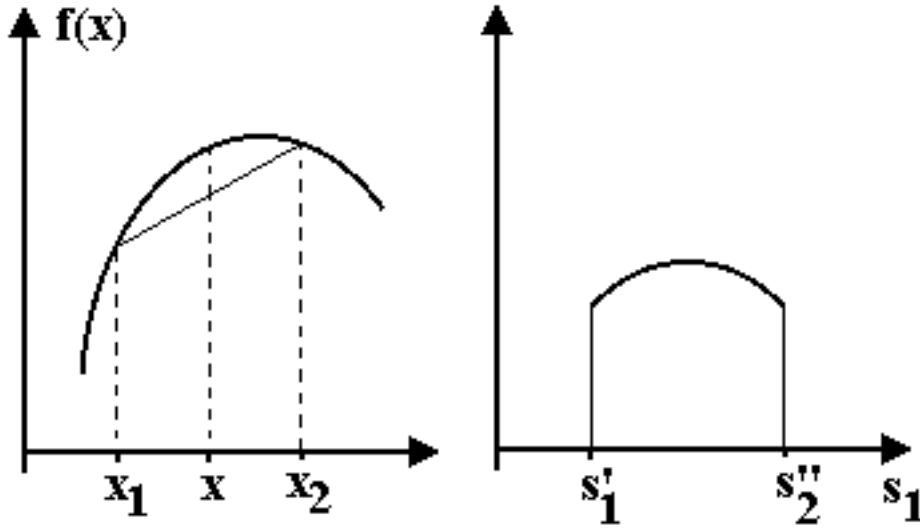


Figura 74: *Esercizio 4: concavità (dettagli nel testo)*

Se riprendo le:

$$u_1(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) + s_1 s_2 - s_1^2 \quad (393)$$

$$u_2(s_1, s_2) = 50(s_1 + s_2) + s_1 s_2 - s_2^2 \quad (394)$$

ho le seguenti condizioni di indifferenza e preferenza:

$$u_1(s'_1, \sigma_2) = u_1(s''_1, \sigma_2) < u_1(s_1, \sigma_2) \quad (395)$$

$\forall s_1 \in [s'_1, s''_1]$. Se si considera (vedi la figura 75):

$$1. S_1 = [0, 80]$$

$$2. S_2 = [0, 40]$$

si ha l'equilibrio (unico NE in strategie pure) della figura 75 in cui si ha:

$$s_2 = \begin{cases} 25 + \frac{s_1}{2} & \text{se } s_1 \leq 30 \\ 40 & \text{se } s_1 > 30 \end{cases} \quad (396)$$

7.1.5 Esercizio 5: Asta “all pay”

Si considera un'asta di tipo particolare con un venditore e due giocatori $i = 1, 2$ tali che:

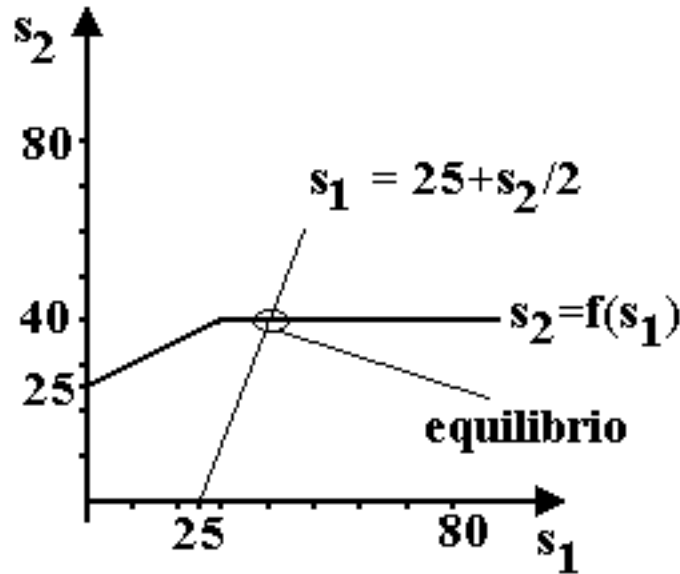


Figura 75: *Esercizio 4: equilibrio (dettagli nel testo)*

1. s_1 e s_2 sono, rispettivamente, le offerte dei giocatori 1 e 2,
2. la valutazione del bene è la stessa per entrambi i giocatori e la posso pensare normalizzata a 1 ovvero $v_1 = v_2 = 1$,
3. le possibili strategie dei giocatori sono $s_1 \in [0, 1]$ e $s_2 \in [0, 1]$.

Se con $u_1(s_1, s_2)$ indico l'utilità del giocatore 1 se offre s_1 nel caso in cui il giocatore 2 offre s_2 ho i seguenti casi:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 - s_1 & \text{se } s_1 > s_2 \\ -s_1 & \text{se } s_2 > s_1 \\ \frac{1}{2} - s_1 & \text{se } s_1 = s_2 \end{cases} \quad (397)$$

Nella (397) ho i tre casi in cui 1 vince l'asta e paga una somma pari alla propria offerta, 1 perde l'asta ma deve pagare la propria offerta e i due giocatori pareggiano per cui 1 vince (in termini di utilità attesa) $1/2$ diminuito di quello che ha offerto. Per il giocatore 2, in modo simmetrico, se con $u_2(s_1, s_2)$ indico l'utilità di 2 se offre s_2 mentre 1 offre s_1 , ho i seguenti casi:

$$u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 - s_2 & \text{se } s_2 > s_1 \\ -s_2 & \text{se } s_2 < s_1 \\ \frac{1}{2} - s_2 & \text{se } s_2 = s_1 \end{cases} \quad (398)$$

Si vuole dimostrare che **non esiste un NE in strategie pure**. La dimostrazione (o meglio la verifica) la si fa considerando i vari casi.

1. $s_1 > s_2 > 0$: in questo caso 1 vince, paga s_1 e ottiene una utilità pari a $1 - s_1$ mentre 2 perde e paga s_2 . Tale condizione non è di equilibrio se uno o entrambi i giocatori possono migliorare (deriva dalla negazione della definizione di equilibrio di Nash). In questo caso 2 può migliorare perchè può offrire 0 in modo che perde ma non deve pagare nulla: la condizione detta, pertanto, non è un *NE*.
2. $s_1 > s_2 = 0$: in questo caso 1 vince, paga s_1 e ottiene una utilità pari a $1 - s_1$ mentre 2 perde ma non paga nulla. Con considerazioni analoghe alle precedenti si verifica che tale condizione non è di equilibrio perchè 1 può offrire $s_1 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ piccolo in modo da continuare a vincere pagando meno.
3. i casi $s_2 > s_1 > 0$ e $s_2 > s_1 = 0$ li si analizza in modo analogo ai precedenti in modo da dimostrare che non danno luogo a *NE*.
4. $s_1 = s_2 = 1$: in questo caso entrambi hanno una utilità negativa pari a $-1/2$ per cui entrambi vogliono di sicuro offrire meno e quindi tale condizione non è un *NE*.
5. $s_1 = s_2 < 1$: in questo caso hanno entrambi utilità $u_1 = u_2 = 1/2 - s_1$ (perchè siano strettamente positive deve essere $s_1 = s_2 < 1/2$) ma entrambi hanno interesse a deviare pagando $\varepsilon > 0$ piccolo in modo da avere tutto il premio a costi di pochissimo superiori.
6. $s_1 = s_2 = 0$: in questo caso hanno entrambi una utilità pari a $1/2$ ma la condizione non è un *NE* in quanto entrambi hanno interesse a deviare pagando $\varepsilon > 0$ piccolo in modo da avere un'utilità pari a $1 - \varepsilon$.

Esiste un *NE* in **strategie miste** (σ_1, σ_2) ?

Si suppone che sia:

1. σ_1 con distribuzione uniforme su $[0, 1]$,
2. σ_2 con distribuzione uniforme su $[0, 1]$.

Si può calcolare $u_1(s_1, \sigma_{-1}) = u_1(s_1, \sigma_2)$ come somma delle utilità dei tre eventi possibili ovvero 1 vince, 1 pareggia e 1 perde:

$$\begin{aligned} u_1(s_1, \sigma_2) &= (1 - s_1)P(s_2 < s_1) + \left(\frac{1}{2} - s_1\right)P(s_2 = s_1) + (-s_1)P(s_2 > s_1) \\ &= (1 - s_1)s_1 + (-s_1)(1 - s_1) = 0 \end{aligned} \quad (399)$$

$\forall s_1 \in [0, 1]$, in cui:

1. $P(s_2 = s_1) = 0$ perchè si tratta di v. a. continue,
2. $P(s_2 < s_1) = \int_0^{s_1} 1 dt = s_1$,
3. $P(s_2 > s_1) = 1 - P(s_2 < s_1) = 1 - s_1$.

Qualunque cosa 2 giochi (ovvero qualunque sia la strategia mista σ_2 adottata da 2, purchè con distribuzione uniforme) l'utilità attesa di 1 è nulla. In modo analogo si ha che:

$$u_2(s_2, \sigma_1) = 0 \quad (400)$$

ovvero σ_1 è una risposta ottima a σ_2 e, in modo simile, σ_2 è una risposta ottima a σ_1 in modo che entrambe definiscano un unico NE in strategie miste.

7.2 Distribuzione continua dei tipi di compratore

Riprendendo il discorso iniziato nella sezione 6.4 si esamina ora il caso in cui si ha un intervallo continuo di tipi del compratore ovvero:

$$\theta \in [\theta_L, \theta_H] \quad (401)$$

con $\theta_H > \theta_L > 0$. In questo caso non si ha un insieme con due tipi possibili ($\{\theta_L, \theta_H\}$) ma si ha un intervallo di valori al cui interno il tipo del compratore θ varia con continuità, potendo assumere infiniti valori. Sotto questa ipotesi definisco per la variabile θ :

1. una funzione di ripartizione F ,
2. una funzione densità $f = F'$ tale che:
 - (a) $f > 0$,
 - (b) f è continua sul supporto $[\theta_L, \theta_H]$.

Di nuovo si hanno i due casi:

1. informazione completa (ovvero il venditore conosce il tipo del compratore),
2. informazione incompleta in cui il venditore conosce solo i parametri statistici descrittivi del compratore.

Nel caso di **informazione completa** non cambia nulla rispetto a quanto visto nella sezione 6.4 ovvero si hanno le seguenti espressioni per la quantità scambiata e il trasferimento di denaro (entrambi in funzione di θ):

1. $\dot{q}(\theta) = \operatorname{argmax}_{q \geq 0} (\theta q(v) - cq)$
2. $\dot{t}(\theta) = \theta v[\dot{q}(\theta)]$

in cui $\theta q(v) - cq$ definisce il cosiddetto **surplus sociale**.

Nel caso di **informazione incompleta** o **privata**, ovvero nel caso in cui il tipo del compratore non è noto al venditore, il menù dei contratti non contiene solo 2 tipi (come nel caso della sezione 6.4), perchè se avessi solo due tipi avrei più tipi distinti di compratore che sarebbero forzati a scegliere lo stesso tipo di contratto. In questo caso definisco come **insieme dei contratti** la struttura seguente:

$$\{(q(\theta), t(\theta))\} \quad (402)$$

con $\theta \in [\theta_L, \theta_H]$ in modo che si abbia un contratto per ogni tipo di compratore. In analogia a quanto fatto nella sezione 6.4, si introducono i vincoli che fanno sì che ogni compratore preferisca il contratto progettato per il proprio tipo a tutti gli altri. In quanto segue si ha:

1. θ e $\theta' \in [\theta_L, \theta_H]$ rappresentano tipi distinti di compratore,
2. $q(\cdot)$ indica $q(\theta)$ al variare di θ ,
3. $u(\theta) = \theta v(q(\theta)) - t(\theta)$ indica l'utilità di un compratore di tipo θ se sceglie il contratto disegnato per lui.

Si hanno i seguenti vincoli:

$$u(\theta) \geq \theta v(q(\theta')) - t(\theta') \quad (403)$$

ovvero (sostituendo la definizione della $u(\theta)$):

$$\theta v(q(\theta)) - t(\theta) \geq \theta v(q(\theta')) - t(\theta') \quad (404)$$

ma:

$$u(\theta) \geq 0 \quad (405)$$

da cui:

$$\theta v(q(\theta)) - t(\theta) \geq 0 \quad (406)$$

Le disequazioni (403) e (404) definiscono il vincolo noto come *IC* mentre le disequazioni (405) e (406) definiscono il vincolo noto come *IR*.

Collettivamente, tali disequazioni stabiliscono che:

1. il compratore di tipo θ preferisce il contratto progettato per lui a quello progettato per ogni altro tipo θ' ,

2. il compratore di tipo θ accetta il contratto progettato per lui sse ne ricava una utilità superiore alla propria utilità residua, nulla in questo caso.

Dal momento che si ha un vincolo di tipo IC e un vincolo di tipo IR per ogni valore possibile di θ si hanno infiniti vincoli. Se i vincoli sono tutti soddisfatti, ogni tipo di compratore sceglie il contratto disegnato per lui dal venditore e il venditore ha un profitto atteso dato dalla seguente espressione:

$$E[t(\theta) - cq(\theta)] = \int_{\theta_L}^{\theta_H} (t(\theta) - cq(\theta))f(\theta)d\theta \quad (407)$$

in cui $t(\theta) - cq(\theta)$ è il ricavo del venditore con il compratore di tipo θ .

Un menù di contratti $\{q(\theta), t(\theta)\}$ è **ottimo** quando **massimizza E** rispettando i vincoli IC e IR considerando che $\theta \in [\theta_L, \theta_H]$. Si introduce un Lemma che consente di semplificare i calcoli.

Lemma 7.1 *Si vuole dimostrare che:*

1. il vincolo IC equivale a imporre che la $q(\cdot)$ sia qualunque purchè crescente in modo che, dopo aver fissato q , il trasferimento di denaro risulti definito come:

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z))dz - u(\theta_L) \quad (408)$$

con:

- (a) $u(\theta_L) = \theta_L v(q(\theta_L)) - t(\theta_L)$
- (b) $u(\theta) = \theta v(q(\theta)) - t(\theta)$

2. se il vincolo IC è soddisfatto dai contratti $\{q(\theta), t(\theta)\}$ allora il vincolo IR è verificato sse:

$$u(\theta_L) \geq 0 \quad (409)$$

[Dimostrazione]

Dati due tipi di compratore θ e $\theta' \in [\theta_L, \theta_H]$, si suppone che:

1. $\theta > \theta'$,
2. il vincolo IC sia soddisfatto,

in modo da scrivere:

$$u(\theta) \geq u(\theta') + (\theta - \theta')v(q(\theta')) \quad (410)$$

Il secondo membro della (410) è il secondo membro della (404) rivisto. Posso scrivere:

$$\theta v(q(\theta')) - t(\theta') = \theta v(q(\theta')) + \theta' v(q(\theta')) - \theta' v(q(\theta')) - t(\theta') \quad (411)$$

per cui, considerando insieme fra di loro il primo e il terzo elemento del secondo membro e lo stesso per il secondo e il quarto elemento (per i quali si ricorda che è $u(\theta') = \theta' v(q(\theta')) - t(\theta')$), si ha:

$$u(\theta') + (\theta - \theta')v(q(\theta')) \quad (412)$$

ovvero il secondo membro della (410). In modo duale se si suppone che:

1. $\theta' > \theta$,
2. il vincolo IC sia soddisfatto,

si può scrivere:

$$u(\theta') \geq u(\theta) + (\theta' - \theta)v(q(\theta)) \quad (413)$$

Dalla (410) posso ricavare:

$$u(\theta) - u(\theta') \geq (\theta - \theta')v(q(\theta')) \quad (414)$$

mentre dalla (413) posso ricavare:

$$(\theta - \theta')v(q(\theta)) \geq u(\theta) - u(\theta') \quad (415)$$

Dalle (414) e (415) ottengo:

$$(\theta - \theta')v(q(\theta)) \geq u(\theta) - u(\theta') \geq (\theta - \theta')v(q(\theta')) \quad (416)$$

Per ipotesi ho che $\theta > \theta'$ per cui $\theta - \theta' > 0$ (ovvero il tipo θ è supposto migliore del tipo θ') per cui dalla (416) ottengo facilmente:

$$v(q(\theta)) \geq v(q(\theta')) \quad (417)$$

e poichè v è crescente, per definizione, si ha:

$$q(\theta) \geq q(\theta') \quad (418)$$

Ovvero la q risulta essere **debolmente crescente**.

Se ora riprendo la (416) e divido per $(\theta - \theta') > 0$ (considerando che la u è endogena) arrivo alla seguente catena di disuguaglianze:

$$v(q(\theta)) \geq \frac{u(\theta) - u(\theta')}{(\theta - \theta')} \geq v(q(\theta')) \quad (419)$$

Se $\theta' \rightarrow \theta^-$ (ovvero se θ' tende a θ da sinistra, ma a rigore dovrebbe essere da destra, ho che $v(q(\theta))$ non cambia ossia:

$$v(q(\theta')) \rightarrow v(q(\theta)) \quad (420)$$

se la q è continua in θ per cui, usando il teorema dei carabinieri, si ha:

$$\frac{u(\theta) - u(\theta')}{(\theta - \theta')} \rightarrow v(q(\theta)) \quad (421)$$

ovvero:

$$\frac{du}{d\theta} = u'(\theta) = v(q(\theta)) \quad (422)$$

$\forall \theta$ in cui q è continua.

So che q è crescente e continua su un intervallo continuo tranne che su un insieme numerabile di punti per cui q è continua quasi ovunque. Quello che voglio è che q sia continua ovunque in modo da poter scrivere ovunque:

$$u'(\theta) = v(q(\theta)) \quad (423)$$

e ricavare la v con una integrazione. Si noti che la u è convessa dal momento che:

1. la q è crescente,
2. la v è crescente,
3. per cui $v(q)$ è crescente e quindi lo è u' .

Dalla:

$$u'(\theta) = v(q(\theta)) \quad (424)$$

con una integrazione ottengo:

$$u(\theta) - u(\theta_L) = \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z)) dz \quad (425)$$

ovvero (sfruttando la $u(\theta) = \theta v(q(\theta)) - t(\theta)$):

$$\theta v(q(\theta)) - t(\theta) = u(\theta_L) + \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z)) dz \quad (426)$$

e, infine, come richiesto:

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - u(\theta_L) - \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z))dz \quad (427)$$

A questo punto si suppone che q sia crescente ed in più che sia verificata la (427), sia per il compratore di tipo θ sia per il compratore di tipo θ' ovvero che sia:

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - u(\theta_L) - \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(zeta))dz \quad (428)$$

$$t(\theta') = \theta' v(q(\theta')) - u(\theta_L) - \int_{\theta_L}^{\theta'} v(q(zeta))dz \quad (429)$$

e si dimostra che il vincolo IC è soddisfatto.

Se riprendo la:

$$\theta v(q(\theta)) - t(\theta) \geq \theta v(q(\theta')) - t(\theta') \quad (430)$$

e sostituisco in modo opportuno dalle (428) e (429) ottengo:

$$\int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z))dz + u(\theta_L) \geq \int_{\theta_L}^{\theta'} v(q(z))dz + u(\theta_L) \quad (431)$$

Nota 7.1 Dato l'integrale:

$$\int_a^b F(x, y)dx \quad (432)$$

con $y = f(x)$ e:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad (433)$$

con i vincoli $f(a)$ e $f(b)$, fra tutte le funzioni f scelgo la migliore in funzione di come è fatta la F .

Nota 7.2 Considero che:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \quad (434)$$

se $c \in [a, b]$.

Nota 7.3 Considero la:

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) \quad (435)$$

Se $\theta' < \theta$ posso scrivere (sfruttando la (434)):

$$\int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z))dz = \int_{\theta_L}^{\theta'} v(q(z))dz + \int_{\theta'}^{\theta} v(q(z))dz \quad (436)$$

ovvero, essendo $\theta > \theta'$, la v crescente e:

$$\int_{\theta'}^{\theta} v(q(z))dz \geq (\theta - \theta')v(q(\theta')) \geq 0 \quad (437)$$

si ha:

$$\int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z))dz \geq \int_{\theta_L}^{\theta'} v(q(z))dz \quad (438)$$

e infine, sommando m. a m. $u(\theta_L)$:

$$\int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z))dz + u(\theta_L) \geq \int_{\theta_L}^{\theta'} v(q(z))dz + u(\theta_L) \quad (439)$$

Proposizione 7.1 (Continuazione del Lemma) *Dalla*

$$u(\theta) - u(\theta_L) = \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z))dz \quad (440)$$

ottengo:

$$u(\theta) = u(\theta_L) + \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z))dz \quad (441)$$

Dal momento che è $v(q(z)) > 0$ ho che la u è crescente con θ (dal momento che la ottengo integrando una funzione positiva su un intervallo di ampiezza crescente con θ) per cui il vincolo IR (ovvero $\theta v(q(\theta)) - t(\theta) \geq 0$) è soddisfatto sse:

$$u(\theta_L) \geq 0 \quad (442)$$

dal momento che dalla (441) ottengo che in $\theta = \theta_L$ è $u(\theta) = u(\theta_L)$.

L'incasso che il venditore ottiene dal compratore di tipo θ risulta essere $t(\theta)$.

Comunque fisso un tipo z in $[\theta_L, \theta]$ ho:

$$\frac{\partial t(\theta)}{\partial q(z)} \quad (443)$$

dove $q(z)$ è la quantità scambiata con il compratore di tipo z . Se θ è contenuto in $[\theta_L, \theta_H]$ allora ho:

$$\frac{\partial t(\theta)}{\partial q(z)} < 0 \quad (444)$$

in analogia al caso dei due tipi di compratore in cui ho:

$$\frac{\partial t(\theta_H)}{\partial q(\theta_L)} < 0 \quad (445)$$

ovvero la variazione del prezzo per un tipo rispetto alla variazione della quantità per un altro è negativa. Questo suggerisce che:

$$\hat{q} < \dot{q} \quad (446)$$

per ogni tipo $z < \theta_H$ e:

$$\hat{q}_L < \dot{q}_L \quad (447)$$

La funzione obiettivo risulta essere:

$$E[t(\theta) - cq(\theta)] = \int_{\theta_L}^{\theta_H} \{t(\theta) - cq(\theta)\} f(\theta) d\theta \quad (448)$$

e, sostituendo la $u(\theta) = \theta v(q(\theta)) - t(\theta)$ scritta come $t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - u(\theta)$ si ha:

$$E[t(\theta) - cq(\theta)] = \int_{\theta_L}^{\theta_H} \{\theta v(q(\theta)) - u(\theta) - cq(\theta)\} f(\theta) d\theta \quad (449)$$

e, infine, ricordando che è:

$$u(\theta) - u(\theta_L) = \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z)) dz \quad (450)$$

si ha:

$$E[t(\theta) - cq(\theta)] = \int_{\theta_L}^{\theta_H} \{\theta v(q(\theta)) - \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z)) dz - u(\theta_L) - cq(\theta)\} f(\theta) d\theta \quad (451)$$

Si hanno due **variabili strumentali**:

1. $u(\theta_L) \geq 0$.
2. $q(\cdot)$ crescente in modo che sia $q'(\theta) \geq 0$ quasi ovunque.

Si vuole massimizzare la (451) sotto i vincoli delle variabili strumentali.

8 Ottava Lezione

Si vuole massimizzare la seguente espressione del valore atteso del ricavo del venditore:

$$E[t(\theta) - cq(\theta)] = \int_{\theta_L}^{\theta_H} \left\{ \theta v(q(\theta)) - \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z)) dz - u(\theta_L) - cq(\theta) \right\} f(\theta) d\theta \quad (452)$$

con $q \geq 0$ e $u(\theta_L) \geq 0$.

La funzione u decresce la crescere di θ_L per cui, dal momento che si massimizza, si può porre $u(\theta_L) = 0$ in modo da ottenere:

$$E[t(\theta) - cq(\theta)] = \int_{\theta_L}^{\theta_H} \left\{ \theta v(q(\theta)) - \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z)) dz - cq(\theta) \right\} f(\theta) d\theta \quad (453)$$

Per iniziare si prende in esame l'integrale doppio interno ovvero:

$$\int_{\theta_L}^{\theta_H} \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z)) dz f(\theta) d\theta \quad (454)$$

se considero che:

$$f(\theta) d\theta = dF(\theta) \quad (455)$$

posso integrare la (454) per parti in modo da avere:

$$F(\theta) \int_{\theta_L}^{\theta} v(q(z)) \Big|_{\theta_L}^{\theta_H} dz \Big|_{\theta_L}^{\theta_H} - \int_{\theta_L}^{\theta_H} F(\theta) v(q(\theta)) d\theta \quad (456)$$

Poichè:

$$1. F(\theta_H) = 1,$$

$$2. F(\theta_L) = 0,$$

dalla (456) ottengo:

$$\int_{\theta_L}^{\theta_H} v(q(\theta)) \left[\frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \right] f(\theta) d\theta \quad (457)$$

Sostituendo la (457) nella (453), al posto dell'integrale doppio interno, si ha:

$$\int_{\theta_L}^{\theta_H} \left\{ \left[\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \right] v(q(\theta)) - cq(\theta) \right\} f(\theta) d\theta \quad (458)$$

Si può definire la **valutazione virtuale**:

$$J(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \quad (459)$$

Si sa che per ogni tipo $z < \theta$ (ovvero per ogni tipo con valutazione inferiore a θ) si ha:

$$\frac{\partial t(\theta)}{\partial q(z)} < 0 \quad (460)$$

Se $F(\theta) \simeq 1$ ovvero se è poco possibile incontrare tipi con una valutazione più alta di θ in modo che:

$$P(z \leq \theta) = F(\theta) \simeq 1 \quad (461)$$

allora si a:

$$1 - F(\theta) \simeq 0 \quad (462)$$

in modo che come valutazione virtuale si abbia θ — *qualcosa che tiene conto della (460)*. Si hanno i seguenti casi:

1. $F(\theta) \longrightarrow 1$ e la valutazione si riduce di poco rispetto a quella vera,
2. $F(\theta) \longrightarrow 0$ è facile che il compratore abbia una valutazione più alta.

Si deve ora massimizzare la (458) rispetto a q sull'insieme delle funzioni crescenti: se trascuro tale vincolo per cui massimizzo su tutte le funzioni e trovo una q ottima crescente allora si ha un massimo. Tutto ciò è legittimo se la $J(\theta)$ è crescente. Dalla (459) si ha:

1. θ crescente,
2. $F(\theta)$ crescente ovvero $1 - F(\theta)$ decrescente e quindi $-(1 - F(\theta))$ crescente,

per cui tutto dipende dalla $f(\theta)$ che può far sì che $J(\theta)$ non sia crescente. Per certe $f(\theta)$ quali le:

1. f uniforme,
2. f normale,
3. f esponenziale troncata

la $J(\theta)$ è strettamente crescente. Dalla (459) ho (considerando che $F(\theta_L) = 0$ e $F(\theta_H) = 1$):

$$J(\theta_L) = \theta_L - \frac{1 - F(\theta_L)}{f(\theta_L)} = \theta_L - \frac{1}{f(\theta_L)} \quad (463)$$

$$J(\theta_H) = \theta_H \quad (464)$$

per cui ho:

$$J(\theta_H) = \theta_H > \theta_L > \theta_L - \frac{1}{f(\theta_L)} = J(\theta_L) \quad (465)$$

ovvero J non può essere monotona decrescente anzi si vuole che sia monotona crescente. Se J è strettamente crescente su $[\theta_L, \theta_H]$ si trascura il vincolo sulla q (che sia monotona crescente) e si risolve la (458). Il procedimento prevede che si massimizzi punto per punto ovvero si fissa $\theta \in [\theta_L, \theta_H]$ e si massimizza rispetto a q per quel valore di θ , poi si prende un nuovo θ e si calcola un nuovo massimo. Fatto questo per tutti i punti $\theta \in [\theta_L, \theta_H]$ si è trovato il massimo dell'integrale dal momento che lo si è massimizzato punto per punto.

Si definisce:

$$\tilde{q}(\theta) = \operatorname{argmax}_{q \geq 0} J(\theta)v(q) - cq \quad (466)$$

in cui $J(\theta)v(q) - cq$ è l'argomento dell'integrale nella (458) a meno del fattore costante positivo (dal momento che θ è fissato) $f(\theta)$.

Se $\tilde{q}(\cdot)$ è crescente allora $\hat{q}(\cdot) = \tilde{q}$ è il massimo, sotto l'ipotesi che q sia crescente, essendo $\tilde{q}$ ben definita. Si hanno i casi seguenti:

1. se $J(\theta) \leq 0$ allora $J(\theta)v(q) - cq \leq 0$ per cui la q ottima è $q = 0$;
2. se $J(\theta) > 0$ allora $J(\theta)v(q) - cq$ è strettamente concava (dal momento che lo è $v(q)$ e cq è lineare in q) per cui la funzione obiettivo è strettamente concava e, quindi, di punti di massimo se ne ha uno solo per cui è legittimo scrivere la (466).

Si deve ora dimostrare che $\tilde{q}$ è strettamente crescente ovvero si deve dimostrare che:

$$\theta > \theta' \Rightarrow \tilde{q}(\theta) > \tilde{q}(\theta') \quad (467)$$

in modo che $J(\theta)v(\tilde{q}(\theta)) - c\tilde{q}(\theta)$ sia un massimo per la $J(\theta)v(q) - cq$ e quindi, sulla base delle condizioni precedenti, sia:

$$J(\theta)v(\tilde{q}(\theta)) - c\tilde{q}(\theta) \geq J(\theta)v(\tilde{q}(\theta')) - c\tilde{q}(\theta') \quad (468)$$

$$J(\theta')v(\tilde{q}(\theta')) - c\tilde{q}(\theta') \geq J(\theta')v(\tilde{q}(\theta)) - c\tilde{q}(\theta) \quad (469)$$

Sommando m. a m. tali diseuguaglianze e semplificando si ottiene:

$$(J(\theta) - J(\theta'))v(\tilde{q}(\theta)) \geq (J(\theta) - J(\theta'))v(\tilde{q}(\theta')) \quad (470)$$

ovvero, essendo $(J(\theta) - J(\theta')) > 0$, dato che J è strettamente crescente fra θ_L e θ_H :

$$v(\tilde{q}(\theta)) \geq v(\tilde{q}(\theta')) \quad (471)$$

che, essendo la v strettamente crescente, equivale alla seguente condizione:

$$\tilde{q}(\theta) \geq \tilde{q}(\theta') \quad (472)$$

Sotto l'ipotesi vista si ha $\hat{q}(\theta) = \tilde{q}(\theta)$. Se confronto tale quantità con la quantità allocata al compratore di tipo θ nel caso di informazione completa e definita come:

$$\dot{q}(\theta) = \operatorname{argmax}_{q \geq 0} \theta v(q) - cq \quad (473)$$

con la quantità allocata al compratore di tipo θ nel caso di informazione incompleta e definita come:

$$\hat{q}(\theta) = \tilde{q}(\theta) = \operatorname{argmax}_{q \geq 0} J(\theta)v(q) - cq \quad (474)$$

dal momento che per ogni tipo del compratore $\theta < \theta_H$ ho che $J(\theta) < \theta$ arrivo alla conclusione che $\forall \theta < \theta_H$ si ha:

$$\hat{q}(\theta) < \dot{q}(\theta) \quad (475)$$

Di quanto tale differenza sia grande dipende dal fattore:

$$\frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \quad (476)$$

Se tale fattore tende a 1 la differenza è grande se, invece, tende a 0 la differenza è piccola. Siccome:

$$\hat{q}(\theta_H) = \dot{q}(\theta_H) \quad (477)$$

e la $\hat{q}$ è continua per il teorema del massimo ho che per $\theta \rightarrow \theta_H$ la differenza fra $\hat{q}$ e $\dot{q}$ è piccola a piacere. Si ha, quindi, che i casi:

1. di due tipi di compratore $\{\theta_L, \theta_H\}$
2. di infiniti tipi di compratore $[\theta_L, \theta_H]$

danno risultati simili (si ha anche $u(\theta_H) > 0$ come nel caso dei due tipi). Se conosco la $v(q)$ e conosco la $f(\theta)$ conosco la $J(\theta)$. Vediamo un esempio.

Esempio 8.1 Sia $v(q) = \sqrt{q}$ e sia F una distribuzione uniforme per $\theta \in [a, b]$ ovvero:

$$F(\theta) = \frac{\theta - a}{b - a} \quad (478)$$

Sostituendo nella (459) si ricava una espressione chiusa per la **valutazione virtuale**:

$$J(\theta) = 2\theta - b \quad (479)$$

che definisce la J crescente su $[a, b]$.

Volendo massimizzare la $J(\theta)v(q) - cq$ nel caso corrente si deve massimizzare la:

$$(2\theta - b)\sqrt{q} - cq \quad (480)$$

con $\hat{q} = \tilde{q}$.

Derivando la (480) rispetto a q e imponendo la uguale a 0 si ha che:

$$\hat{q}(\theta) = \left(\frac{2\theta - b}{2c}\right)^2 \quad (481)$$

è $\arg\max$ della (480). Se la J è decrescente fra θ_L e θ_H ho che la $\tilde{q}$ è una

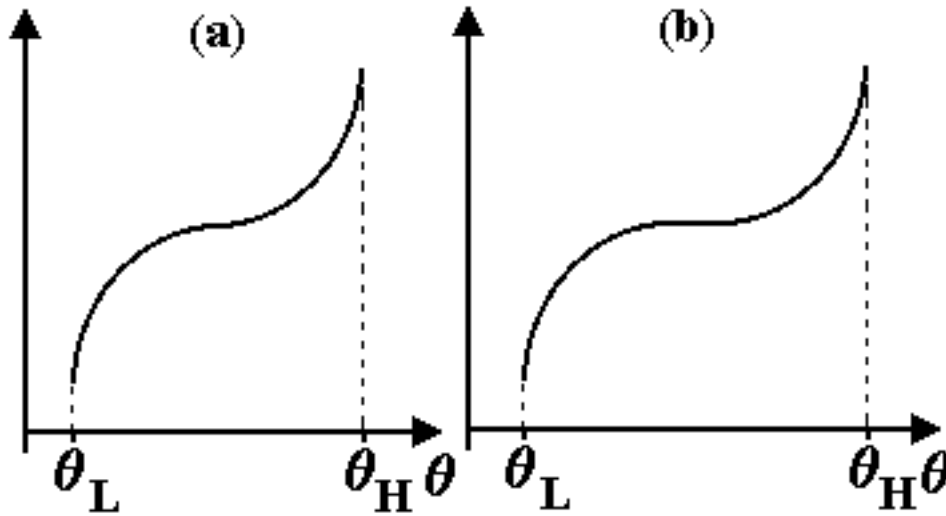


Figura 76: Andamenti di J (dettagli nel testo)

funzione con la stessa monotonia della J per cui sarebbe violato il vincolo della crescita di q . Per risolvere il problema si considera una J stirata (vedi le due figure 76 (a) e (b)) in modo che la J sia debolmente crescente e quindi la $\tilde{q}$ sia crescente.

8.1 Esempio

Si considera il caso di **un venditore** con una sola unità di un bene da vendere (una impresa, un quadro o un libro). Si introducono le seguenti grandezze e/o ipotesi:

1. $q \in [0, 1]$ probabilità che il cliente ottenga il bene,
2. $c = 0$ costo di produzione nullo,
3. $v(q) = q$,
4. θ misura il gradimento del bene da parte del compratore ed è noto solo a lui,
5. utilità del consumo del bene $\theta v(q) = \theta q$,
6. J strettamente crescente.

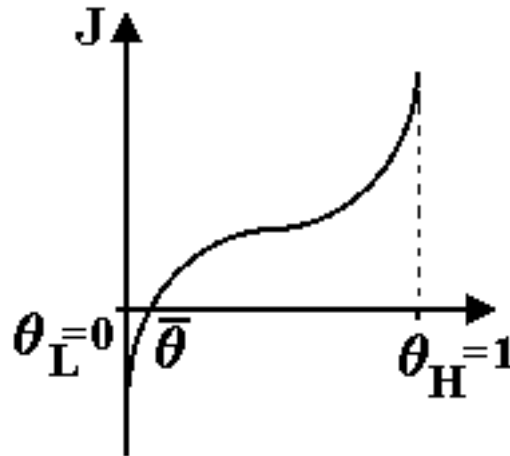


Figura 77: *Esempio (dettagli nel testo)*

Considero:

$$\hat{q}(\theta) = \operatorname{argmax} J(\theta)q = \begin{cases} 0 & \text{se } J(\theta) \leq 0 \\ 1 & \text{se } J(\theta) > 0 \end{cases} \quad (482)$$

ovvero nel primo caso (0) il bene non viene venduto mentre nel secondo (1) lo si vende. Si vede che usare probabilità non degeneri non è di alcuna utilità. Con riferimento alla figura 77 so che:

1. se $\theta_L = 0$ allora il compratore con quel tipo non apprezza il bene,

2. se $\theta_H = 1$ allora il compratore con quel tipo apprezza il bene.

Dato che:

$$J(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \quad (483)$$

poichè $F(\theta_L) = F(0) = 0$ e $F(\theta_H) = F(1) = 1$ nei due casi suddetti ho, rispettivamente (vedi la figura 77):

1. $J(0) = -\frac{1}{f(0)}$
2. $J(1) = 1$

per cui esiste $\bar{\theta} \in [0, 1]$ tale che:

1. $\theta < \bar{\theta} \Rightarrow J < 0$,
2. $\theta > \bar{\theta} \Rightarrow J > 0$

Si può, pertanto, scrivere $\theta < \bar{\theta}$ invece di $J < 0$ e $\theta > \bar{\theta}$ invece di $J > 0$ in modo che la (482) possa essere scritta come segue:

$$\hat{q}(\theta) = \operatorname{argmax}_{q \in [0,1]} J(\theta)q = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta < \bar{\theta} \\ 1 & \text{se } \theta > \bar{\theta} \end{cases} \quad (484)$$

Dalla (484) segue che (se $t(\theta)$ indica la cifra pagata dal compratore):

1. i compratori caratterizzati da un tipo $\theta < \bar{\theta}$ non comprano per cui $t(\theta) = 0$,
2. i compratori caratterizzati da un tipo $\theta > \bar{\theta}$ comprano con probabilità 1 per cui $t(\theta) = \bar{\theta}$

Il valore della soglia $\bar{\theta}$ lo si calcola imponendo $J(\theta) = 0$. Il venditore fissa un prezzo $\bar{\theta}$ e se il compratore vuole comprare paga tale prezzo in modo che i contratti possibili siano:

1. $(0, 0)$ il compratore non paga e non ottiene il bene,
2. $(1, \bar{\theta})$ il compratore paga il prezzo fissato dal venditore e ottiene il bene.

Se il prezzo lo indico con p ho che $p \in [0, 1]$ in quanto:

1. $p < 0$ non ha senso,
2. se $p > 1$ non compra nessuno perchè $\theta_H = 1$.

Il compratore di tipo θ compra solo se la sua valutazione è superiore al prezzo cioè sse:

$$\theta \geq p \quad (485)$$

La probabilità che il venditore venda il bene al prezzo p è data dalla:

$$P(\theta \geq p) = 1 - P(\theta < p) = 1 - F(p) \quad (486)$$

Dal momento che se il venditore vende il bene incassa p e se non lo vende incassa 0 il suo profitto atteso vale:

$$[1 - F(p)]p \quad (487)$$

Volendo massimizzare la (487) la si deriva rispetto a p e si impone la derivata uguale a 0 (non si hanno problemi agli estremi e il massimo è interno all'intervallo $[0, 1]$):

$$[1 - F(p)] - pf(p) = 0 \quad (488)$$

ovvero:

$$p = \frac{1 - F(p)}{f(p)} \quad (489)$$

per cui siamo nella stessa condizione della $J(\theta) = 0$ se J è crescente e quindi si ha una sola soluzione $\bar{\theta}$ come visto prima.

8.2 Di nuovo sulle Aste

La situazione è quella di un **venditore** e **n compratori** ciascuno dei quali ha una valutazione v_i del bene messo all'asta che è una informazione privata del compratore i -esimo. Si hanno i seguenti casi:

1. se i vince l'asta e ottiene il bene paga il prezzo p e la sua utilità è $v_i - p$,
2. se i non vince l'asta e non ottiene il bene la sua utilità è 0.

Gli altri partecipanti all'asta e il venditore vedono v_i come una v. a. con supporto $[a, b]$ e funzione di ripartizione F e densità f . Le v_i , inoltre, sono fra loro **stocasticamente indipendenti**. Si è visto cosa accade in un'**asta di primo prezzo**. In un'asta di primo prezzo (in cui le preferenze non sono informazione completa) si ha un solo *BNE* caratterizzato da:

$$\beta(v) = \begin{cases} a & \text{se } v = a \\ v - \frac{\int_a^v F^{n-1}(z)dz}{F^{n-1}(v)} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (490)$$

con $v \in [a, b]$. Tutti i compratori offrono in base alla stessa funzione di offerta. In questo caso il ricavo atteso del venditore è pari alla seconda valutazione più alta ovvero:

$$E[R_1] = E[v^{(2)}] \quad (491)$$

in cui R_1 è il ricavo del venditore in un'asta di primo prezzo. Nel caso di **un'asta di secondo prezzo** si ha che per ogni giocatore una strategia **debolmente dominante** è quella di fare un'offerta pari alla propria valutazione del bene ovvero $b_i = v_i$. Anche in questo caso si ha:

$$E[R_2] = E[v^{(2)}] \quad (492)$$

Nota 8.1 *in cui R_2 è il ricavo del venditore in un'asta di secondo prezzo. Sia le **aste di primo prezzo** sia le **aste di secondo prezzo** sono aste in busta chiusa.*

8.2.1 Asta inglese

Un'**asta inglese** è un'asta orale di tipo ascendente (ad esempio un'asta di quadri) in cui le offerte si susseguono fino a che non rimane un solo offerente che si aggiudica il bene. In questo caso ogni giocatore ha uno spazio di strategie infinito per cui per poter affrontare le aste inglesi dal punto di vista della TdG se ne considera una versione semplificata. In questa versione ogni giocatore si dice **attivo** fino a che non esce dall'asta. Ogni giocatore deve decidere a quale prezzo lasciare l'asta (senza potere più rientrarvi). Il prezzo dell'asta parte da 0 e cresce in modo continuo ed autonomo e si ferma quando il penultimo giocatore lascia l'asta in modo che sia rimasto un solo offerente attivo. In questo caso l'asta si chiude e il giocatore rimasto paga il prezzo corrente (la si dice **versione giapponese**). In questa versione semplificata cambia lo spazio delle strategie perchè ogni giocatore decide solo a che prezzo lasciare l'asta.

Anche in questo tipo di asta ogni giocatore ha una strategia debolmente dominante ovvero uscire dall'asta quando il prezzo corrente raggiunge la sua valutazione v_i : in questo caso vince il compratore con la valutazione più alta che paga un prezzo pari alla seconda valutazione più alta in modo che il ricavo atteso del venditore sia:

$$E[R_I] = E[v^{(2)}] \quad (493)$$

Nota 8.2 *Le aste:*

1. *asta di primo prezzo,*
2. *asta di secondo prezzo,*

3. *asta inglese*,

hanno tutte lo stesso ricavo atteso del venditore.

Nota 8.3 *Nelle considerazioni della Nota 8.2 sono valide le seguenti ipotesi:*

1. **prezzo di riserva** o prezzo minimo $r = 0$,
2. **tassa di ingresso** $c = 0$.

Il prezzo minimo indica il livello al di sotto del quale non è possibile fare offerte. Variazioni possibili sono:

1. $r \neq 0$ ma $c = 0$,
2. $r = 0$ ma $c \neq 0$,
3. $r \neq 0$ e $c \neq 0$.

Nella prossima sezione si esamina l'effetto di un prezzo di riserva non nullo e si verifica se esiste un'asta ottimale ovvero un'asta che massimizza il ricavo atteso del venditore.

8.2.2 Asta inglese con $r \neq 0$

Nel caso di un'asta inglese con $r \neq 0$ il prezzo parte da $r > 0$ mentre per i giocatori si hanno le seguenti condizioni:

1. se un giocatore ha $v_i < r$ non partecipa all'asta,
2. se un giocatore ha $v_i > r$ partecipa all'asta e la abbandona quando il prezzo corrente raggiunge la sua valutazione v_i .

Si vuole vedere l'effetto sul ricavo atteso del venditore. A tale scopo si definiscono le seguenti quantità:

1. $v^{(1)}$ prima offerta più alta,
2. $v^{(2)}$ seconda offerta più alta.

mentre R indica il ricavo atteso del venditore. La figura 78 illustra i tre casi possibili.

1. Nel caso della figura 78 (a) r ha un effetto nullo perchè ho almeno un compratore con valutazione maggiore di r che partecipa all'asta che si chiude a $v^{(2)}$ per cui si ha:

$$E[R] = E[v^{(2)}] \quad (494)$$

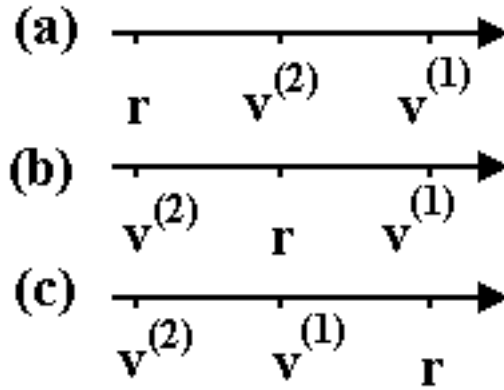


Figura 78: *Asta inglese con $r \neq 0$ (dettagli nel testo)*

2. Nel caso della figura 78 (b) entra un solo partecipante per cui si ha:

$$R = r > v^{(2)} \quad (495)$$

e quindi r ha un effetto positivo sul ricavo del venditore.

3. Nel caso della figura 78 (c) nessuno partecipa all'asta per cui il venditore ha un incasso pari a 0 invece di $v^{(2)}$ ovvero si ha:

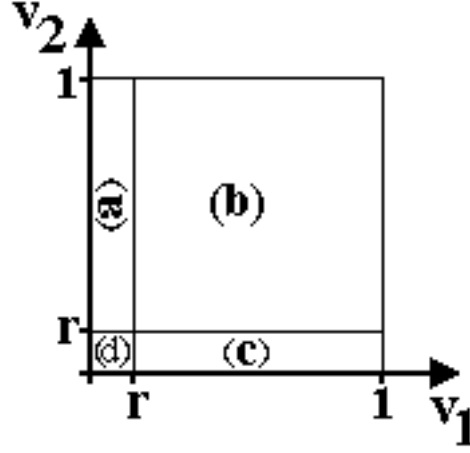
$$R = 0 < v^{(2)} \quad (496)$$

Ci si chiede: è una buona idea scegliere r ? Dipende dal confronto fra il secondo e il terzo dei casi suddetti. Se, per semplicità, si fissa:

1. $a = 0$ come la valutazione più bassa possibile,
2. $b = 1$ come la valutazione più alta possibile,
3. $n = 2$ ovvero due compratori,

ci si riporta alla situazione della figura 79. In tale figura si hanno i seguenti casi:

1. (a) e (c): sono casi in cui il ricavo vale $R = r - r^2$,
2. (b): è il caso (a) della figura 78 (ovvero $v_1 > r$ e $v_2 > r$) per cui r non ha effetto,

Figura 79: *Ricavi del venditore (dettagli nel testo)*

3. (d): è il caso (c) della figura 78 (ovvero $v_1 < r$ e $v_2 < r$) per cui r ha effetto negativo e il ricavo è $R = 0$.

Se valuto la probabilità associata alle aree della figura 79 ho che:

1. alle aree (a) e (c) sono associate le probabilità $F(r)(1 - F(r))$
2. all'area (d) è associata la probabilità $F^2(r)$

in modo che l'effetto positivo abbia una probabilità pari a $2F(r)(1 - F(r))$ e quello negativo pari a $F^2(r)$. Se r è piccolo $F^2(r)$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $F(r)$ per cui è inferiore a $2F(r)(1 - F(r))$ e quindi l'effetto positivo è superiore a quello negativo. Si può vedere quando è che:

$$2F(r)(1 - F(r)) > F^2(r) \quad (497)$$

ovvero

$$2(1 - F(r)) > F(r) \quad (498)$$

che vale se $F(r) < 2/3$.

Vediamo l'espressione del **ricavo atteso** del venditore nel caso generale di n compratori con identiche funzioni di distribuzione F . Si può scrivere:

$$E[R] = rP\{v^{(1)} > r > v^{(2)}\} + \int_r^b zd(F^n(z) + nF^{n-1}(z)(1 - F(z))) + F^n(r)0 \quad (499)$$

La (499) contiene i tre casi della figura 78 il terzo dei quali non dà contributo perchè per esso è $R = 0$. Il secondo addendo contiene il termine:

$$(F^n(z) + nF^{n-1}(z)(1 - F(z))) \quad (500)$$

che tiene conto del fatto che tutte le n offerte sono minori di z e che $n - 1$ sono minori e una maggiore e questa la posso scegliere in n modi diversi. Il termine $P\{v^{(1)} > r > v^{(2)}\}$ lo posso scrivere come:

$$nF^{n-1}(r)(1 - F(r)) \quad (501)$$

ovvero ho $n - 1$ offerte minori ed una maggiore che posso scegliere in n modi diversi. Sostituendo nella (499) e integrando per parti (usando la (500) come fattore differenziale) ottengo:

$$\begin{aligned} E[R] &= rnF^{n-1}(r)(1 - F(r)) + (z(F^n(z) + nF^{n-1}(z)(1 - F(z)))) \Big|_r^b \\ &\quad - \int_r^b (F^n(z) + nF^{n-1}(z)(1 - F(z))) dz \end{aligned} \quad (502)$$

ovvero (svolgendo i calcoli, con $b = 1$ $F(b) = F(1) = 1$ e semplificando):

$$E[R] = b - rF^n(r) - \int_r^b (F^n(z) + nF^{n-1}(z)(1 - F(z))) dz \quad (503)$$

Siccome voglio il massimo della (503) derivo rispetto a r ottenendo:

$$\frac{dE[R]}{dr} = -F^n(r) - rnF^{n-1}(r)f(r) + F^n(r) - F^{n-1}(r)(1 - F(r)) \quad (504)$$

(della parte con $\int$ rimane la funzione integranda valutata nell'estremo inferiore che dipende da r) e, infine, semplificando e raccogliendo:

$$\frac{dE[R]}{dr} = -nF^{n-1}(r)f(r)\left(r - \frac{1 - F(r)}{f(r)}\right) \quad (505)$$

ovvero una espressione analoga a quella che si ha nel caso di un solo compratore. Ponendo:

$$J(r) = r - \frac{1 - F(r)}{f(r)} \quad (506)$$

con $J(r)$ crescente per analogia al caso precedente di un compratore e considerando che $F(a) = F(0) = 0$ e $F(b) = F(1) = 1$ si ha:

$$J(a) = J(0) = -\frac{1}{f(a)} \quad (507)$$

$$J(b) = J(1) = 1 \quad (508)$$

Dato che $J(a) < 0$ e J è crescente il valore ottimo di $r > a$ è tale che $J(r) = 0$ (perchè così si annulla la (505)) ovvero ho le due condizioni:

1. $r \in (a, b)$,
2. r è l'unica soluzione della:

$$r - \frac{1 - F(r)}{f(r)} = 0 \quad (509)$$

Si noti che il più alto prezzo che non fa effetto è a .

Dato $a > 0$ e dato il prezzo di riserva ottimale $\hat{r} > 0$ ci si chiede:

Proposizione 8.1 $\forall [a, b]$ e per qualunque forma della funzione di distribuzione F è vero che il prezzo di riserva ottimale è sempre maggiore dell'offerta più bassa ovvero è sempre vero che:

$$\hat{r} > a? \quad (510)$$

Se la Proposizione 8.1 è vera allora il prezzo di riserva è sempre utile per il venditore. Si hanno casi in cui $\hat{r} = a$. Se, ad esempio, $[a, b] = [2, 3]$ (vedi la

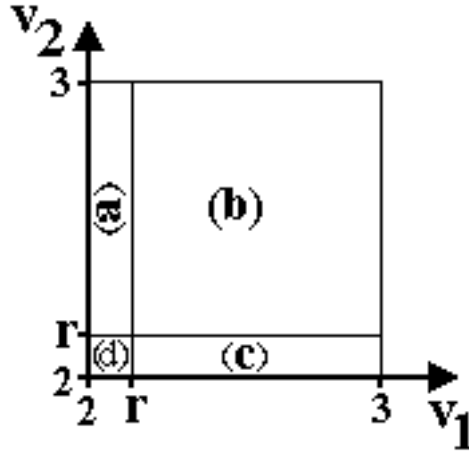


Figura 80: $\hat{r} = a$ (dettagli nel testo)

figura 80) e se $F(r)$ è uniforme su tale intervallo si ha cioè:

$$F(r) = r - 2 \quad (511)$$

per cui dalla (505) considerando che $f(r) = 1$ con semplici passaggi si ha:

$$\frac{dE[R]}{dr} = -n(r - 2)^{n-1}(2r - 3) \quad (512)$$

che si annulla solo in $r = 2$ ovvero il prezzo di riserva ottimale è $\hat{r} = 2$ per cui è inutile usarlo.

8.2.3 Asta di secondo prezzo con $r \neq 0$

Se v_i sono le valutazioni del bene da parte dei singoli offerenti e siamo nel caso di **truthful binding** ovvero ogni offerente fa una offerta pari alla propria valutazione ovvero $\forall i = 1, \dots, n$ è:

$$b_i(v_i) = v_i \quad (513)$$

si hanno i seguenti casi:

1. $v_i < r$, l'offerta non viene presa in considerazione e il giocatore i -esimo non partecipa all'asta,
2. $v_i \geq r$, il giocatore i partecipa e offre v_i .

Ogni giocatore ha una strategia debolmente dominante che è quella di offrire la propria valutazione. Per calcolare il valore atteso del ricavo del venditore, $E[R]$, si ripetono i calcoli già visti ovvero:

$$E[R] = rP\{v^{(1)} > r > v^{(2)}\} + rP\{v^{(1)} > v^{(2)} > r\} \quad (514)$$

dal momento che:

1. non si hanno offerte superiori a $v^{(1)}$,
2. se tutti offrono meno di r nessuno può partecipare all'asta e il ricavo è nullo.

Il ricavo atteso è come nel caso dell'Asta inglese per cui il prezzo di riserva ottimo è lo stesso.

8.2.4 Asta di primo prezzo con $r \neq 0$

Come negli altri casi, se un'offerta è inferiore a r non la si prende in considerazione e quindi ogni giocatore la cui valutazione è inferiore al prezzo di riserva non può partecipare all'asta. Si cerca, se esistono, **equilibri simmetrici**. La funzione di offerta di equilibrio è del tipo:

$$\beta(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v < r \\ (516) & \text{se } v \geq r \end{cases} \quad (515)$$

con ($z = v$):

$$F^{n-1}(z)'z - F^{n-1}(z)'\beta(z) + \beta'(z)F^{n-1}(z) \quad (516)$$

L'offerta minima è quella di chi ha una valutazione pari a r :

$$\beta(r) = r \quad (517)$$

dato che non può offrire meno (dato che non è permesso farlo) e non offre di più perchè non ha interesse a farlo.

Se si integra fra r e v la (516) si ottiene:

$$\int_r^v z dF^{n-1}(z) = (\beta(z)F^{n-1}(z)) \Big|_r^v = \beta(v)F^{n-1}(v) - rF^{n-1}(r) \quad (518)$$

essendo $\beta(r) = r$ in modo che sia:

$$r \frac{F^{n-1}(r)}{F^{n-1}(v)} = \frac{\int_r^v z dF^{n-1}(z)}{F^{n-1}(v)} = \beta^r(v) \quad (519)$$

con $\beta^r(v)$ notazione con cui si indica la funzione di offerta nel caso di un prezzo di riserva non nullo (ovvero $r \neq 0$). In assenza di prezzo di riserva

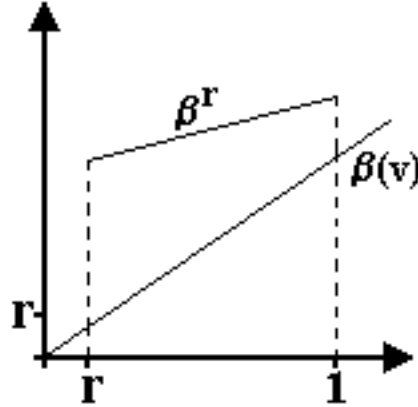


Figura 81: β e β^r (dettagli nel testo)

ovvero se $r = 0$ si ha (vedi la figura 81):

$$\beta(r) = \beta(v) = \frac{\int_r^v F^{n-1}(z) dz}{F^{n-1}(v)} \quad (520)$$

per cui è $\beta^r > \beta$ ma tale disuguaglianza si attenua al crescere di v (vedi la figura 81). In generale β^r non è definita per $v \in [0, r)$ oppure si può imporre che abbia un valore nullo.

Nota 8.4 *Tutti quelli con valutazione superiore a r offrono di più di r mentre quelli con valutazione inferiore a r non partecipano all'asta. Il ricavo atteso del venditore non cambia in questo caso rispetto ai casi visti in precedenza.*

9 Nona Lezione

9.1 Commenti sulle aste

Le aste:

1. asta di primo prezzo,
2. asta di secondo prezzo,
3. asta inglese

sono equivalenti perchè generano lo stesso ricavo atteso per il venditore a parità di prezzo di riserva r . Tutto ciò rispetta il principio in base al quale il confronto fra le aste viene fatto sulla base del ricavo atteso e considerando il punto di vista del venditore. Si vuole introdurre ora un tipo di **asta astratta** in modo da definire il modo migliore per vendere un certo bene ottenendo il massimo ricavo atteso. Il supporto teorico è il **principio di rivelazione**. Si considera un'asta generica A con un certo numero di partecipanti:

$$i = 1, \dots, n \quad (521)$$

nella quale S_i rappresenta l'insieme delle azioni possibili per il partecipante generico i che, per fare la propria offerta, sceglie un elemento in S_i .

9.1.1 Asta di primo prezzo

Si ha:

$$S_i = [0, +\infty) \quad (522)$$

e in più si ha una funzione esito:

$$g : \times_{i=1}^n S_i \longrightarrow E \quad (523)$$

con E che rappresenta l'insieme degli esiti e:

$$g(s) = (Y_1(s), \dots, Y_n(s), t_1(s), \dots, t_n(s)) \quad (524)$$

con:

1. $Y_1(s), \dots, Y_n(s), t_1(s), \dots, t_n(s) \in E$;
2. $s \in \times_{i=1}^n S_i$ profilo di azioni;
3. $Y_i(s)$ è la probabilità che il giocatore i vinca il bene se le azioni sono nel profilo s , si ha (per $i = 1, \dots, n$):

- (a) $Y_i \geq 0$,
- (b) $\sum_{i=1}^n Y_i(s) \leq 1$ ovvero esiste una probabilità non nulla che il venditore non riesca a vendere il bene;
- (c) $t_i(s)$ è la cifra che i paga in corrispondenza del profilo s .

Una [meta]strategia per il giocatore i è una funzione:

$$ms_i : \Theta_i \longrightarrow S_i \quad (525)$$

dove θ_i è l'insieme $[a, b]$ delle possibili valutazioni.

9.1.2 Asta di primo prezzo con ipotesi semplificative

Si introducono le seguenti ipotesi semplificative:

1. due giocatori ovvero $n = 2$ e $i = 1, 2$;
2. $S_1 = S_2 = [0, +\infty)$;
- 3.

$$Y_1(s) = \begin{cases} 1 & s_1 > s_2 \\ 0 & s_1 < s_2 \\ 1/2 & s_1 = s_2 \end{cases} \quad (526)$$

nel primo caso 1 offre più di 2, nel secondo 2 offre più di 1 e nel terzo offrono la stessa cifra per cui si lancia una moneta per stabilire chi dei due si aggiudica il bene;

4. $Y_2(s) = 1 - Y_1(s)$ ovvero Y_2 è il complemento di Y_1 e quindi, in modo duale al precedente si ha:

$$Y_2(s) = \begin{cases} 1 & s_2 > s_1 \\ 0 & s_2 < s_1 \\ 1/2 & s_2 = s_1 \end{cases} \quad (527)$$

Il pagamento eseguito da 1 lo scrivo come:

$$t_1(s) = \begin{cases} s_1 & s_1 > s_2 \\ 0 & s_1 < s_2 \\ 0 \text{ o } s_1 \text{ con } P = 1/2 & s_1 = s_2 \end{cases} \quad (528)$$

Voglio definire come predico l'esito in termini di ricavo atteso. All'asta A si associa un BNE $\hat{m}s$:

$$\hat{m}s = (\hat{m}s_1, \dots, \hat{m}s_n) \quad (529)$$

Dato l'equilibrio $\hat{m}s$ si associa al profilo delle valutazioni:

$$v = (v_1, \dots, v_n) \quad (530)$$

un profilo di azioni:

$$\hat{m}s(v) = (\hat{m}s_1(v_1), \dots, \hat{m}s_n(v_n)) \quad (531)$$

dove $\hat{m}s_1(v_i) \in S_i$ è il comportamento di i in funzione di v_i .

La $\hat{m}s_1(v_i) \in S_i$ è una azione giocata da i per cui se uso $\hat{m}s$ come argomento della g ottengo un esito:

$$g(\hat{m}s(v)) = h(v) \quad (532)$$

In questo modo si passa dalle **valutazioni** (v_i) alle **azioni** $(\hat{m}s_i)$ e, infine, agli **esiti** $g(\hat{m}s(v))$. La funzione:

$$h : \theta \longrightarrow E \quad (533)$$

dipende dal BNE essendo $\theta = [a, b]^n$ ed è definita come:

$$h(v) = (Y_1(v), \dots, Y_n(v), t_1(v), \dots, t_n(v)) \quad (534)$$

in cui:

1. i primi n termini a secondo membro sono le probabilità in funzione delle valutazioni definite su $[a, b]^n$, ogni profilo di valutazioni ha una probabilità;
2. i secondi n termini a secondo membro rappresentano i pagamenti dei giocatori in funzione delle valutazioni ovvero

$$t_i(v) = T_i(\hat{m}s(v)) \quad (535)$$

Esempio 9.1 *Si considera un'asta di primo prezzo con:*

1. $[a, b] = [0, 1]$,
2. $F(z) = z$ ovvero distribuzione uniforme su $[0, 1]$,
- 3.

$$\beta(v) = v - \frac{\int_0^v F(z)dz}{F(v)} = \frac{v}{2} \quad (536)$$

monotona crescente in v ;

4.

$$Y_1(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_1 > v_2 \\ 1/2 & \text{se } v_1 = v_2 \\ 0 & \text{se } v_1 < v_2 \end{cases} \quad (537)$$

5.

$$Y_2(v) = 1 - Y_1(v) \quad (538)$$

6. se l'offerta è $\beta(v)$ il pagamento di 1 è:

$$t_1(v) = \begin{cases} \frac{v_1}{2} & \text{se } v_1 > v_2 \\ \frac{v_1}{4} & \text{se } v_1 = v_2 \\ 0 & \text{se } v_1 < v_2 \end{cases} \quad (539)$$

in cui $\frac{v_1}{4}$ è il valore atteso $\frac{1}{2}\frac{v_1}{2} + \frac{1}{2}0$ che viene assunto con probabilità nulla dal momento che le v. a. che interessano sono continue e per v. a. x di questo tipo si ha $P(x = k) = 0$;

7. il pagamento di 2 ovvero $t_2(v)$ ha una struttura simile.

Data un'asta si ricava un equilibrio da cui si calcola la $h(v)$ con un certo esito se le valutazioni sono v . L'incasso è:

$$\sum_{i=1}^n t_i(v) \quad (540)$$

Si vuole un'asta di tipo astratto il cui esito coincida con quello dell'asta A dato che in un mondo ideale è facile definire l'asta ottimale mentre tale definizione non è agevole nel mondo reale.

9.1.3 Asta diretta D

Un'asta D si dice **diretta** se lo spazio delle azioni del giocatore i -esimo ($i = 1, \dots, n$) è tale che:

$$S_i = \theta_i = [a, b] \quad (541)$$

ovvero lo spazio delle azioni coincide con quello delle valutazioni: in questo caso i giocatori i non scelgono una offerta (e quindi il tempo massimo che permangono nell'asta) ma solo le proprie possibili valutazioni. Una **strategia** in D è una funzione definita come:

$$d_i : \theta_i \longrightarrow S_i \quad (542)$$

che, poichè $\theta_i = S_i$, posso scrivere come:

$$d_i : \theta_i \longrightarrow \theta_i \quad (543)$$

Nota 9.1 *Tutte le aste dirette sono uguali con $\theta_i = S_i$ e differiscono solo nelle funzioni di esito, ognuna delle quali identifica una particolare asta diretta. Se:*

$$g : \theta \longrightarrow E \quad (544)$$

è una funzione generica di esito, per l'asta diretta si ha:

$$g(v) = h(v) \quad (545)$$

dove $h(v)$ è l'esito all'equilibrio nell'asta generica A .

Per ogni tipo di un giocatore i si stabilisce come i gioca ovvero come sceglie uno dei suoi possibili tipi. In questo modo la funzione di esito:

$$g : \theta \longrightarrow E \quad (546)$$

la scrivo come:

$$\times_{i=1}^n S_i = \times_{i=1}^n \theta_i = \theta \quad (547)$$

Data un'asta A e un'equilibrio $\hat{m}s$, D_A è la seguente asta **diretta** con:

$$g(v) = h(v) \quad (548)$$

dove $g(v)$ è l'esito se i giocatori scelgono un profilo di valutazioni v mentre $h(v)$ rappresenta l'esito all'equilibrio nell'asta A . In D l'esito si ha quando ogni i sceglie come esito la propria valutazione (è a questo livello che si ha l'astrazione): l'equilibrio nell'asta A coincide con quello nell'asta D_A .

L'asta diretta D_A genera lo stesso esito dell'asta A dato un equilibrio fissato in A e pari a $\hat{m}s$. Se ogni giocatore i gioca:

$$d_i(v_i) = v_i \quad (549)$$

nel caso di **truthful binding** o **strategia veritiera** con:

$$d_i : \theta_i \longrightarrow \theta_i \quad (550)$$

l'asta D_A si dice compatibile con gli incentivi se ha un BNE veritiero ovvero se le strategie $d_i(v_i) = v_i$ costituiscono un BNE per l'asta diretta: in caso negativo non si può pensare di ottenere con l'asta diretta D_A lo stesso esito che si ha con l'asta A .

9.1.4 Principio di rivelazione

$\hat{m}s$ è un *BNE* di A e:

$$\{d_i(v_i) = v_i\}_{i=1}^n \quad (551)$$

sono un profilo di strategie in cui i giocatori scelgono le azioni che coincidono con la propria valutazione. Il profilo di strategie veritiere è di equilibrio ovvero è un *BNE* dell'asta diretta D_A e quindi D_A si dice **compatibile per incentivi** e soddisfa il vincolo *IC*.

Nota 9.2 *Per cercare un'asta ottimale ci si può restringere all'asta diretta D_A .*

Cerco un'asta diretta che massimizzi il ricavo atteso e la cerco fra quelle con **equilibrio veritiero**: tutti gli equilibri in aste qualunque sono riproducibili mediante equilibri veritieri in aste dirette.

Dimostrazione 9.1 (Dimostrazione del Principio di rivelazione) *Si parte da una condizione di equilibrio per una metastrategia $\hat{m}s$. Per l'asta A si ha:*

$$v_i E_{-i}[Y_i(\hat{m}s_i(v_i), \hat{m}s_{-i}(v_{-i}))] - E_{-i}[t_i(\hat{m}s_i(v_i), \hat{m}s_{-i}(v_{-i}))] \quad (552)$$

Nella (552) si lavora sui valori attesi degli altri giocatori:

1. *nel primo addendo compare v_i per la probabilità che i vinca se gioca la sua [meta]strategia di equilibrio e gli altri giocano la loro;*
2. *nel secondo addendo compare il pagamento di i se sceglie v_i mentre gli altri adottano la loro strategia di equilibrio.*

Siccome $\hat{m}s$ è un equilibrio giocare $\hat{m}s_i(v_i)$ è meglio che giocare qualsiasi altra cosa per cui se i segue la strategia s'_i la sua situazione è peggiore. Aggiungendo il secondo membro alla (552) si ottiene la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} v_i E_{-i}[Y_i(\hat{m}s_i(v_i), \hat{m}s_{-i}(v_{-i}))] - E_{-i}[t_i(\hat{m}s_i(v_i), \hat{m}s_{-i}(v_{-i}))] &\geq \\ v_i E_{-i}[Y_i(s'_i(v_i), \hat{m}s_{-i}(v_{-i}))] - E_{-i}[t_i(s'_i(v_i), \hat{m}s_{-i}(v_{-i}))] &\end{aligned} \quad (553)$$

nel caso dell'asta diretta D_A si lascia il lato sinistro della (553) invariato mentre nel lato destro si mette $\hat{m}s_i(v'_i)$ nei due valori attesi: ho ancora una relazione di $\geq$ fra le due valutazioni ma in una compare $\hat{m}s_i(v'_i)$ ovvero l'azione all'equilibrio per i se la sua valutazione è v'_i . Il primo membro rappresenta l'utilità attesa per i il cui tipo è v_i all'equilibrio $\hat{m}s$.

Nell'asta diretta D_A se tutti giocano:

$$d_i(v_i) = v_i \quad (554)$$

si ha che:

1. l'esito è lo stesso per costruzione,
2. l'utilità attesa è la stessa.

Ci si chiede: il giocatore i con tipo v_i può migliorare la propria utilità attesa all'equilibrio? Ovvero può scegliere:

$$d_i(v_i) = v'_i \quad (555)$$

in modo da avere una utilità attesa migliore?

Il giocatore i con valutazione v_i può deviare, nell'asta diretta D_A , solo scegliendo:

$$v'_i \neq v_i \quad (556)$$

in θ_i ovvero scegliendo una strategia non veritiera. Se i sceglie v'_i l'esito è lo stesso che si ha in A se si gioca non $\hat{m}s_i(v_i)$ ma $\hat{m}s_i(v'_i)$. Se i sceglie $v'_i \neq v_i$ ciò fa sì che in A i scelga $\hat{m}s_i(v'_i)$: in A se i gioca $\hat{m}s_i(v'_i)$ non stà meglio, per quanto visto prima, e la sua utilità attesa è minore in modo che il secondo membro della (553) è strettamente maggiore del primo che coincide con il primo della stessa relazione scritta per la D_A per cui al giocatore i non conviene deviare nell'asta D_A .

Nota 9.3 *Suppongo che esista un'asta ottimale (con un'equilibrio migliore di ogni altro) che produce un esito che possa essere scritto in funzione dei profili di valutazione. Tale esito lo si può ottenere come esito di un'asta D_A con equilibrio veritiero:*

$$g : \theta \longrightarrow E \quad (557)$$

Cerco, fra le aste dirette, quella che massimizza il ricavo atteso ovvero il valore atteso di:

$$\sum_i t_i \quad (558)$$

Per fare questo determino gli esiti che sono ottenibili come equilibri veritieri in un'asta diretta D_A . L'asta diretta D_A ha la funzione g come la h che si ha nel caso dell'asta A ovvero:

$$g(v) = (Y_1(v), \dots, Y_n(v), t_1(v), \dots, t_n(v)) \quad (559)$$

Le Y_i e t_i sono variabili strumentali ovvero sono $2n$ funzioni ciascuna definita su $[a, b]^n$. Voglio sapere quando è che si ha un equilibrio diretto. Al proposito si ha il seguente Lemma.

Lemma 9.1 (Commenti introduttivi) *Data la probabilità che i vinca dato il profilo di valutazioni v ($Y_i(v)$) si ha:*

$$\bar{Y}_i(v_i) = E_{-i}[Y_i(v)] \quad (560)$$

in cui:

1. *le $\bar{Y}_i$ sono funzioni della valutazione di i ovvero v_i ,*
2. *E_{-i} è il valore atteso delle valutazioni degli altri per cui rimane solo v_i ,*
3. *$\bar{Y}_i(v_i)$ è la probabilità di vittoria di i condizionata dalla sua valutazione.*

Si può scrivere:

$$\bar{t}_i[v_i] = E_{-i}[t_i(v)] \quad (561)$$

ovvero il pagamento di i condizionato dalla valutazione v_i è uguale al valore atteso per gli altri del pagamento condizionato dalla valutazione v .

Nota 9.4 *Il giocatore i pensa che tutti gli altri giocatori scelgano in modo veritiero. Se si prende E_{-i} si parte dal presupposto che gli altri scelgano come azione la loro valutazione (strategia veritiera).*

L'utilità di i se sceglie:

$$d_i(v_i) = v'_i \quad (562)$$

ovvero nel caso i non dica la verità ma dica v'_i è determinata dalla probabilità di vittoria:

$$\bar{Y}_i(v'_i) = E_{-i}[\bar{Y}_i(v')] \quad (563)$$

in modo che l'utilità la posso scrivere come:

$$v_i \bar{Y}_i(v'_i) - E_{-i}[v'_i] \quad (564)$$

Si ha un vincolo che traduce il fatto che dire la verità è meglio che non dirla:

$$v_i \bar{Y}_i(v_i) - E_{-i}[v_i] \geq v_i \bar{Y}_i(v'_i) - E_{-i}[v'_i] \quad (565)$$

$\forall v_i, v'_i$ e $\forall i$. Vediamo ora come devono essere fatte le $\bar{Y}_i$. Si ricorda che:

$$V_i(v_i) = v_i \bar{Y}_i(v_i) - E_{-i}[v_i] \quad (566)$$

rappresenta l'utilità per i quando dice la verità.

Lemma 9.2 (Corpo del lemma 9.1) *Si hanno i punti seguenti.*

1. Il vincolo IC per il giocatore i è soddisfatto sse:

$$\bar{t}_i(v_i) = v_i \bar{Y}_i - \int_a^{v_i} \bar{Y}_i(z) dz - v_i(a) \quad (567)$$

ovvero sse il pagamento di i è uguale al gradimento di i meno la probabilità che i vinca meno la probabilità di i con la valutazione più bassa di tutte. La $\bar{Y}_i()$ è crescente.

2. Un'asta diretta D_A è compatibile per incentivi (ovvero soddisfa il vincolo IC e quindi esiste per essa un equilibrio veritiero sse la (567) vale per tutti i giocatori ovvero $\forall i = 1, \dots, n$.

Un giocatore i partecipa all'asta se:

$$V_i(v_i) \geq 0 \quad (568)$$

e ciò deve valere $\forall v_i$ e $\forall i = 1, \dots, n$. Si scrive:

$$V_i(v_i) = \int_a^{v_i} \bar{Y}_i(z) dz + v_i(a) \geq v_i(a) \quad (569)$$

essendo:

$$\int_a^{v_i} \bar{Y}_i(z) dz > 0 \quad (570)$$

e ciò vale $\forall v_i > a$ ovvero per ogni valutazione superiore alla più bassa.

Ci si chiede: esiste un equilibrio veritiero per un'asta diretta D_A ?

Si ha:

$$v_i \bar{Y}_i(v_i) - \bar{t}_i(v_i) \quad (571)$$

$$\bar{t}_i(v_i) = v_i \bar{Y}_i(v_i) - \int_a^{v_i} \bar{Y}_i(z) dz \quad (572)$$

Le Y_i sono tali che le $\bar{Y}_i$ sono crescenti mentre le t_i sono tali da soddisfare la (572) per ogni giocatore i .

Nota 9.5 (Teorema di equivalenza dei ricavi (corollario Lemma 9.2))

Il ricavo atteso per il venditore nell'asta diretta D_A è:

$$E[R] = E\left[\sum_{i=1}^n t_i(v)\right] = E_1 E_{-1}[t_1(v)] + \dots + E_n E_{-n}[t_n(v)] = E_1[\bar{t}_1(v_1)] + \dots + E_n[\bar{t}_n(v_n)] \quad (573)$$

in cui $\bar{t}_i(v_i) = E_{-i}[t_i(v)]$ e le $\bar{t}_i(v_i)$ le ricavi come segue:

$$\bar{t}_i(v_i) = v_i \bar{Y}_i(v_i) - \int_a^{v_i} \bar{Y}_i(z) dz \quad (574)$$

Nota 9.6 *Nel Teorema di equivalenza dei ricavi si è applicata la legge delle aspettative iterate nella formulazione che segue:*

$$\begin{aligned} E[t_1, \dots, t_n] &= \int_{[a,b]} t_1(v) f(v_1) \dots f(v_n) dv \\ &= \int_{[a,b]} \int_{[a,b]^{n-1}} t_1(v) f(v_2) \dots f(v_n) dv f(v_1) dv_1 \end{aligned} \quad (575)$$

in cui si sfrutta l'indipendenza delle v.a. e l'integrale interno è il valore atteso con v_1 fissato.

Teorema 9.1 (Teorema di equivalenza dei ricavi RET) *In un'asta diretta D_A l'utilità attesa dei compratori e il ricavo atteso del venditore dipendono solo da:*

$$\{\bar{Y}_i(), v_i(a)\}_{i=1}^n \quad (576)$$

dal momento che i $\bar{t}_i$ dipendono dalle $\bar{Y}_i$ e dalle $v_i(a)$ perchè il vincolo di compatibilità con incentivi fissa i $\bar{t}_i$ in modo che i $V_i(v_i)$ dipendono da $\bar{Y}_i()$ e da $v_i(a)$.

Nota 9.7 *Due aste di tipo diretto con identici $\bar{Y}_i$ hanno lo stesso ricavo atteso e una stessa utilità per il venditore.*

9.1.5 Asta di primo prezzo e equilibrio $\beta(v)$

La β specifica una allocazione: vince il partecipante all'asta con la valutazione più alta. Quanto guadagna un compratore con la valutazione più bassa possibile? nulla, la sua utilità è pari a 0 ovvero:

$$v_i(a) = 0 \quad (577)$$

per cui esiste un'asta diretta con lo stesso esito e quindi con lo stesso ricavo atteso.

9.1.6 Asta di secondo prezzo

Vince che ha la valutazione più alta.

L'utilità del tipo di compratore con la valutazione più bassa possibile è pari a 0.

L'Asta di primo prezzo e l'Asta di secondo prezzo hanno la stessa funzione allocazione β e la stessa utilità per cui esiste un'Asta diretta D_A con lo stesso esito: si ha un'asta diretta per aste di primo e secondo prezzo con la stessa allocazione del bene (ovvero gli stessi valori per le Y_i e le $\bar{Y}_i$ e la stessa utilità per la valutazione più bassa $v_i(a)$ per cui per il Teorema di equivalenza dei ricavi tutti e tre i tipi di aste hanno lo stesso ricavo atteso.

9.1.7 Considerazioni generali e conclusive

Si ha che:

1. un'asta diretta configurata come asta di primo prezzo ha lo stesso ricavo atteso,
2. un'asta diretta configurata come asta di secondo prezzo ha lo stesso ricavo atteso.

Per un'asta inglese ho la stessa allocazione e, perciò, lo stesso ricavo atteso. Vediamo ora cosa accade in presenza di un prezzo di riserva r non nullo. Se r è uguale per un'asta di primo prezzo e una di secondo prezzo si ha lo stesso ricavo atteso. Si considera:

$$E_1 \bar{t}_1(v_1) = \int_a^b \bar{t}_1(v_1) f(v_1) dv_1 \quad (578)$$

in cui si sostituisce:

$$\bar{t}_1(v_1) = v_1 \bar{Y}_1(v_1) - \int_a^{v_1} \bar{Y}_1(z) dz - v_1(a) \quad (579)$$

Siccome si massimizza rispetto a Y_1 e si ha $v_1(a)$ decrescente si può porre $V_1(a) = 0$. Sostituendo la (579) nella (578) e integrando per parti si ha:

$$E_1 \bar{t}_1(v_1) = \int_a^b J(v_1) \bar{Y}_1(v_1) f(v_1) dv_1 = \int_{[a,b]^n} J(v_1) y_1(v) \prod_{j=1}^n f(v_j) dv_j \quad (580)$$

con:

$$\bar{Y}_1(v_1) = E_{-1}[Y_1(v)] = \int_{[a,b]^{n-1}} y_1 f(v_2) \dots f(v_n) dv_2 \dots dv_n \quad (581)$$

Se ripeto il ragionamento per le $v_2, \dots, v_n$ e le $Y_2, \dots, Y_n$ ottengo:

$$E[R] = \int_{[a,b]^n} (J(v_1)Y_1(v) + \dots + J(v_n)Y_n(v)) \prod_{j=1}^n f(v_j) dv_j \quad (582)$$

Si vuole il massimo con il vincolo che le $\bar{Y}_i$ siano crescenti. Con una tecnica ormai usuale si trascura tale vincolo supponendo che sia una condizione sufficiente per cui si sfrutta il fatto che la J è strettamente crescente e si massimizza punto per punto. Si fissa v . Si ha che:

$$Y_1(v) \dots Y_n(v) \quad (583)$$

è ottimo se è tale che:

$$Y_i(v) > 0 \Rightarrow J(v_i) \geq 0 \quad (584)$$

$$J(v_i) \geq J(v_h) \quad (585)$$

$\forall i \neq j$. Si hanno, pertanto, i casi seguenti:

1. se il più grande dei J è positivo do peso 1 alla i ,
2. se il più grande dei J è negativo do peso 0 a tutte.

Dato che Y_i è la probabilità di vittoria del giocatore i e J è strettamente crescente in modo che:

$$J(v_i) \geq J(v_h) \quad (586)$$

la posso scrivere in modo equivalente come:

$$v_i \geq v_h \quad (587)$$

Per la $J(v_i) \geq 0$ ho che:

1. J è strettamente crescente,
2. $J(a) \geq 0$

per cui la $J(v_i) \geq 0$ è sempre vera. Se $J(a) < 0$ allora esiste un solo $\hat{v}$ tale che $J(\hat{v}) = 0$: se $J(a) < 0$ dato che $J(b) > 0$ ed essendo J continua esiste un punto in cui la J assume valore nullo per cui invece di $J(v_i) \geq 0$ posso scrivere $v_i \geq \hat{v}$ con $\hat{v}$ che dipende da J . Si noti che $\hat{v}$ può coincidere con a .

Il valore ottimale è tale che $Y_i(v) = 1$ se $v_i \geq \hat{v}$ e $v_i > v_j \forall i \neq j$. Si dice che $\bar{Y}_i$ prende $\bar{t}$ in v_j . Se v_i cresce aumenta $\bar{Y}_i$ perchè l'insieme dei v_i che soddisfa la condizione diventa più grande per cui $\bar{Y}_i$ è crescente e l'asta ottima è quella ricavata.

Per verificare se l'asta di primo prezzo è ottima si deve vedere se implementa o no l'allocazione trovata: in caso affermativo è ottima, in caso negativo non lo è.

L'asta di primo prezzo non si cura di $v_i \geq \hat{v}$ ma si limita ad asserire che i vince se $v_i > v_j \forall j \neq i$. Se $\hat{v} = a$ $v_i \geq \hat{v} = a \forall i$. Si hanno i due casi:

1. $\hat{v} = a$ se $J(a) \geq 0$ e $J(v_i) > 0$ sempre;
2. $\hat{v} > a$ se $J(a) < 0$ e $J(v_i) > 0$ sempre

Lo stesso vale sia per l'asta di secondo prezzo sia per l'asta inglese. Ci si chiede: come si può cambiare l'asta di primo prezzo? Il valore $\hat{v}$ deriva dall'asta ottimale ovvero dall'asta diretta. Se come prezzo di riserva prendo $r = \hat{v}$ tutti quelli con una valutazione inferiore sono esclusi dall'asta. L'asta di primo prezzo è ottima perchè produce l'allocazione:

$$Y_i(v) = 1 \quad (588)$$

se $v_i \geq \hat{v}$ e $v_i > v_j \ \forall j \neq i$.

Lo stesso vale sia per l'asta di secondo prezzo sia per l'asta inglese. L'asta ottimale è l'asta di primo prezzo con prezzo di riserva ottimale.

Riferimenti bibliografici

- [Gib92] Robert Gibbons. *Game theory for applied economists*. Princeton University Press, 1992.
- [MCWG95] A. Mas-Colell, M.D. Whinston, and J.R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.