

Note di topologia

Lorenzo Cioni

Dottorato di Ricerca in Matematica per le Decisioni Economiche

a.a. 2004/2005

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa

e-mail: lcioni@di.unipi.it

Sommario

Questi appunti contengono un sunto delle lezioni di Topologia tenute dal Professor Gori nei mesi di Marzo e Aprile del 2005 nell'ambito dei corsi del primo anno del Dottorato di Ricerca in *Matematica per le Decisioni Economiche*, sunto integrato da osservazioni ed aggiunte personali.

Le integrazioni sono tratte, per la maggior parte, da un testo ormai introvabile (almeno in versione italiana) **General Topology** di Seymour Lipshutz ([Lip65]) e dagli altri testi citati nei Riferimenti Bibliografici. Ovviamente *all errors are mine*.

Attenzione: versione preliminare e da rivedere

Ultima revisione: 22 Dicembre 2005

Indice

1	Introduzione	6
2	Insiemi e relazioni	6
2.1	Insiemi	6
2.2	Relazioni	9
3	Funzioni	11
3.1	Funzioni di insieme e a valori reali	14
4	Cardinalità e ordine	16
4.1	Insiemi parzialmente ordinati	19
4.2	Estremi inferiori e superiori	21
5	Elementi di topologia: topologia su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{R}^2$	23
5.1	$\mathbb{R}$	23
5.2	$\mathbb{R}^2$ (cenni alla topologia del piano)	33
6	Prima Lezione	36
6.1	Concetti di intorno, insieme aperto e spazio metrico	37
6.2	Funzioni fra spazi metrici	39
7	Seconda Lezione	42
7.1	Spazi topologici	42
7.2	Chiusura e interno	49
7.3	Caratterizzazione dei punti	52
8	Terza Lezione	56
8.1	Continuità	59
8.2	Successioni e convergenza	61
9	Quarta Lezione	64
9.1	Primo contabile	65
9.2	Topologie e basi	69
9.3	Secondo contabile e spazi topologici separabili	72
10	Quinta Lezione	76
10.1	Topologia indotta	76
10.2	Assiomi di separazione	80
10.3	Spazi topologici connessi	94
10.4	Omeomorfismo	106

11 Sesta Lezione	115
11.1 Ancora sugli spazi compatti	115
11.2 Spazi compatti, proprietà	115
11.3 Topologia prodotto	125
11.4 Proprietà topologiche di spazi metrici completi	128
11.5 Ultimi argomenti	135
A Appendice	139
A.1 Spazi topologici , da [Lan83]	139
A.2 Esempi ed Esercizi 1, da [Lip65], capitoli 5, 6, 7, 8 e 9	161
A.2.1 Spazi topologici: prime definizioni e caratterizzazione dei punti	161
A.2.2 Spazi topologici: basi e sottobasi	185
A.2.3 Spazi topologici: funzioni continue fra spazi topologici .	192
A.2.4 Spazi metrici e normati. Primo e secondo contabile . .	203
A.3 Richiami di topologia degli insiemi , da [ST80]	212
A.4 Cenni agli assiomi di separazione , da [ST80]	234
A.5 Esempi ed Esercizi 2, da [Lip65], capitoli 10, 11, 12 e 13	247
A.5.1 Spazi topologici: richiami di teoria	247
A.5.2 Spazi topologici: assiomi di separazione	251
A.5.3 Spazi topologici: compattezza, richiami di teoria	259
A.5.4 Spazi topologici: compattezza, esercizi ed esempi	263
A.5.5 Spazi topologici: spazi prodotto, teoria ed esercizi . . .	273
A.5.6 Spazi topologici: spazi connessi, teoria ed esercizi . . .	274
A.6 Esercizi, Prof. Gori	290
A.7 Esercizi aggiunti	317
Riferimenti Bibliografici	323
Index	324

Elenco delle figure

1	<i>Ordinamenti (dettagli nel testo)</i>	20
2	<i>inf</i> e <i>sup</i> (dettagli nel testo)	22
3	<i>Retta $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)</i>	24
4	<i>Insiemi aperti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)</i>	24
5	<i>Funzioni continue (dettagli nel testo)</i>	31
6	<i>Topologia in $\mathbb{R}^2$ (dettagli nel testo)</i>	33
7	<i>Intersezione di dischi (dettagli nel testo)</i>	34
8	<i>Esempi di intorni con diverse metriche</i>	37
9	<i>Punti interni, esterni e di frontiera</i>	38
10	<i>Continuità di funzioni</i>	40
11	<i>Intorno (dettagli nel testo)</i>	45
12	<i>Intorni un punto (dettagli nel testo)</i>	51
13	<i>Intorno nel caso di insiemi aperti, dettagli nel testo</i>	52
14	<i>Intorni su $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)</i>	54
15	<i>Intorni aperti di x su $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)</i>	55
16	<i>Funzioni fra spazi topologici (dettagli nel testo)</i>	59
17	<i>Sistema fondamentale di intorni (dettagli nel testo)</i>	62
18	<i>Sistema fondamentale di intorni (dettagli nel testo)</i>	64
19	<i>Continuità per successioni (dettagli nel testo)</i>	67
20	<i>Ricoprimenti (dettagli nel testo)</i>	71
21	<i>Elementi di una topologia su $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)</i>	71
22	<i>Aperti e topologia indotta (dettagli nel testo)</i>	76
23	<i>Separabilità (dettagli nel testo)</i>	77
24	<i>Intorni e copertura in $\mathbb{R}^2$ (dettagli nel testo)</i>	79
25	<i>Assiomi di separazione (1) (dettagli nel testo)</i>	80
26	<i>Spazi T_2 (dettagli nel testo)</i>	82
27	<i>Spazi T_3 (dettagli nel testo)</i>	83
28	<i>Spazi T_4 (dettagli nel testo)</i>	84
29	<i>Uno spazio metrico è uno spazio normale (dettagli nel testo)</i> .	86
30	<i>Dimostrazione del teorema (dettagli nel testo)</i>	87
31	<i>Dimostrazione del teorema (dettagli nel testo)</i>	88
32	<i>Intorni, immagini e controimmagini (dettagli nel testo)</i>	89
33	<i>Lemma di Urysohn (dettagli nel testo)</i>	90
34	<i>Ancora sugli intorni (dettagli nel testo)</i>	92
35	<i>Connettività per archi (dettagli nel testo)</i>	96
36	<i>Intervalli e connettività (dettagli nel testo)</i>	98
37	<i>Intervalli e connesività (dettagli nel testo)</i>	99
38	<i>Intervalli (dettagli nel testo)</i>	100
39	<i>Connessione per archi (dettagli nel testo)</i>	101

40	<i>Esempio di insieme connesso (dettagli nel testo)</i>	102
41	<i>Funzioni continue e connessività (dettagli nel testo)</i>	104
42	<i>Ancora su funzioni continue e connessività (dettagli nel testo)</i>	105
43	<i>Funzioni invertibili e non (dettagli nel testo)</i>	107
44	<i>Compatto e ricoprimento (dettagli nel testo)</i>	108
45	<i>Ancora sugli insiemi compatti (dettagli nel testo)</i>	112
46	<i>Ancora sugli insiemi chiusi e disgiunti (dettagli nel testo)</i>	113
47	<i>Sulle successioni (dettagli nel testo)</i>	116
48	<i>Compattificazione e $\mathbb{R}^2$ (dettagli nel testo)</i>	119
49	<i>Compattificazione e $\mathbb{R}^3$ (dettagli nel testo)</i>	120
50	<i>Dettagli nel testo</i>	122
51	<i>Separazione (dettagli nel testo)</i>	123
52	<i>Topologia prodotto (dettagli nel testo)</i>	126
53	<i>Ancora sulla topologia prodotto (dettagli nel testo)</i>	127
54	<i>Funzioni e topologia prodotto (dettagli nel testo)</i>	128
55	<i>Funzioni e topologia prodotto (dettagli nel testo)</i>	129
56	<i>Spazi metrici completi e no (dettagli nel testo)</i>	130
57	<i>Spazi metrici completi e no (dettagli nel testo)</i>	131
58	<i>Spazi metrici completi e no (dettagli nel testo)</i>	132
59	<i>Spazi topologici e spazi metrici (dettagli nel testo)</i>	135
60	<i>Spazi topologici e spazi metrici (dettagli nel testo)</i>	136
61	<i>Proiezioni (dettagli nel testo)</i>	233
62	<i>Esempio (dettagli nel testo)</i>	242

1 Introduzione

Il presente lavoro si compone di tre parti:

1. la prima che copre i capitoli da 2 a 5,
2. la seconda che copre i restanti capitoli,
3. la terza composta dall'appendice.

Nella prima parte vengono richiamate un certo numero di nozioni di base relative ai seguenti concetti:

1. insiemi e relazioni,
2. funzioni,
3. cardinalità di insiemi e insiemi ordinati,
4. elementi di topologia della retta ($\mathbb{R}$) e del piano ($\mathbb{R}^2$),

in modo molto succinto. Per approfondimenti ed esempi si rimanda a [Lip65]. Lo scopo è quello di presentare in modo chiaro sia pure sintetico i concetti principali che saranno usati nei capitoli della seconda parte, uno per ognuna delle lezioni tenute dal Prof. Gori (vedi l'*Indice*). L'Appendice che costituisce la terza parte, infine, contiene un certo numero sezioni con esercizi svolti ed esempi discussi e alcune sezioni con approfondimenti delle parti di teoria.

2 Insiemi e relazioni

2.1 Insiemi

Un insieme A è una collezione di oggetti p dotata di un predicato di appartenenza (denotato con il simbolo $\in$) e del predicato duale di non appartenenza (denotato con il simbolo $\notin$) che permettono di stabilire se un elemento appartiene ($p \in A$) o no ($p \notin A$) ad un insieme. Un insieme si dice *finito* se contiene un numero finito di elementi, *infinito* se ne contiene un numero infinito e *singoletto* se contiene un solo elemento. Un insieme che contiene un numero di elementi che può essere numerato utilizzando i numeri naturali $\mathcal{N}$ (o un loro sottoinsieme) si dice *infinito numerabile* o semplicemente *numerabile*.

Anche se gli insiemi sono definibili in vari modi noi ci limiteremo ai seguenti due:

1. elencazione degli elementi che appartengono all'insieme (necessariamente questo deve essere un insieme finito),
2. descrizione delle proprietà definitive degli elementi dell'insieme che può essere sia finito sia infinito.

Dalla definizione segue facilmente che due insiemi A e B sono uguali ($A = B$) se e solo se contengono gli stessi elementi. La dimostrazione formale della uguaglianza richiede che si dimostri che il primo insieme è contenuto nel secondo ($A \subset B$) (ovvero ogni elemento del primo è elemento del secondo) e, allo stesso tempo, il secondo è contenuto nel primo ($B \subset A$).

Dati due insiemi A e B tali che ($A \subset B$) si dice che A è sottoinsieme di B che, a sua volta, è soprainsieme di A . La negazione di tale proprietà la si esprime con ($A \not\subset B$) in modo da indicare che c'è almeno un elemento $x \in A$ tale che $x \notin B$. Oltre agli insiemi generici è necessario introdurre due insiemi *speciali* ovvero:

1. l'insieme che non contiene alcun elemento o insieme vuoto, denotato con $\emptyset$;
2. l'insieme che contiene tutti gli elementi del nostro mondo detto *insieme universale* o *universo* e denotato con U o X o con altro simbolo dipendente dal contesto.

Definiti tali insiemi è ovvio che per un qualunque insieme $A \neq U$ e $A \neq \emptyset$ valgono le relazioni di inclusione seguenti:

$$\emptyset \subset A \subset U \quad (1)$$

L'insieme vuoto permette di caratterizzare insiemi la cui proprietà di definizione non è soddisfatta da alcun elemento mentre, dualmente, l'insieme universale permette di caratterizzare insiemi la cui proprietà di definizione è soddisfatta da ogni elemento.

Sugli insiemi così caratterizzati è possibile definire le seguenti operazioni:

1. *unione* come l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi coinvolti, nel caso di due insiemi A e B si ha $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$
2. *intersezione* come l'insieme di tutti gli elementi che appartengono a tutti gli insiemi coinvolti, nel caso di due insiemi A e B si ha $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

3. *differenza o complemento relativo* fra due insiemi A e B come l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad A ma non a B ovvero $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
4. *complemento o complemento assoluto* fra un insieme A e l'universo U come l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad U ma non a A ovvero $A^C = \{x : x \in U \text{ e } x \notin A\}$

Le definizioni di *unione* e *intersezione* sono facilmente estendibili ad un numero di insiemi superiore a due. Se due insiemi A e B sono tali che $A \cap B = \emptyset$ li si dice *disgiunti*. Una famiglia di insiemi è una famiglia disgiunta se i suoi insiemi sono disgiunti a coppie. Le definizioni suddette (e le relative proprietà che enunceremo a breve) hanno una rappresentazione grafica nota come *diagrammi di Venn* cui faremo ricorso nel seguito, qualora necessaria, senza definirla ulteriormente rimandando a [Lip65] per dettagli. Le operazioni appena introdotte godono di alcune proprietà che vengono elencate qui di seguito ([Lip65]):

1. *idempotenza* dell'unione ($A \cup A = A$) e dell'intersezione ($A \cap A = A$),
2. *associatività* dell'unione e dell'intersezione,
3. *commutatività* dell'unione e dell'intersezione,
4. *distributività* dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione,
5. *identità*:
 - (a) $A \cup \emptyset = A$
 - (b) $A \cup U = U$
 - (c) $A \cap U = A$
 - (d) $A \cap \emptyset = \emptyset$
6. *leggi del complemento*:
 - (a) $A \cup A^C = U$
 - (b) $A \cap A^C = \emptyset$
 - (c) $(A^C)^C = A$
 - (d) $U^C = \emptyset$
 - (e) $\emptyset^C = U$

7. leggi di De Morgan:

$$(a) \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(b) \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

2.2 Relazioni

Prima di definire il concetto di *relazione* è necessario introdurre il concetto di *insieme prodotto*. Dati due insiemi A e B si definisce il loro *insieme prodotto* $A \times B$ come un insieme di coppie ordinate:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}. \quad (2)$$

Se $A = B$ l'*insieme prodotto* lo si indica con A^2 . È immediato estendere l'*insieme prodotto* a n insiemi ($A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$) nel qual caso si parla di n -uple ordinate di elementi, uno per ognuno degli insiemi coinvolti nel prodotto.

Definito l'insieme prodotto si può definire il concetto di *relazione binaria* $\mathcal{R}$ da un insieme A ad un insieme B come un sottoinsieme di $A \times B$.

Definizione 2.1 (Relazione binaria) Una **relazione binaria** $\mathcal{R}$ da un insieme A ad un insieme B è tale che per ogni coppia $(a, b) \in A \times B$ solo una delle due proposizioni seguenti è vera:

1. $a\mathcal{R}b$ se a è in relazione $\mathcal{R}$ con b ,
2. $a\not\mathcal{R}b$ se a non è in relazione $\mathcal{R}$ con b .

Una relazione binaria, pertanto, è definita come:

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\} \quad (3)$$

dove a e b sono tali che per essi vale la $a\mathcal{R}b$.

Se $A = B$ la relazione $\mathcal{R}$ è detta *relazione su* A .

Definizione 2.2 (Dominio e codominio) Data una relazione $\mathcal{R}$ da A a B si definiscono:

1. il dominio di $\mathcal{R}$ come $\{a : (a, b) \in \mathcal{R}\}$
2. il codominio di $\mathcal{R}$ come $\{b : (a, b) \in \mathcal{R}\}$

Definizione 2.3 (Relazione inversa) Data una relazione $\mathcal{R}$ da A a B è sempre possibile definire la **relazione inversa** $\mathcal{R}^{-1}$ da B ad A :

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B \text{ e } a \in A\} \quad (4)$$

semplicemente scambiando di posto gli elementi nelle coppie che appartengono alla relazione $\mathcal{R}$.

Definizione 2.4 (Relazione identica) Abbiamo visto che è possibile definire una relazione $\mathcal{R}$ da A ad A (detta **su A**) ovvero in modo che entrambi gli elementi di una coppia $(a, b) \in \mathcal{R}$ siano elementi di A . Qualora gli elementi della coppia siano fra loro uguali si parla di *relazione identica* o *identità* e la si indica con Δ :

$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\} \quad (5)$$

Una relazione $\mathcal{R}$ **su A** è caratterizzabile in base alle sue proprietà ovvero ai modi in cui “raggruppa” gli elementi dell’insieme A su cui è definita. Sebbene a noi interessino essenzialmente le *relazioni di equivalenza*, prima di definirle elencheremo brevemente le proprietà che possono caratterizzare una generica relazione $\mathcal{R}$ ([Ayr65]):

1. **riflessività**: $\mathcal{R}$ è riflessiva se $\forall a \in A \ a\mathcal{R}a$,
2. **simmetria**: $\mathcal{R}$ è simmetrica se $\forall a, b \in A \ a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$,
3. **antisimmetria**: $\mathcal{R}$ è antisimmetrica se $\forall a, b \in A \ a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$ sse $a = b$,
4. **transitività**: $\mathcal{R}$ è transitiva se $\forall a, b, c \in A \ a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Definizione 2.5 (Relazione di equivalenza) Una relazione $\mathcal{R}$ su un insieme A è una **relazione di equivalenza** se gode delle seguenti proprietà:

1. **riflessività**,
2. **simmetria**,
3. **transitività**.

Definizione 2.6 (Classi di equivalenza ed insieme quoziente) Una relazione $\mathcal{R}$ di equivalenza su un insieme A definisce un certo numero di **classi di equivalenza** degli elementi dell’insieme A . Dato $a \in A$ la relativa classe di equivalenza (che può essere anche vuota) la si denota con $[a]$ e la si definisce come segue:

$$[a] = \{x \mid (a, x) \in \mathcal{R}\} \quad (6)$$

Definite le classi di equivalenza dell'insieme A si definisce il relativo **insieme quoziente** indotto su A da $\mathcal{R}$ come:

$$A/\mathcal{R} = \{[a] : a \in A\} \quad (7)$$

Data la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su A e la classe di equivalenza $[a]$ di $a \in A$ l'insieme quoziente $A/\mathcal{R}$ (che rappresenta una partizione di A) gode delle seguenti proprietà:

1. $\forall a \in A, a \in [a]$,
2. $[a] = [b]$ sse $(a, b) \in \mathcal{R}$
3. se $[a] \neq [b]$ allora $[a]$ e $[b]$ sono classi di equivalenza disgiunte.

Definizione 2.7 (Composizione di relazioni) Date due relazioni:

1. U da A a B ,
2. V da B a C

si può definire una relazione composta da A a C come caratterizzata dalle coppie $(a, c) \in A \times C$ tali che $\exists b \in B$ con la proprietà che $(a, b) \in U$ e $(b, c) \in V$. La relazione così definita si chiama **composizione di U e V** e la si indica come $V \circ U$. In modo formale si ha:

$$V \circ U = \{(x, y) : x \in A, y \in C; \exists b \in B : (x, b) \in U \text{ e } (b, y) \in V\} \quad (8)$$

3 Funzioni

Dati due insiemi A e B si dice che fra di essi esiste una funzione f e si scrive:

$$f : A \longrightarrow B \quad (9)$$

se ad ogni elemento di A viene assegnato al più un solo elemento di B ovvero se:

$$\forall a \in A \exists b \in B : b = f(a) \quad (10)$$

Gli insiemi A e B sono detti, rispettivamente, *dominio* e *codominio* della funzione f mentre il valore di $f(a)$ lo si dice immagine di a sotto f . Le funzioni sono casi particolari di relazioni dato che ad ogni funzione:

$$f : A \longrightarrow B \quad (11)$$

corrisponde una relazione $\mathcal{R}$ in $A \times B$ definita come $\{(a, f(a)) : a \in A\}$ con il vincolo che non possono esserci più coppie con lo stesso primo elemento. La relazione associata alla funzione viene detta *grafico della funzione* mentre l'insieme $f(A)$ rappresenta l'insieme (o *range*) dei valori che possono essere assunti dalla funzione f ovvero l'insieme delle *immagini* della f .

Definizione 3.1 (Uguaglianza fra funzioni) *Due funzioni f e g definite fra gli stessi insiemi A e B sono uguali (e si scrive $f = g$) sse vale la relazione $f(a) = g(a) \forall a \in A$. Due funzioni uguali hanno lo stesso grafico.*

Esempio 3.1 *Esempi di funzioni semplici sono i seguenti:*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} f(x) = x^3 \quad (12)$$

$$f : A \longrightarrow B : \forall x \in A f(x) = b_0 \text{ con } b_0 \text{ valore costante in } B. \quad (13)$$

Definizione 3.2 (Composizione di funzioni) *Date due funzioni:*

$$f : A \longrightarrow B \quad (14)$$

e:

$$g : B \longrightarrow C \quad (15)$$

si può definire una funzione composta che associa valori in A a valori in C come il **prodotto** o la **composizione** di f e g . La composizione è indicata con la notazione $g \circ f$ e la si definisce come segue:

$$g \circ f = g(f(a)) \quad (16)$$

con $a \in A$. Operativamente preso a in A si applica prima la f e poi, sul valore ottenuto, la g .

Le funzioni oltre ad essere composte possono essere *ristrette* se le si prende su un sottoinsieme del dominio oppure *estese* se le si considera su un sovrainsieme dello stesso.

Definizione 3.3 (Proprietà delle funzioni) *Una funzione:*

$$f : A \longrightarrow B \quad (17)$$

si dice **iniettiva** (oppure **uno-a-uno**) se elementi distinti di A hanno immagini distinte in B ovvero se immagini uguali derivano da elementi uguali (e quindi $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$).

Una funzione

$$f : A \longrightarrow B \quad (18)$$

si dice **surgettiva** oppure **su** se ogni elemento di B è immagine di un qualche elemento di A ovvero se $f(A) = B$. In questo caso comunque si prenda $b \in B$ si può trovare un elemento $a \in A$ tale che $b = f(a)$.

Una funzione f che è sia iniettiva sia surgettiva la si dice una **corrispondenza biunivoca** ovvero una **biiezione** se ad essa si può associare la funzione inversa:

$$f^{-1} : B \longrightarrow A \quad (19)$$

definita in modo che $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$, dove id_A e id_B sono le **funzioni identità** su A e B , rispettivamente. La funzione identità su un insieme A è definita come segue:

$$\forall a \in A \quad id_A(a) = a \quad (20)$$

Se, viceversa, date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$, si ha che:

1. $g \circ f = id_A$ e
2. $f \circ g = id_B$

allora la funzione f è invertibile e la sua inversa è la g . Lo stesso dicasi per la g la cui inversa è la f .

Altri concetti di uso frequente in topologia sono gli *insiemi indicati* e i relativi prodotti cartesiani. Dato un insieme $I \subset \mathbb{N}$ si definisce una famiglia di insiemi indicati nel modo seguente:

$$\{A_i : i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I} \quad (21)$$

dove gli insiemi A_i sono individuati dagli elementi di un insieme I detto *insieme indice* o *degli indici* mentre ogni $i \in I$ è detto *indice*. Se I è un sottoinsieme di elementi contigui di $\mathbb{N}$ si parla degli insiemi $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$ come di una sequenza di insiemi.

Definita la classe $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ si definisce il *prodotto cartesiano* come:

$$\prod \{A_i : i \in I\} = \prod_{i \in I} A_i \quad (22)$$

Il prodotto cartesiano definisce l'insieme di tutte le funzioni:

$$p : I \longrightarrow \cup_i A_i \quad (23)$$

tali che:

$$p(i) = a_i \in A_i \quad (24)$$

Gli insiemi indice I possono essere usati per estendere le definizioni delle operazioni $\cup$ e $\cap$ a un numero qualunque di insiemi.

Se si ha la classe $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ si definiscono:

$$\cup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I : x \in A_i\} \quad (25)$$

$$\cap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I : x \in A_i\} \quad (26)$$

e tali definizioni sono valide quale che sia I e, quindi, anche nel caso in cui sia $I = \mathbb{N}$.

Anche per tali *operazioni estese* valgono la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione, dell'intersezione rispetto all'unione e le leggi di De Morgan.

Se l'insieme degli indici è l'insieme vuoto (ovvero se $I = \emptyset$) si definiscono:

$$\cup_{i \in I} A_i = \emptyset \quad (27)$$

$$\cap_{i \in I} A_i = U \quad (28)$$

dove U indica l'insieme universale.

3.1 Funzioni di insieme e a valori reali

Si abbia una funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (29)$$

con due insiemi $A \in X$ e $B \in Y$. Si definisce *immagine di A* come l'insieme $f[A] \subset Y$ dei trasformati, mediante la f , dei punti di A mentre si definisce *immagine inversa di B* l'insieme dei trasformati di punti di B mediante una nuova funzione f^{-1} ovvero $f^{-1}[B] \subset A$.

In modo formale si ha:

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\} \quad (30)$$

$$f^{-1}[B] = \{x : x \in X, f(x) \in B\} \quad (31)$$

La funzione f^{-1} non rappresenta in generale l'inversa della f (per cui la loro composizione non necessariamente dà luogo alla funzione identità) e viene detta *funzione di insieme inversa* oppure *relazione inversa*.

Esempio 3.2 La funzione $f(x) = x^2$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ non è invertibile. Se ho $A = [1, 2]$ ho $f[A] = [1, 4]$. Nonostante non possa definire l'inversa posso usare la (31) per ricavare $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$ in modo che $f^{-1} \circ f[1, 2] = [-2, -1] \cup [1, 2] \neq [1, 2]$. Le funzioni f e f^{-1} sono dette *funzioni di insieme* e godono di alcune proprietà molto utilizzate in topologia.

Date le funzioni:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (32)$$

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X \quad (33)$$

e dati due insiemi $A \in X$ e $B \in Y$ valgono le proprietà enunciate senza dimostrazione nelle definizioni seguenti.

Definizione 3.4 *La f gode delle seguenti proprietà in combinazione con gli operatori logici $\cup$, $\cap$, $\setminus$ e alle classi indiciate $\{A_i\}$:*

1. $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$,
2. $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$,
3. $f[A \setminus B] \supset f[A] \setminus f[B]$,
4. $A \subset B \Rightarrow f[A] \subset f[B]$,
5. $f[\cup_i A_i] = \cup_i f[A_i]$,
6. $f[\cap_i A_i] \subset \cap_i f[A_i]$.

Definizione 3.5 *In modo analogo la f^{-1} gode delle seguenti proprietà in combinazione con gli operatori logici $\cup$, $\cap$, $\setminus$ e alle classi indiciate $\{A_i\}$:*

1. $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,
2. $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$,
3. $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$,
4. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}[A] \subset f^{-1}[B]$,
5. $f^{-1}[\cup_i A_i] = \cup_i f^{-1}[A_i]$,
6. $f^{-1}[\cap_i A_i] = \cap_i f^{-1}[A_i]$.

Dalla definizione delle f e f^{-1} segue facilmente che $f^{-1}(Y) = X$ e che:

1. $A \subset f^{-1} \circ f[A]$
2. $B \supset f \circ f^{-1}[B]$

Se la f è invertibile le relazioni suddette sono valide con $=$.

Le funzioni *a valori reali* sono funzioni definite su un insieme X , in genere sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, che assumono valori in $\mathbb{R}$. Date due funzioni:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (34)$$

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (35)$$

e dato $k \in \mathbb{R}$ per tali funzioni valgono le seguenti proprietà:

1. $(f + g) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x)$,
2. $(k \cdot f) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(k \cdot f)(x) \equiv k(f(x))$,
3. $|f| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(|f|)(x) \equiv |f(x)|$,
4. $(fg) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(fg)(x) \equiv f(x)g(x)$.

in cui la fg non è la composizione di funzioni (che non sarebbe definita) ma, più semplicemente, il loro prodotto. È facile vedere come l'insieme delle funzioni a valori reali su un insieme non vuoto X costituisca uno *spazio vettoriale lineare* dal momento che:

1. l'operazione di somma di funzioni $(+)$ è associativa, commutativa, possiede elemento neutro (la funzione nulla) ed elemento inverso (cioè data f esiste $-f$ tale che $f - f$ è la funzione nulla),
2. il prodotto per gli scalari $k \in \mathbb{R}$ è associativo ed ha elemento neutro $k = 1$,
3. esiste distributività del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di funzioni e della somma di scalari rispetto al prodotto per una funzione.

4 Cardinalità e ordine

In questa sezione ci si propone di introdurre alcuni concetti che ci permetteranno di confrontare fra di loro insiemi con un numero qualunque di elementi, di “contarli” e di ordinarli. Per tutta la sezione useremo gli insiemi generici A e B e l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Definizione 4.1 (Equivalenza di insiemi) *Due insiemi A e B sono equivalenti sse esiste una corrispondenza biunivoca f fra i due. Tale equivalenza fra insiemi viene indicata con $A \sim B$. La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza sugli insiemi.*

La definizione precedente ci consente di affermare che l'insieme dei naturali pari è equivalente ad $\mathbb{N}$ e lo stesso dicasi per i multipli di 3 e, pertanto, sono equivalenti l'insieme dei naturali pari e l'insieme dei multipli di 3 (data la proprietà di transitività della relazione di equivalenza $\sim$).

Un insieme A è detto essere *finito* se:

1. è vuoto ovvero $A = \emptyset$,
2. è equivalente a $\{1, \dots, n\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$

Banalmente due insiemi finiti A e B sono equivalenti se contengono lo stesso numero di elementi.

Definizione 4.2 (Numerabilità) *Un insieme A è detto essere **numerabile** sse è equivalente ad $\mathbb{N}$. Un insieme finito o numerabile è detto essere **contabile**. Il numero di elementi dell'insieme ne esprime la **cardinalità**. Nel caso di insiemi numerabili la cardinalità la si indica con $\aleph_0$.*

In merito agli insiemi numerabili o contabili si enunciano, senza dimostrazione, i seguenti teoremi ([Lip65]).

Teorema 4.1 *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.*

Teorema 4.2 *Ogni sottoinsieme di un insieme contabile è contabile.*

Teorema 4.3 *Data una classe numerabile di insiemi disgiunti numerabili $\{A_1, A_2, \dots\}$ anche $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ è numerabile.*

Teorema 4.4 *Data una classe numerabile di insiemi numerabili $\{A_i : i \in I\}$ (ovvero I è numerabile e lo stesso vale per tutti gli A_i) allora $\cup_{i \in I} A_i$ è contabile.*

Definizione 4.3 *Un insieme che non è finito e neanche numerabile lo si dice **non numerabile** oppure **non contabile**.*

In base alla definizione 4.3 si ha che $\mathbb{R}$ non è numerabile (non può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$) e lo stesso vale per l'intervallo $[0, 1]$. Quest'ultimo può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ (utilizzando la funzione $f(x) = \tan(x\pi - \frac{\pi}{2})$, continua e invertibile su $[0, 1]$) per cui si ha che l'intervallo $[0, 1]$ non è numerabile. Da tutto ciò discende che se un insieme generico X è equivalente all'intervallo $[0, 1]$ è detto avere la potenza del continuo ovvero avere una cardinalità pari a $\mathfrak{c}$.

Si può dimostrare che ogni intervallo, sia questo aperto o chiuso, ha una cardinalità pari a $\mathfrak{c}$ e lo stesso vale per l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Prima

di introdurre i concetti di **cardinalità**, di insiemi [parzialmente] **ordinati** e di **estremi inferiori e superiori** è necessario introdurre il Teorema di Schoeder-Bernstein sulle relazioni di granularità.

Dati due insiemi A e B , si scrive $A \preceq B$ se $A \sim B^*$ ovvero A è equivalente ad un sottoinsieme B^* di B mentre si scrive $A \prec B$ se $A \preceq B$ ma $A \not\sim B$.

Esempio 4.1 *Dato che $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ si può scrivere $\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$ ma poichè $\mathbb{N}$ è numerabile mentre $\mathbb{R}$ non lo è si ha $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$ per cui i due insiemi non sono equivalenti.*

Dati due insiemi A e B qualunque si deve necessariamente verificare una delle condizioni seguenti:

1. $A \sim B$,
2. $A \prec B$ o $B \prec A$,
3. $A \preceq B$ e $B \preceq A$,
4. $A \not\prec B$, $A \not\sim B$ e $B \not\prec A$.

Il Teorema di Schoeder-Bernstein si applica al caso 3. e stabilisce che se $A \preceq B$ e $B \preceq A$ allora A e B sono equivalenti per cui si ha che vale il caso 1. e quindi $A \sim B$. Il caso 4. è impossibile dal momento che dati due insiemi A e B qualunque si può avere o $A \prec B$ o $A \sim B$ o $B \prec A$.

I concetti suddetti si applicano alla definizione del concetto di **cardinalità**.

Definizione 4.4 (Cardinalità) *Dati due insiemi A e B si dice che hanno la stessa **cardinalità** se sono equivalenti ovvero se vale la $A \sim B$.*

Nota 4.1 (Notazione) *Dato un insieme A la sua cardinalità (detta anche **numero cardinale**) la si indica con $\#(A)$ o, in modo abbreviato, $\#A$ per cui si ha $A \sim B$ sse $\#A = \#B$.*

Definizione 4.5 *Dalla Definizione 4.4 e dalla Nota 4.1 segue facilmente che:*

1. $A \prec B$ sse $\#A < \#B$,
2. $A \preceq B$ sse $\#A \leq \#B$,
3. se $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$ allora $\#A = \#B$.

Esempio 4.2 *È intuitivo capire che:*

1. $\#\emptyset = 0$,
2. se $A = \{1, 2, 3\}$ $\#A = 3$

e che si procede in modo simile per tutti gli insiemi finiti. Nel caso di $\mathbb{N}$ si ha che la sua cardinalità la si indica con $\aleph$ mentre per intervalli di $\mathbb{R}$ quali $[0, 1]$ si ha:

$$\#[0, 1] = \mathfrak{c} \quad (36)$$

dove $\mathfrak{c}$ indica la cardinalità, come di consueto, del continuo.

Nota 4.2 Si ha che $\aleph$ e $\mathfrak{c}$ sono numeri cardinali infiniti ma non sono i soli dal momento che il Teorema di Cantor stabilisce che l'insieme potenza $\mathcal{P}A$ di un insieme A qualunque (ovvero l'insieme di tutti i suoi possibili sottoinsiemi) ha cardinalità maggiore della cardinalità di A . La congettura nota come **Ipotesi del continuo**, invece, stabilisce che non esiste alcun insieme A tale che

$$\aleph < \#A < \mathfrak{c} \quad (37)$$

4.1 Insiemi parzialmente ordinati

Dato un insieme A una relazione $\preceq$ si dice **ordinamento parziale** (o semplicemente **ordinamento**) su A se, comunque prenda tre elementi $a, b, c \in A$, valgono le seguenti relazioni:

1. $a \preceq a$,
2. $a \preceq b$ e $b \preceq a \Rightarrow a = b$,
3. $a \preceq b$ e $b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$.

Definizione 4.6 (Insiemi parzialmente ordinati) La coppia $(A, \preceq)$ si dice rappresentare un insieme **insieme parzialmente ordinato**.

Nota 4.3 Dalle proprietà suddette si ha che un ordinamento parziale è una relazione

1. riflessiva,
2. antisimmetrica,
3. transitiva.

Se la relazione $\mathcal{R}$ su A definisce un ordinamento parziale lo stesso vale per la sua inversa $\mathcal{R}$ detta ordinamento inverso.

Esempio 4.3 *Esempi classici di ordinamenti parziali comprendono:*

1. l'inclusione $\subset$ e $\subseteq$ fra insiemi di una classe qualunque (la seconda è un ordinamento totale, vedi oltre);
2. la relazione $\leq$ su un qualunque $A \subseteq \mathbb{R}$ (detta **ordinamento naturale** su $\mathbb{R}$).

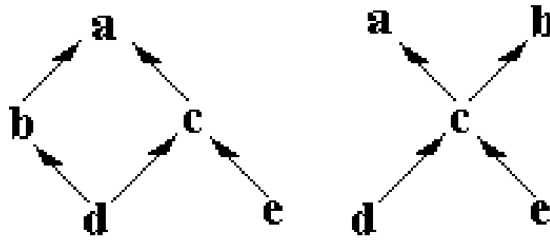


Figura 1: *Ordinamenti (dettagli nel testo)*

La figura 1 (a sinistra) (tratta da [Lip65]) presenta il caso di un ordinamento parziale su un insieme finito $X = \{a, b, c, d, e\}$ definito come segue. Presi comunque due elementi x e y di X si ha $x \preceq y$ sse:

1. $x = y$ oppure
2. x e y sono uniti da una o più frecce orientate da x a y , ciò accade per, ad esempio, d ed a ma non per d ed e .

Nota 4.4 Dato un insieme A , due elementi qualunque $a, b \in A$ e un ordinamento $\preceq$ su A si ha:

1. se $a \preceq b$ si dice che a precede o è più piccolo di b mentre b segue o domina o è più grande di a ;
2. se $a \preceq b$ ma $a \neq b$ si scrive $a \prec b$;
3. se si ha $a \preceq b$ oppure $b \preceq a$, A si dice **totalmente ordinato**.

Un esempio di insieme totalmente ordinato è dato da $\mathbb{R}$ con la relazione $\leq$.

Dato un insieme X parzialmente ordinato e dato un suo sottoinsieme A si ha che l'ordinamento di X si riflette in modo naturale su A così che $a \preceq b$ con $a, b \in A$ sse $a \preceq b$ con $a, b \in X$. Dato X parzialmente ordinato alcuni suoi sottoinsiemi possono essere totalmente ordinati mentre lo sono tutti se X è totalmente ordinato. La figura 1 (a destra) (tratta da [Lip65]) presenta un ordinamento parziale su $X = \{a, b, c, d, e\}$ in cui:

1. i sottoinsiemi $\{a, c, d\}$ e $\{b, e\}$ sono totalmente ordinati,
2. i sottoinsiemi $\{a, b, c\}$ e $\{d, e\}$ non sono totalmente ordinati perchè non si possono mettere gli elementi di tali sottoinsiemi in relazione fra di loro.

4.2 Estremi inferiori e superiori

Si considera un insieme X ordinato. Dato un elemento qualunque $x \in X$ si danno le seguenti definizioni.

Definizione 4.7 (Primo elemento o elemento più piccolo) Un elemento $a_0 \in X$ si dice essere il primo o più piccolo elemento sse $a_0 \preceq x$.

Definizione 4.8 (Ultimo elemento o elemento più grande) Un elemento $b_0 \in X$ si dice essere l'ultimo o il più grande elemento sse $x \preceq b_0$.

Esempio 4.4 Nella figura 1 (a sinistra) si ha l'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ in cui:

1. a è l'ultimo elemento perchè è in relazione $x \preceq a$ con ogni altro $x \in X$,
2. non esiste un primo elemento.

Definizione 4.9 (Elemento massimale) Un elemento $a_0 \in X$ si dice **massimale** sse $a_0 \preceq x \Rightarrow x = a_0$ (con $x \in X$) ovvero sse nessun elemento segue a_0 a parte a_0 stesso.

Definizione 4.10 (Elemento minimale) Un elemento $b_0 \in X$ si dice **minimale** sse $x \preceq b_0 \Rightarrow x = b_0$ (con $x \in X$) ovvero sse nessun elemento precede b_0 a parte b_0 stesso.

Esempio 4.5 Sempre con riferimento alla figura 1 (a sinistra) si ha:

1. a è un elemento massimale,
2. d ed e sono elementi minimali.

Se ora si considera un sottoinsieme A di un insieme parzialmente ordinato X si possono dare le definizioni di **più grande estremo inferiore** (detto anche **inf** da infimum) e di **più piccolo estremo superiore** (detto anche **sup** da supremum).

Dato un elemento $m \in X$ si ha:

1. se $m \preceq x \forall x \in A$ allora m si dice **estremo inferiore** (o lower bound) di A ,
2. se m è il più grande degli estremi inferiori (ovvero è tale che $m' \preceq m$ per ogni altro estremo inferiore m' di A) allora si dice che m è il **più grande estremo inferiore** e lo si indica con $\inf(A)$.

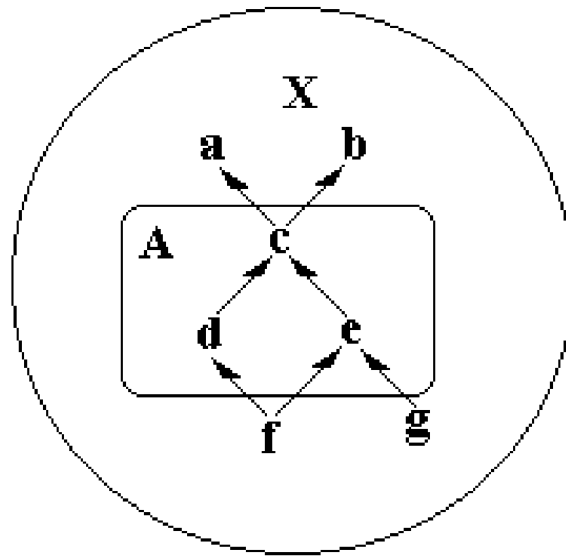


Figura 2: **inf** e **sup** (dettagli nel testo)

Dato un elemento $M \in X$ si ha:

1. se $x \preceq M \forall x \in A$ allora M si dice **estremo superiore** (o upper bound) di A ,
2. se M è il più piccolo degli estremi superiori (ovvero è tale che $M \preceq M'$ per ogni altro estremo inferiore M' di A) allora si dice che M è il **più piccolo estremo superiore** e lo si indica con $\sup(A)$.

Definizione 4.11 Dato un insieme A si dice che:

1. A è limitato superiormente se esiste finito $\sup(A)$,
2. A è limitato inferiormente se esiste finito $\inf(A)$,
3. A è limitato se esistono finiti $\inf(A)$ e $\sup(A)$.

Nota 4.5 *Se, dato un insieme A , si ha:*

1. $\inf(A) \in A$ allora lo si indica come $\min(A)$,
2. $\sup(A) \in A$ allora lo si indica come $\max(A)$.

Esempio 4.6 ([Lip65]) *Con riferimento alla figura 2 (tratta da [Lip65]) si ha che l'insieme A è contenuto in $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ed è tale che:*

1. a, b e c sono estremi superiori per A ,
2. f è un estremo inferiore per A ,
3. g non è un estremo inferiore per A perchè non è in relazione con d ,
4. siccome $c \in A$ si ha che c è il $\max(A)$ mentre f non è il $\min(A)$ perchè non appartiene all'insieme pur essendo $\inf(A)$.

Se X è un insieme parzialmente ordinato e non vuoto ed è tale che ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ha un estremo superiore allora X ha almeno un elemento massimale (**Lemma di Zorn**).

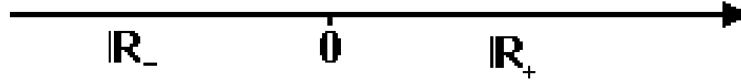
5 Elementi di topologia: topologia su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{R}^2$

Nella presente sezione prenderemo in esame sia l'insieme dei numeri reali (denotato con $\mathbb{R}$ e rappresentabile mediante i punti su una retta su cui è possibile fissare sia un riferimento (il punto 0) che separa i numeri reali positivi da quelli negativi sia un orientamento) sia l'insieme $\mathbb{R}^2$ rappresentabile mediante i punti del piano caratterizzato da un riferimento cartesiano classico.

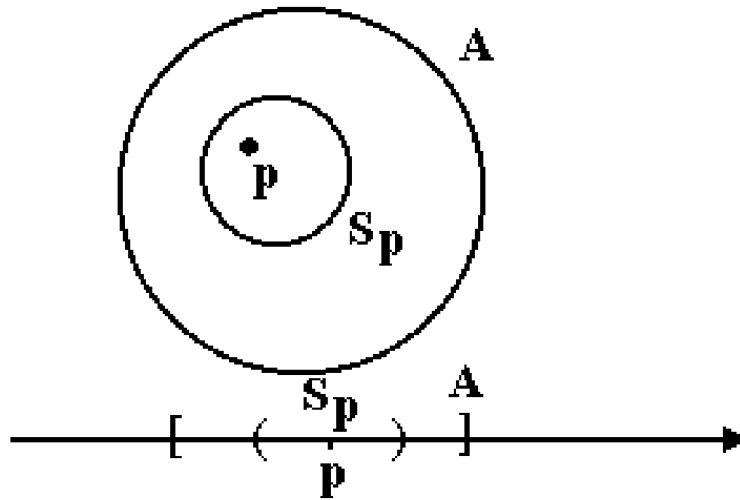
5.1 $\mathbb{R}$

La figura 3 illustra rappresentazione geometrica dell'insieme dei numeri reali ($\mathbb{R}$) insieme agli insiemi dei reali non negativi ($\mathbb{R}_+$) e non positivi ($\mathbb{R}_-$). Sulla retta sono stati stabiliti in modo arbitrario:

1. un punto di riferimento o punto 0 o origine,
2. un orientamento.

Figura 3: Retta $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)

Ogni punto della retta corrisponde ad un solo numero $x \in \mathbb{R}$ il cui valore assoluto coincide con la lunghezza del segmento che unisce il punto con l'origine e il cui segno stabilisce la posizione del punto corrispondente rispetto all'origine: a destra se il segno è $+$ a sinistra se è $-$. Definita una rappresentazione intuitiva dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ si passa ora alla definizione del concetto di **punto interno**. La figura 4 illustra la definizione che daremo a breve sia nel caso di $\mathbb{R}^2$ (in alto) sia nel caso di $\mathbb{R}$ (in basso). Se A è un

Figura 4: Insiemi aperti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)

sottoinsieme qualunque di $\mathbb{R}$ (o di $\mathbb{R}^2$, in questa sezione considereremo solo il primo caso) si hanno le seguenti definizioni.

Definizione 5.1 (Punto interno) *Un punto $p \in A$ si dice **punto interno di A** se appartiene ad un intervallo aperto S_p che è contenuto in A . In modo formale si ha:*

$$p \in S_p \subset A \quad (38)$$

Definizione 5.2 (Insieme aperto) *Un insieme A si dice **aperto** sse tutti i suoi punti sono punti interni.*

Definizione 5.3 (Insieme non aperto) *Un insieme A si dice **non aperto** sse almeno uno dei suoi punti non è un punto interno (ovvero viola la condizione della definizione 5.2).*

Esempio 5.1 ([Lip65]) *Si hanno i seguenti casi di **insiemi aperti** e **insiemi non aperti** (in cui a, b, x, p e simili elementi appartengono a $\mathbb{R}$ ed hanno rappresentazioni sulla retta reale):*

1. *un intervallo aperto $A = (a, b)$ è un insieme aperto dato che per ogni $p \in A$ si può prendere $S_p = A$;*
2. *$\mathbb{R}$ è un insieme aperto dato che ogni intervallo aperto che contiene p , S_p , è sottoinsieme di $\mathbb{R}$;*
3. *$\emptyset$ è un insieme aperto dal momento che non ha elementi per cui la definizione di insieme aperto è banalmente soddisfatta oppure perchè nessun suo punto è non interno;*
4. *un intervallo chiuso $B = [a, b]$ non è un insieme aperto perchè i punti a e b non sono interni: ad esempio se considero a ogni suo intorno contiene punti che non sono in B per cui è violata la definizione 5.2;*
5. *gli intervalli aperti infiniti di $\mathbb{R}$ ovvero:*

(a) $(a, +\infty)$

(b) $(-\infty, a)$

(c) $(-\infty, +\infty)$

sono insiemi aperti in base alla definizione 5.2;

6. *gli intervalli chiusi infiniti di $\mathbb{R}$ ovvero:*

(a) $[a, +\infty)$

(b) $(-\infty, a]$

non sono insiemi aperti dato che il punto a viola la definizione 5.2 non essendo un punto interno del relativo insieme.

Proposizione 5.1 (Proprietà degli insiemi aperti) *Per gli insiemi aperti valgono le seguenti proprietà:*

1. l'unione di un numero qualunque (anche infinito) di insiemi aperti di $\mathbb{R}$ è un insieme aperto;
2. l'intersezione di un numero **finito** qualunque di insiemi aperti di $\mathbb{R}$ è un insieme aperto.

Si noti che è necessario che l'intersezione sia su un numero finito di insiemi altrimenti ([Lip65]) la proprietà non vale. Se si ha:

$$A_n = \left\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\} \quad (39)$$

con $n \in \mathbb{N}$ si ha $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ e l'insieme $\{0\}$ non è un insieme aperto perchè, di nuovo, è violata la definizione 5.2 non essendo 0 un punto interno di tale insieme.

Definizione 5.4 (Punti di accumulazione) Dato $A \subset \mathbb{R}$ si dice che un punto $p \in \mathbb{R}$ è un **punto di accumulazione** (o punto limite) per A sse ogni insieme aperto G che contiene p contiene almeno un punto di A distinto da p ovvero, in modo più formale:

$$p \in G \Rightarrow A \cap (G \setminus \{p\}) \neq \emptyset \quad (40)$$

Definizione 5.5 (Derivato) L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A lo si dice **derivato di A** e lo si indica con A' oppure $D(A)$.

Esempio 5.2 ([Lip65]) Vediamo alcuni esempi di applicazione della definizione 5.4.

1. Se $A = \{\frac{1}{n} : n > 0\}$ il punto 0:
 - (a) non appartiene ad A ,
 - (b) è punto di accumulazione per A dato che ogni insieme aperto che lo contiene contiene infiniti punti di A , almeno da un certo n in poi.

A non ha altri punti di accumulazione per cui $A' = \{0\}$.

2. Se considero l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali ho che ogni $p \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione per $\mathbb{Q}$ dal momento che ogni insieme aperto che contiene p contiene numeri razionali ovvero punti di $\mathbb{Q}$.
3. Se considero insiemi come $\mathbb{N}$ (numeri naturali) o $\mathbb{Z}$ (numeri interi) tali insiemi non hanno punti di accumulazione perchè, preso un loro elemento qualunque, esistono insiemi aperti che lo contengono ma che non contengono altri elementi dell'insieme. Il derivato di tali insiemi è l'insieme vuoto $\emptyset$.

Non tutti gli insiemi, anche se sono a cardinalità infinita (vedi l'esempio 5.2) hanno punti di accumulazione. Al proposito si ha il seguente teorema.

Teorema 5.1 (Bolzano-Weierstrass) *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$:*

1. *limitato,*
2. *infinito*

allora A ha almeno un punto di accumulazione.

Definizione 5.6 (Insiemi chiusi, prima definizione) *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice **chiuso** sse il suo complemento A^C è un insieme aperto.*

Definizione 5.7 (Insiemi chiusi, seconda definizione) *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice **chiuso** sse A contiene tutti i propri punti di accumulazione ovvero sse $A' \subset A$.*

Esempio 5.3 ([Lip65]) *Vediamo alcuni esempi di applicazione del concetto di insieme chiuso (con $a, b \in \mathbb{R}$):*

1. $[a, b]$ è un insieme chiuso perchè il suo complemento $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ è un insieme aperto dato dall'unione di due insiemi aperti;
2. $\emptyset$ è un insieme chiuso perchè il suo complemento $\mathbb{R}$ è un insieme aperto;
3. $\mathbb{R}$ è un insieme chiuso perchè il suo complemento $\emptyset$ è un insieme aperto;
4. l'insieme $A = \{\frac{1}{n} : n > 0\}$ visto nell'esempio 5.2 non è chiuso perchè non contiene il suo unico punto di accumulazione che è 0.

Nota 5.1 *Si noti che si hanno insiemi che non sono nè aperti nè chiusi. A tale categoria appartengono, nel caso di $\mathbb{R}$, tutti gli intervalli del tipo:*

1. $[a, b)$
2. $(a, b]$

con $a, b \in \mathbb{R}$: nel primo caso, dalla definizione di punto interno, si vede che a non è un punto interno, nel secondo non lo è b .

Dato un intervallo **chiuso e limitato** A si ha il seguente teorema in cui si asserisce che una classe di insiemi $\mathcal{A} = \{A_i\}$ è detta essere un **ricoprimento** di A se si ha $A \subset \cup_i A_i$.

Teorema 5.2 (Heine-Pinkerle-Borel) *Sia $A = [c, d]$ un intervallo **chiuso** e **limitato** e sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una classe di intervalli aperti che contiene A per cui $A \subset \cup_i A_i$ allora $\mathcal{A}$ contiene una sottoclasse finita $\{A_{i_j}\}_{i_j=1, \dots, n}$ che è un ricoprimento di A .*

Le condizioni su A (chiuso e limitato) sono necessarie per la validità del teorema: se l'intervallo non è chiuso o non è limitato non si riesce a trovare una sottoclasse finita che lo copra. Esempi al proposito sono discussi in [Lip65].

Si introduce a questo punto il concetto di **successione** (o sequenza) che ci permette, a sua volta, di definire i concetti di:

1. successioni convergenti;
2. sottosuccessioni;
3. successioni di Cauchy;
4. completezza.

Una successione $\langle s_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ (o anche solo $\langle s_n \rangle$) è una funzione che assegna ad ogni elemento di $\mathbb{N}$ un elemento s_n della successione. Tale elemento è detto **termine n-esimo** della successione.

Esempio 5.4 ([Lip65]) *Vediamo alcuni esempi di successioni.*

1. La successione $\langle s_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7 \dots \rangle$ può essere definita dalla funzione $s(n) = 2n - 1$.
2. La successione $\langle s_n \rangle = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots \rangle$ può essere definita dalla funzione $s(n) = \frac{(-1)^n}{2^n}$.
3. La successione $\langle s_n \rangle = \langle 1, 0, 1, 0 \dots \rangle$ può essere definita dalla funzione $s(n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})$.

Definizione 5.8 (Successioni limitate) *Una successione $\langle s_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ si dice **limitata** se il suo codominio $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme limitato.*

Nota 5.2 *Con $\langle s_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ si denota una successione ovvero una funzione mentre con $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ si denota un insieme che è il codominio della funzione.*

Definizione 5.9 (Successioni convergenti) *La successione di numeri reali $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ converge ad un numero $b \in \mathbb{R}$ e si scrive:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \quad (41)$$

oppure:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \quad (42)$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo n_0 tale che $\forall n > n_0$ si ha $|a_n - b| < \varepsilon$ ovvero se a partire dall'indice n_0 i termini della successione sono contenuti nell'intervallo aperto di b ($b - \varepsilon, b + \varepsilon$): da tale considerazione segue che solo un numero finito di termini si trova al di fuori di tale intervallo mentre tutti gli altri (in numero infinito) sono al suo interno.

Definizione 5.10 (Definizione alternativa di successione convergente)

Sulla base dei commenti finali alla definizione 5.9 si ha che una successione $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ converge ad un numero $b \in \mathbb{R}$ se ogni insieme aperto che contiene b contiene tutti gli elementi della successione a parte un numero finito che sono all'esterno di tale insieme.

Esempio 5.5 ([Lip65]) *Vediamo alcuni esempi di successioni convergenti.*

1. *La successione $\langle a_n \rangle = \langle k, k, \dots, k \rangle \forall n \in \mathbb{N}$ e k costante converge a k dal momento che ogni insieme aperto che contiene un elemento della successione li contiene tutti.*
2. *La successione $\langle a_n \rangle$ definita dalla $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0 perchè ogni intorno aperto di 0 contiene tutti gli elementi della successione a partire da un n_0 in poi.*
3. *Anche la successione definita dalla $s(n) = \frac{1}{2^n}(1 + (-1)^{n-1})$ converge a 0 per motivi analoghi al caso precedente.*

Data una successione $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$ i cui elementi sono indicati da $\mathbb{N}$ se esiste una sequenza di interi positivi $I = \langle i_n \rangle$ tali che $i_1 < i_2 < \dots$ tale sequenza individua gli elementi di una sottosuccessione $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots \rangle$ della successione $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$. Data una successione qualunque di numeri reali se questa è limitata contiene sempre una sottosuccessione convergente.

Definizione 5.11 (Successioni di Cauchy) *Una successione di numeri reali $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ si dice **di Cauchy** sse $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 > 0$ tale che:*

$$n, m > n_0 \implies |a_n - a_m| < \varepsilon \quad (43)$$

ovvero una successione è di Cauchy sse i termini della successione divengono sempre più vicini fra loro al crescere di n .

Nota 5.3 Si può dimostrare che ogni successione convergente è una successione di Cauchy ma che una successione di Cauchy non è necessariamente convergente. Per dimostrare la prima implicazione si nota che se una successione è convergente allora $a_n \rightarrow b$. Si prende $\varepsilon > 0$ per cui esiste n_0 tale che per $n > n_0$ e $m > n_0$ si ha:

$$1. |a_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$2. |a_m - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

per cui è:

$$|a_n - a_m| = |a_n - b + b - a_m| \leq |a_n - b| + |a_m - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad (44)$$

per cui la successione è di Cauchy. Per dimostrare la non implicazione si può considerare una successione i cui termini sono a segni alterni e di modulo decrescente: la successione converge ma se considero coppie di elementi di cui un elemento positivo e uno negativo non necessariamente la loro distanza decresce al crescere di n .

Il concetto di successione di Cauchy ci consente di introdurre il concetto di **completezza**.

Definizione 5.12 (Completezza) Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice essere **completo** se ogni successione di Cauchy $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ di punti di A converge a punti di A .

Nota 5.4 Per dimostrare la non completezza di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ basta trovare una successione di Cauchy che converge ad un punto che non appartiene all'insieme A .

Un esempio di insieme completo è l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ dal momento che una successione di Cauchy di punti di $\mathbb{Z}$ è della forma

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, b, b, b, \dots \rangle \quad (45)$$

e converge a $b \in \mathbb{Z}$. Un altro esempio di insieme completo è $\mathbb{R}$: si può, infatti, dimostrare che ogni successione di Cauchy di numeri reali converge a un numero reale (teorema di Cauchy).

Un esempio di insieme incompleto è $\mathbb{Q}$: si può, infatti, concepire una successione di elementi di $\mathbb{Q}$ che converge, ad esempio, a $\sqrt{2}$ che non è elemento di $\mathbb{Q}$.

Prima di passare ad una breve descrizione della topologia in $\mathbb{R}^2$ si definisce il concetto di **funzione continua**.

Definizione 5.13 (Funzione continua in un punto) Una funzione:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (46)$$

è continua in un punto x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (47)$$

Definizione 5.14 (Funzione continua in un insieme) Una funzione:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (48)$$

è continua in $A \subset \mathbb{R}$ sse è continua $\forall x_0 \in A$.

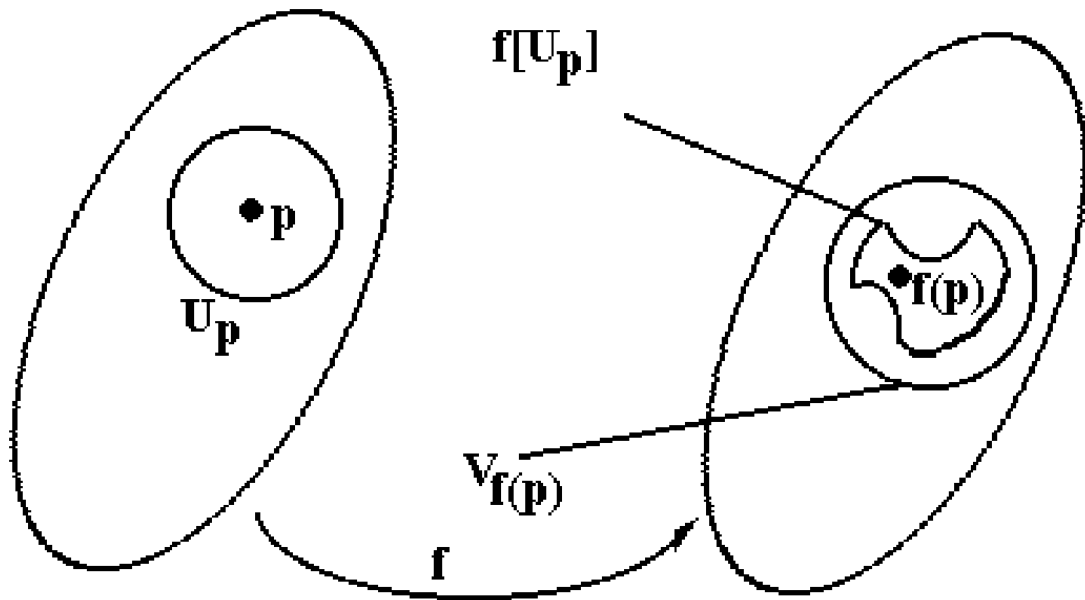


Figura 5: Funzioni continue (dettagli nel testo)

Nota 5.5 Dalla definizione 5.13 si ha che:

1. i punti x che compaiono nella definizione sono contenuti nell'intervallo aperto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
2. i corrispondenti punti $f(x)$ sono contenuti nell'intervallo aperto $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

per cui la (47) equivale alla seguente:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \quad (49)$$

che equivale, infine, alla seguente proposizione:

$$f[(x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \quad (50)$$

Si ha, quindi, la seguente definizione (vedi anche la figura 5).

Definizione 5.15 *Una funzione:*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (51)$$

è continua in $p \in \mathbb{R}$ sse per ogni insieme aperto $V_{f(p)}$ che contiene $f(p)$ esiste un insieme aperto U_p che contiene p tale che:

$$f[U_p] \subset V_{f(p)} \quad (52)$$

In più vale ancora la definizione 5.14 per la continuità su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Una definizione alternativa di continuità per le funzioni si basa sul concetto di immagine inversa di insiemi aperti.

Definizione 5.16 (Continuità per immagini inverse) *Una funzione:*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (53)$$

è continua sse l'immagine inversa mediante la f^{-1} di un qualunque insieme aperto è un insieme aperto.

Nota 5.6 *Per dimostrare che una funzione f non è continua basta falsificare la definizione 5.16 ovvero trovare un insieme aperto la cui immagine inversa è un insieme non aperto.*

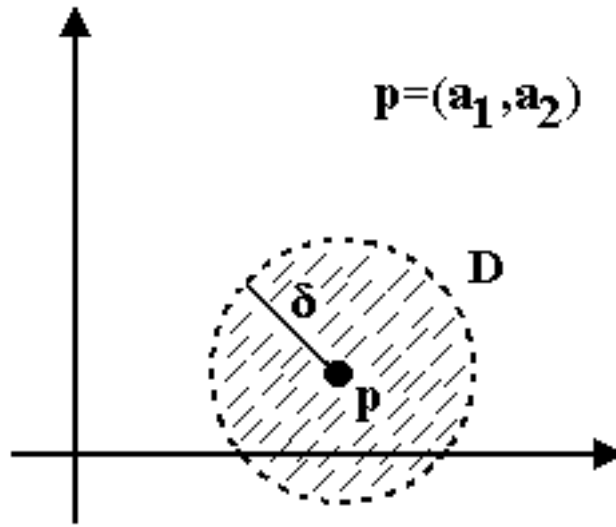
Nota 5.7 *Come è intuibile, di tale definizione ne esiste la versione duale espressa in termini di insiemi chiusi.*

Una importante proprietà delle funzioni continue è data dal seguente teorema.

Teorema 5.3 (Teorema del valore intermedio di Weierstrass) *Una funzione:*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (54)$$

continua su un intervallo chiuso $[a, b]$ assume tutti i valori compresi $f(a)$ e $f(b)$ ovvero dato un qualunque y_0 compreso fra tali limiti esiste un $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Figura 6: Topologia in $\mathbb{R}^2$ (dettagli nel testo)

5.2 $\mathbb{R}^2$ (cenni alla topologia del piano)

La topologia in $\mathbb{R}^2$ (vedi la figura 6) ha come elementi base i **dischi aperti** di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 5.17 *Un disco aperto $D \subset \mathbb{R}^2$ è l'insieme dei punti contenuti nel cerchio di centro $p = (a_1, a_2)$ e raggio $\delta > 0$ ovvero:*

$$D = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p, q) < \delta\} \quad (55)$$

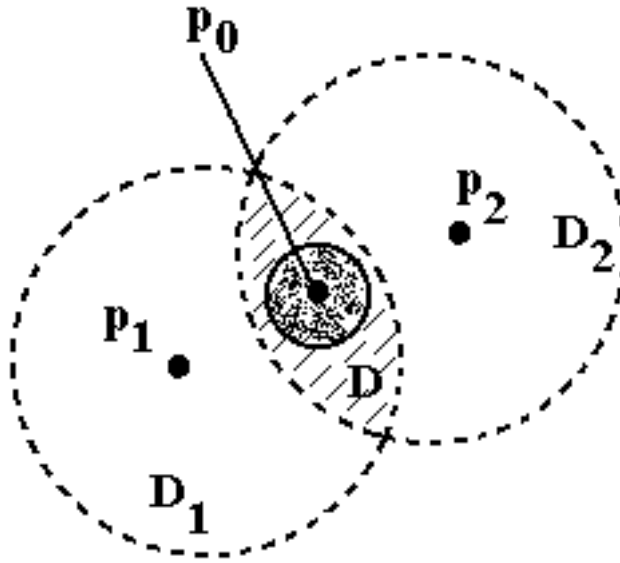
I dischi aperti giocano nella topologia del piano un ruolo analogo a quello giocato dagli intervalli aperti nel caso della topologia della retta. In analogia a quanto visto nel caso di $\mathbb{R}$ si danno le seguenti definizioni. In tutti i casi trattati, A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, G è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e p è, a seconda dei casi, un punto di A o di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 5.18 (Punto interno) *Un punto $p \in A$ si dice **interno** se appartiene a un disco aperto D_p contenuto in A .*

Definizione 5.19 (Insieme aperto) *Un insieme A si dice **aperto** se tutti i suoi punti sono punti interni.*

Esempio 5.6 ([Lip65]) *Esempi di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^2$ sono:*

1. un qualunque disco aperto D ;

Figura 7: *Intersezione di dischi (dettagli nel testo)*

2. il piano $\mathbb{R}^2$;
3. l'insieme vuoto $\emptyset$;
4. l'intersezione di due dischi D_1 e D_2 (vedi la figura 7)

Vediamo in dettaglio l'ultimo caso. Siano:

$$D_1 = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p_1, q) < \delta_1\} \quad (56)$$

$$D_2 = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p_2, q) < \delta_2\} \quad (57)$$

Se prendo $p_0 \in D_1 \cap D_2$ ho $d(p_1, p_0) < \delta_1$ e $d(p_2, p_0) < \delta_2$. Posso allora fissare:

$$r = \min\{\delta_1 - d(p_1, p_0), \delta_2 - d(p_2, p_0)\} \quad (58)$$

in modo da definire il disco:

$$D = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p_0, q) < \frac{1}{2}r\} \quad (59)$$

Segue che $p_0 \in D \subset D_1 \cap D_2$ in modo che p_0 sia un punto interno a $D_1 \cap D_2$.

Definizione 5.20 (Punto di accumulazione) Un punto $p \in \mathbb{R}^2$ si dice **punto di accumulazione** per A sse ogni insieme aperto G che contiene p contiene almeno un altro punto di A distinto da p ovvero sse $p \in G \Rightarrow A \cap (G \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.

Definizione 5.21 (Insiemi chiusi) *Un insieme $A \in \mathbb{R}^2$ si dice **chiuso** sse il suo complemento A^C è un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.*

Definizione 5.22 (Successioni convergenti, prima definizione) *Una successione di punti $p_n \in \mathbb{R}^2$, $\langle p_n \rangle$, si dice **convergente** al punto $q \in \mathbb{R}^2$ sse ogni insieme aperto che contiene q contiene tutti i punti della successione a parte un numero finito.*

Definizione 5.23 (Successioni convergenti, seconda definizione) *Una successione di punti $p_n = \langle a_n, b_n \rangle \in \mathbb{R}^2$, $\langle p_n \rangle$, si dice **convergente** al punto $q = \langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2$ sse si ha:*

1. $a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} a$,
2. $b_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} b$.

Definizione 5.24 (Funzioni continue, prima definizione) *Una funzione:*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (60)$$

*si dice **continua** in un punto $p \in \mathbb{R}^2$ sse per ogni insieme aperto $V_{f(p)}$ che contiene $f(p)$ esiste un insieme aperto U_p che contiene p tale che $f[U_p] \subset V_{f(p)}$.*

Definizione 5.25 (Funzioni continue, seconda definizione) *Una funzione:*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (61)$$

*si dice **continua** in un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ sse è continua in ogni punto di A .*

Definizione 5.26 (Unione) *L'unione di un numero qualunque di sottoinsiemi aperti in $\mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$.*

Definizione 5.27 (Intersezione) *L'intersezione di un numero finito di sottoinsiemi aperti in $\mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$.*

Definizione 5.28 (Sottoinsiemi e punti di accumulazione) *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ è chiuso sse contiene tutti i propri punti di accumulazione.*

Definizione 5.29 (Funzioni continue, terza definizione) *Una funzione:*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (62)$$

*si dice **continua** sse l'immagine inversa di ogni insieme aperto è un insieme aperto.*

6 Prima Lezione

Dato un insieme X , si introduce la definizione di *spazio metrico* come di uno spazio caratterizzato da una funzione *distanza*:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (63)$$

che gode delle seguenti proprietà :

1. $d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y)=0$ sse $x=y$, $\forall x,y \in X$
2. $d(x,y)=d(y,x) \forall x,y \in X$
3. $d(x,y)=d(x,z)+d(z,y) \forall x,y,z \in X$ (disuguaglianza triangolare)

La definizione (63) è molto generale perchè non dice nulla in merito alla natura dell'insieme X e si limita a stabilire alcune proprietà relative ad elementi di tale insieme.

Su $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) si possono definire funzioni distanza che soddisfano le proprietà (1), (2) e (3) alcune delle quali (le più utilizzate) sono riportate qui di seguito:

1. $d_1(x,y)=(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ detta distanza euclidea,
2. $d_2(x,y)=\max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$,
3. $d_3(x,y)=\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

Si fa notare che se una funzione soddisfa tali proprietà allora è una distanza e viceversa. Se a questo punto si considera l'insieme delle funzioni continue su un intervallo chiuso arbitrario $[a, b]$ (ovvero $\mathcal{C}^0[a, b]$) si possono definire le corrispondenti distanze nello spazio di tali funzioni:

1. $d_1(f,g)=(\int_{i=1}^n (f(t) - g(t))^2 dt)^{\frac{1}{2}}$,
2. $d_2(f,g)=\sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$,
3. $d_3(f,g)=\int_a^b |f(t) - g(t)| dt$

dove f e $g \in \mathcal{C}^0[a, b]$. In $\mathbb{R}^n$ mediante le d_i si definiscono spazi topologici identici in un senso che sarà chiarito a breve mentre in $\mathcal{C}^0$ gli spazi topologici indotti dalle varie distanze sono diversi.

6.1 Concetti di intorno, insieme aperto e spazio metrico

Si definisce come *intorno di centro x e raggio ε* l'insieme:

$$I(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\} \quad (64)$$

Tale insieme individua un sottoinsieme di punti dello spazio X caratterizzato dalla distanza da un punto x e, pertanto, la sua forma dipende dalla funzione distanza (o metrica) utilizzata. La figura 8 illustra, nel caso di $\mathbb{R}^2$ gli intorni di raggio ≤ 1 del punto $x = (0, 0)$ secondo le tre metriche dette. Si noti che in $\mathbb{R}$ si ha solo $d(x, y) = |x - y|$. Utilizzando il concetto di intorno si possono

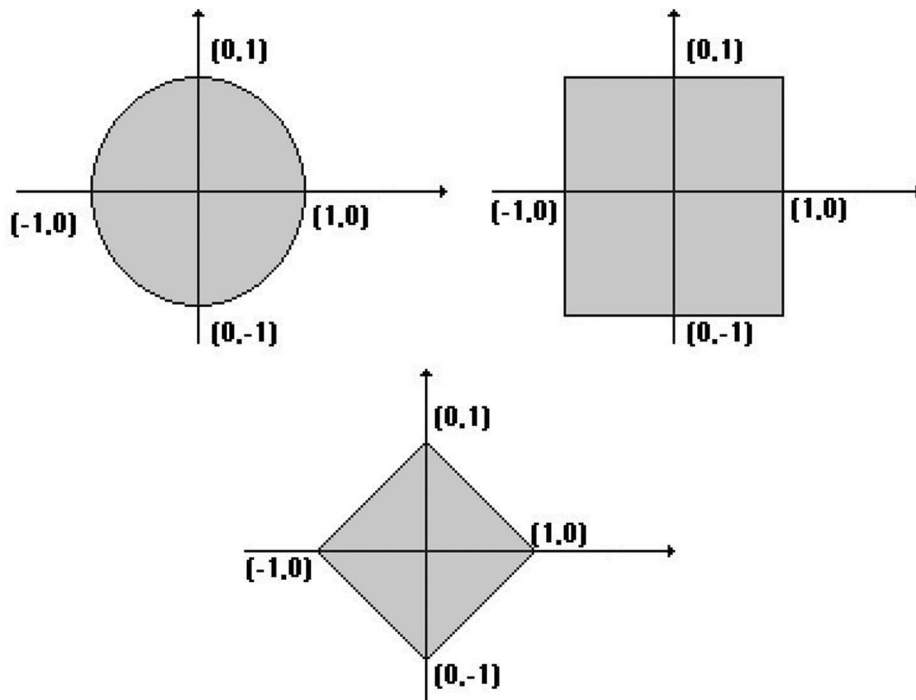


Figura 8: *Esempi di intorni con diverse metriche*

caratterizzare i punti che appartengono ad un insieme nel senso che dato un insieme $A \subseteq X$ si possono caratterizzare i punti $a \in A$ come (vedi la figura 9):

1. *punti interni*: $a \in A$ è punto interno ad A se esiste un intorno di centro a tutto contenuto in A ,

2. *punti esterni*: $b \in A$ è punto esterno ad A se è interno a A^c ovvero se esiste un intorno di b tutto contenuto in A^c ,
3. *punti di frontiera*: $c \in A$ è punto di frontiera se esiste un intorno di c che contiene punti interni ed esterni,

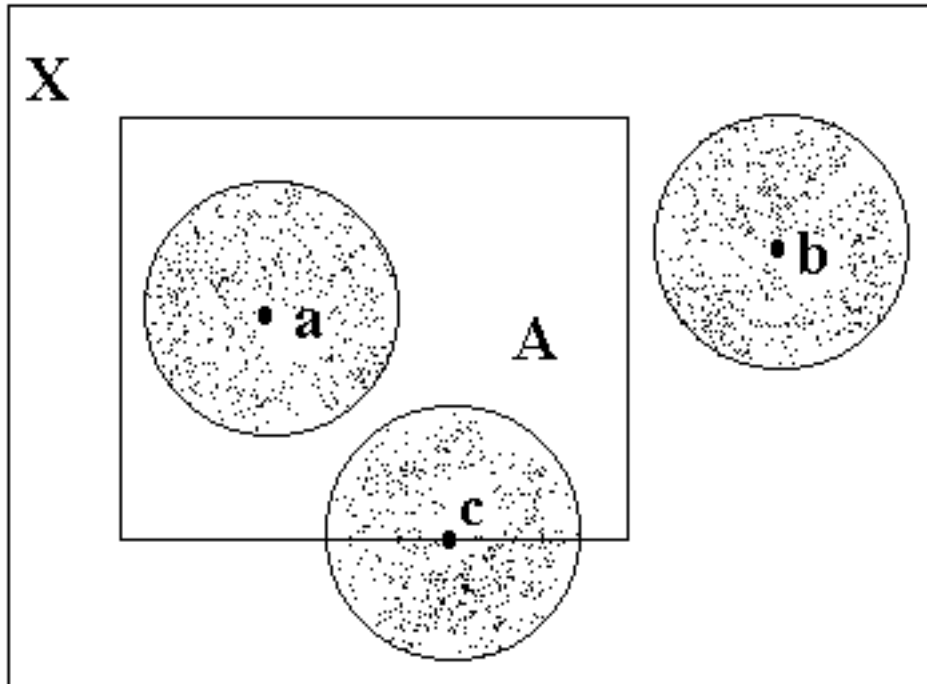


Figura 9: *Punti interni, esterni e di frontiera*

Altre tipologie di punti che esamineremo in modo più approfondito nel seguito sono:

1. *punti isolati*: un punto si dice isolato se esiste un intorno che contiene solo il punto stesso,
2. *punti di accumulazione*: un punto $x \in A$ è punto di accumulazione per A se per ogni intorno di x esiste almeno un punto x' di A distinto da x cioè se $\forall \varepsilon > 0 \ A \cap (I(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Sfruttando la definizione di *punto interno* si possono caratterizzare gli *insiemi aperti*.

Definizione 6.1 *Un insieme A si dice aperto se tutti i suoi punti sono punti interni ovvero se $\forall x \in A \ \exists I(x, \varepsilon) \subset A$.*

Definizione 6.2 *Dato un insieme X su cui è definita una metrica d con le proprietà viste si dice che la coppia (X, d) costituisce uno spazio metrico.*

Su uno spazio metrico si definisce la *famiglia degli insiemi aperti* di (X, d) e la si indica con τ . Tale famiglia rappresenta l'insieme dei sottoinsiemi aperti di X ovvero l'insieme dei sottoinsiemi di X composti solo da punti interni di X .

La famiglia τ gode delle seguenti proprietà:

1. $\emptyset$ e $X \in \tau$,
2. l'unione qualunque di elementi di τ appartiene a τ ovvero $\forall A_\lambda \in \tau$
 $\bigcup_\lambda A_\lambda \in \tau$
3. l'intersezione finita di elementi di τ appartiene a τ ovvero $\forall A_i \in \tau$,
 $i = 1, \dots, n, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Si ha quindi che τ è chiusa rispetto all'unione di un numero qualunque e all'intersezione di un numero finito di suoi elementi.

6.2 Funzioni fra spazi metrici

Introdotti questi concetti vediamo che ruolo ed importanza hanno gli insiemi aperti.

Considero due spazi metrici:

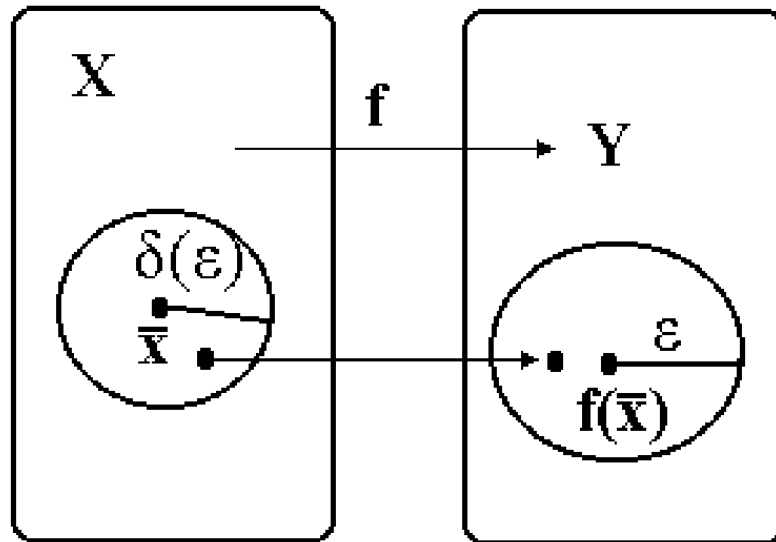
$$\begin{aligned} (X, d_x) \\ (Y, d_y) \end{aligned}$$

e voglio vedere se esistono funzioni f con proprietà interessanti fra tali spazi metrici. Si definiscono le funzioni del tipo:

$$f : X, d_x \longrightarrow Y, d_y \tag{65}$$

La funzione f si dice *continua* se *punti vicini hanno come immagini punti vicini*. Dal momento che la coppia *insieme, metrica* (ovvero X, d) definisce la famiglia τ si può affermare che:

1. se ho $\mathbb{R}^2$ con d_1 ho τ_1
2. se ho $\mathbb{R}^2$ con d_2 ho τ_2
3. se ho $\mathbb{R}^2$ con d_3 ho τ_3

Figura 10: *Continuità di funzioni*

ma $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ cioè le famiglie degli aperti coincidono e gli spazi metrici sono topologicamente equivalenti per cui le metriche d_i sono topologicamente equivalenti. Considerazioni analoghe valgono in $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. La funzione f è detta essere continua in un punto $\bar{x}$ se (vedi figura 10) fissato un intorno di $f(\bar{x})$ di raggio ϵ (cioè $I(f(\bar{x}), \epsilon)$) esiste un intorno di $\bar{x}$ di raggio $\delta(\epsilon)$ (cioè $I(\bar{x}, \delta(\epsilon))$) tale che $\forall x \in I(\bar{x}, \delta(\epsilon)), f(x) \in I(f(\bar{x}), \epsilon)$.

Si parla di *continuità globale* di una funzione f su un insieme X se questa è continua su tutti i punti $x \in X$. In questo modo si stabilisce una relazione fra la continuità su un insieme e la continuità in punti dell'insieme. A tale proposito vale il seguente teorema che lega la continuità della f agli insiemi aperti del dominio X e del codominio Y .

Teorema 6.1 *Dati due spazi metrici (X, d_x) e (Y, d_y) e data la funzione $f : X \rightarrow Y$, f è continua in senso globale ovvero in tutti i punti di X sse $\forall A \subset Y$, A aperto di Y , si ha $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X .*

Dimostrazione

Si deve dimostrare che se f è globalmente continua allora la controimmagine di aperti è aperta ($\implies$) e che se la controimmagine di aperti è aperta allora la f è globalmente continua ($\impliedby$).

($\implies$)

Sia f globalmente continua per cui lo è in tutti i punti di X .

Se considero $\bar{x} \in X$ e considero $\bar{y} = f(\bar{x}) \in Y$ posso fissare un $\varepsilon > 0$ in modo da definire $I(\bar{y}, \varepsilon) \subset Y$ per cui se $x' \in I(\bar{x}, \delta(\varepsilon)) \Rightarrow f(x') \in I(\bar{y}, \varepsilon)$ ovvero preso un intorno aperto $A = I(f(\bar{x}), \varepsilon) \subset Y$ esiste un intorno aperto (immagine inversa di un aperto mediante una funzione continua) $f^{-1}(A) = \{x' : f(x') \in I(f(\bar{x}), \varepsilon)\}$ come si doveva dimostrare.

($\Leftarrow$)

Comunque prendo $A \subset Y$ aperto (con $A = I(\bar{y}, \varepsilon) \subset Y$) so che $f^{-1}(A) = \{\bar{x} \in X : \bar{x} = f^{-1}(\bar{y})\} \subset X$ e cioè $\exists I(\bar{x}, \delta(\bar{\varepsilon}))$ tale che $x' \in I(\bar{x}, \delta(\bar{\varepsilon})) \Rightarrow y' = f(x') \in I(\bar{y}, \varepsilon)$ per cui f è continua localmente e quindi al variare di $\bar{y}$ in Y e $\bar{x}$ in X è globalmente continua.

Nota 6.1 Nell'enunciato del teorema suddetto f^{-1} rappresenta la controimmagine della f (che esiste sempre) e non la funzione inversa (che esiste solo se la f è invertibile). Il teorema fa in modo che la continuità sia una proprietà delle funzioni su insiemi aperti slegata da concetti di distanza e, pertanto, dalle metriche.

Nota 6.2 Si noti che se f è globalmente continua allora è continua localmente per cui insiemi aperti in Y sono immagini di aperti in X per cui se $A \subset Y$ è aperto allora $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto. Se insiemi aperti in Y derivano da insiemi aperti in X allora f è continua localmente per cui, facendo variare $\bar{y}$ in Y si ha che $\bar{x}$ varia in X , da cui discende la continuità globale della f .

Nota 6.3 Si passa dalla definizione di una topologia τ basata su una metrica d definita su un insieme X alla definizione di una topologia definita direttamente su X in modo che goda delle seguenti proprietà:

1. $\emptyset$ e X sono in τ ;
2. $\bigcup_{\lambda} A_{\lambda} \in \tau$ con A_{λ} aperti di τ , è il caso della unione di un numero qualunque, anche infinito, di insiemi;
3. $\bigcap_i A_i \in \tau$ per $i = 1, \dots, n$, intersezione finita.

Si ha una teoria che definisce una topologia τ a partire da un insieme X senza che ci sia bisogno di introdurre una metrica ma solo utilizzando i simboli logici di unione e di intersezione.

7 Seconda Lezione

Data una distanza d , il punto di partenza sono gli *spazi metrici* (X, d) in cui si definiscono gli *intorni* ovvero *insiemi aperti* che appartengono ad una famiglia di insiemi τ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\emptyset$ e X sono in τ ;
2. $\bigcup_{\lambda} A_{\lambda} \in \tau$ con A_{λ} aperti di τ , unione qualunque;
3. $\bigcap_i A_i \in \tau$ per $i = 1, \dots, n$, intersezione finita.

Data la funzione:

$$f : (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y) \quad (66)$$

si parla di continuità in un punto $\bar{x} \in X$ se ogni punto in $I(\bar{x}, \varepsilon)$ va in $I(f(\bar{x}), \delta(\varepsilon))$ ovvero se punti vicini in X vanno in punti vicini in Y . La continuità della:

$$f : (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y) \quad (67)$$

può essere vista in termini di controimmagini di aperti ovvero f è continua sse $\forall A \in \mathcal{Y}$ aperto si ha $f^{-1}(A)$ è aperto in X ovvero sse immagini inverse di insiemi aperti sono insiemi aperti.

Indipendentemente dal concetto di distanza d e solo in termini di proprietà di insiemi è possibile predicare molte proprietà che definiscono la cosiddetta *Point set topology* in cui si fa uso solo di strumenti della topologia degli insiemi.

7.1 Spazi topologici

Definizione 7.1 (Spazio topologico) *Uno **spazio topologico** è una coppia (X, τ) in cui X è un insieme qualunque e $\tau \in 2^X$ è una famiglia di sottoinsiemi di X , ovvero $\tau \in \mathcal{P}(X)$ è un sottoinsieme di aperti di X che soddisfa le proprietà di cui alla Definizione 7.2.*

Definizione 7.2 (Proprietà degli spazi topologici) *Uno **spazio topologico** (X, τ) sugli insiemi aperti soddisfa le seguenti proprietà degli insiemi aperti:*

1. $\emptyset$ e X sono in τ ;
2. $\forall \{A_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ t.c. $A_{\lambda} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda} A_{\lambda} \in \tau$, con Λ insieme di indici qualunque;
3. $\forall \{A_i\}_{i \in [1, \dots, n]}$ t.c. $A_i \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Dalle suddette definizioni segue che se $A_i \in \tau$ allora A_i è un insieme aperto. Se, dato un insieme X , una sua famiglia di sottoinsiemi soddisfa le proprietà della definizione 7.2 allora costituisce una topologia τ su X .

Esempio 7.1 Dato $X = \{a\}$ la sola topologia possibile è la **topologia indiscreta** (vedi l'Esempio 7.3) $\tau = \{\emptyset, X\}$. Se $X = \{a, b\}$ vi si può definire la topologia seguente:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\} \quad (68)$$

e anche:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\} \quad (69)$$

$$\tau = \{X, \emptyset, \{b\}\} \quad (70)$$

Esempio 7.2 Dato $X = \{a, b, c\}$ si vogliono tutte le topologie (di insiemi aperti) definibili su X . Per ottenere quanto richiesto si devono definire famiglie di sottoinsiemi di X che soddisfano le proprietà della definizione (7.2) per cui alcune delle possibili topologie sono le seguenti:

1. $\tau = \{X, \emptyset\}$
2. $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$
3. $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}\}$
4. $\tau = \{X, \emptyset, \{c\}\}$
5. $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
6. $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$
7. $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$
8. $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

L'ultima topologia è la più grossa possibile perchè contiene un numero di insiemi pari alla cardinalità dell'insieme potenza 2^X . In tale topologia ogni elemento è un insieme aperto (perchè appartiene alla topologia) e allo stesso tempo chiuso perchè complemento di un insieme della topologia.

Altre possibili topologie costruibili su tale insieme X sono quelle i cui insiemi sono **totalmente ordinati per inclusione** ovvero:

1. $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$
2. $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$

$$3. \tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$4. \tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$$

$$5. \tau = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, c\}\}$$

$$6. \tau = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$$

oppure le topologie definite per **partizione** dell'insieme X quali:

$$1. \tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$$

$$2. \tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}$$

$$3. \tau = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}\}$$

Esempio 7.3 (Topologie banali) Le topologie banali sono la **topologia indiscreta**, che contiene il numero minimo di aperti, e la **topologia discreta**, che contiene tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{P}(X)$. In dettaglio si ha che la **topologia indiscreta** definita come segue:

$$\forall X, \tau = \{X, \emptyset\} \quad (71)$$

soddisfa le proprietà della definizione (7.2) e lo stesso vale per la topologia discreta definita come segue:

$$\forall X, \tau = \mathcal{P}(X) \quad (72)$$

Nota 7.1 Se si definisce:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (73)$$

come segue:

$$d(x, y) \begin{cases} > 0 \text{ se } x \neq y \\ = 0 \text{ se } x = y \end{cases} \quad (74)$$

si ha che **d** è una distanza perchè soddisfa i relativi assiomi ovvero:

$$1. d(x, y) > 0 \text{ se } x \neq y \text{ e } d(x, y) = 0 \text{ se } x = y,$$

$$2. d(x, y) = d(y, x),$$

$$3. d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Considerando un insieme X posso definire un intorno di raggio $\varepsilon < 1$ e centro $x \in X$ (vedi figura 11) che contiene il punto x stesso. Si vede facilmente come gli intorni sono *insiemi aperti*. Si ricorda che un insieme X si dice *aperto* se tutti i suoi punti x sono interni ovvero se ciascuno di essi possiede almeno un intorno tutto contenuto nell'insieme. Si sfruttano i seguenti fatti:

1. i punti $p \in X$ sono insiemi aperti perchè visti come insiemi singoletto $\{p\}$ non contengono punti interni;
2. i punti in sè (ovevra visti in singoletti) sono punti isolati dato che posso trovare un aperto che li contiene e che è il singoletto corrispondente (vedi oltre);
3. ogni sottoinsieme unione di punti è un insieme aperto dato che unioni infinite di insiemi aperti sono un insieme aperto, per le proprietà della topologia τ (vedi la definizione 7.2)

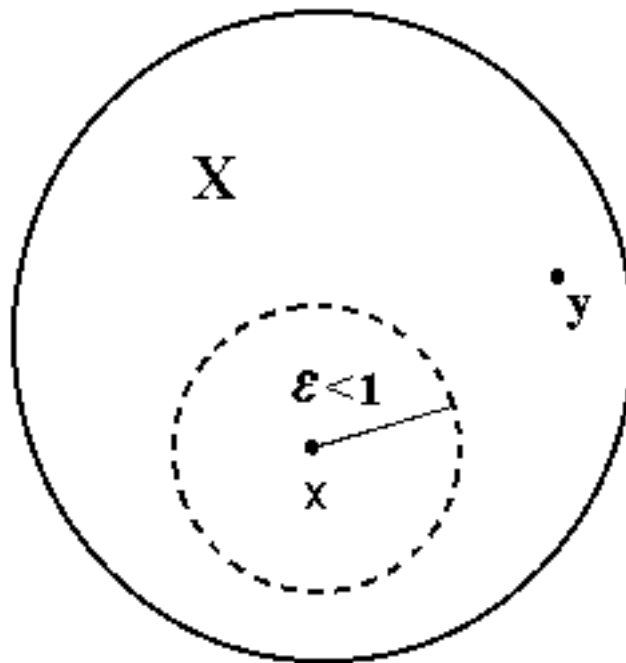


Figura 11: *Intorno (dettagli nel testo)*

Dagli esempi visti si ha che è possibile definire una relazione d'ordine (sia pure non completa) sulle topologie che è possibile definire su un insieme X . La relazione permette di stabilire, date due topologie τ e σ , quale contiene

un numero maggiore di aperti. Si dice, infatti, che la topologia τ è **più fine** o anche **più grande** della topologia σ (detta a sua volta **più grossolana** o **più debole** o **più piccola**) e si usa la notazione:

$$\sigma \subset \tau \quad (75)$$

se tutti gli insiemi aperti di σ sono anche aperti di τ ma non vale il viceversa per cui si hanno insieme aperti che stanno in τ ma non in σ . Da ciò segue anche che τ contiene più aperti di σ . In modo formale si ha che τ è più fine di σ se:

$$\forall A \in \sigma \Rightarrow A \in \tau \quad (76)$$

È immediato verificare che:

1. ogni topologia è più fine della topologia indiscreta (che contiene il minimo numero possibile di elememnti),
2. ogni topologia è meno fine della topologia discreta (che contiene il massimo numero possibile di elememnti).

Se si vuole che la relazione di ordinamento fra topologie consenta di affermare che:

$$\tau \subset \tau \quad (77)$$

è necessario interpretare la relazione più fine in *senso debole*. In tal modo la relazione $\subset$ viene ad avere le seguenti proprietà: *riflessiva* ($\tau \subset \tau$) e *transitiva* ($\sigma \subset \tau$ e $\tau \subset \mu \Rightarrow \sigma \subset \mu$). La relazione più fine di (denotata a rigore con $\subseteq$) non è completa perchè non necessariamente due topologie definite su un insieme X sono confrontabili, come si può capire facilmente esaminando le topologie dell'esempio 7.2. Ciò nonostante la relazione $\subseteq$ permette di creare una catena ordinata di topologie.

Esempio 7.4 *Date due topologie τ e σ si ha che:*

1. $\tau \cup \sigma$ in genere non è una topologia perchè posso avere $A_i \in \tau$ ma $A_i \notin \sigma$ per cui non varrebbero le proprietà che vedremo per l'intersezione,
2. $\tau \cap \sigma$ è una topologia se sono verificate le seguenti condizioni:

- (a) $\emptyset \in \tau$ e $\emptyset \in \sigma \Rightarrow \emptyset \in \tau \cap \sigma$
- (b) $X \in \tau$ e $X \in \sigma \Rightarrow X \in \tau \cap \sigma$
- (c) $(A_\lambda \in \tau \Rightarrow \cup_\lambda A_\lambda \in \tau$ e $A_\lambda \in \sigma \Rightarrow \cup_\lambda A_\lambda \in \sigma) \Rightarrow \cup_\lambda A_\lambda \in \tau \cap \sigma$
- (d) $(A_i \in \tau \Rightarrow \cap_i A_i \in \tau$ e $A_i \in \sigma \Rightarrow \cap_i A_i \in \sigma) \Rightarrow \cap_i A_i \in \tau \cap \sigma$

Esercizio 7.1 *Date due topologie τ e σ si dimostri che $\tau \cap \sigma$ è la topologia più fine fra le meno fini contenute in τ e σ*

Nota 7.2 *Per risolvere l'esercizio si devono costruire le catene:*

$$\tau \supset \tau_1 \supset \tau_2 \dots \tau_n \supset \{\emptyset, X\} \quad (78)$$

$$\sigma \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \dots \sigma_n \supset \{\emptyset, X\} \quad (79)$$

e dimostrare che $\tau \cap \sigma \in \tau$ e $\tau \cap \sigma \in \sigma$.

Si danno ora alcune definizioni.

Definizione 7.3 (Insieme chiuso) *Un insieme $C \subset (X, \tau)$ si dice chiuso¹ sse è il complementare di un insieme aperto cioè sse si ha:*

$$C = A^C \quad A \in \tau \quad (80)$$

Definizione 7.4 (Proprietà duali degli insiemi chiusi) *Per gli insiemi chiusi valgono proprietà analoghe a quelle viste per gli insiemi aperti. Ovvero*

$$\emptyset \text{ e } X \quad (81)$$

sono insiemi chiusi. Infatti $\emptyset$ è chiuso perchè è il complementare di X che è aperto mentre X è chiuso perchè è il complementare di $\emptyset$ che è aperto. Si noti che $\emptyset$ e X sono sia aperti sia chiusi.

$$\cap_{\lambda} C_{\lambda} \text{ chiuso se lo sono i } C_{\lambda} \quad (82)$$

$$\cup_i C_i \text{ chiuso se lo sono i } C_i \quad (83)$$

Nota 7.3 (Leggi di De Morgan) *Le si usa per passare dalle proprietà per gli insiemi aperti alle duali valide per gli insiemi chiusi e sono valide quale che sia l'insieme di indici Λ al cui interno si prende λ , sia esso finito o infinito:*

$$(\cup_{\lambda} A_{\lambda})^C = \cap_{\lambda} A_{\lambda}^C \quad (84)$$

$$(\cap_{\lambda} A_{\lambda})^C = \cup_{\lambda} A_{\lambda}^C \quad (85)$$

Nota 7.4 *Si vede facilmente come si possa passare dalle proprietà degli insiemi aperti a quelle degli insiemi chiusi (e viceversa) utilizzando le **leggi di De Morgan**.*

¹Nelle presenti note il complemento di un insieme A sarà indicato solamente (a meno di sviste locali) come A^C .

Nota 7.5 (Dualità) *La relazione di dualità che esiste fra gli insiemi chiusi e gli insiemi aperti si estende alle proposizioni e si dimostra utile in molte occasioni. Data una proposizione P vera se ne può ricavare un'altra altrettanto vera $\tilde{P}$ sostituendo la parola aperto (e simili) con chiuso (e simili) i simboli $\cap$ con $\cup$ e viceversa e invertendo le inclusioni. Ad esempio dalla $A \subset B$, vera, si può derivare un'altra proposizione $A^C \supset B^C$, altrettanto vera in forza del principio di dualità appena enunciato.*

Applicando il principio di dualità si ha che, dato un insieme X su cui si definisce una topologia degli aperti τ , si può ricavare una topologia sugli insiemi chiusi $\hat{\tau}$ che soddisfa le proprietà della definizione 7.4. Si hanno due *mondi duali*:

1. un mondo con X e $\hat{\tau}$ in cui gli insiemi chiusi sono primari e gli insiemi aperti sono derivati,
2. un mondo con X e τ in cui gli insiemi aperti sono primari e gli insiemi chiusi sono derivati.

Esempio 7.5 *Dato un insieme X su di esso si possono definire le seguenti topologie.*

1. **topologia indiscreta:** la famiglia degli aperti τ contiene solo gli insiemi $\emptyset$ e X e coincide con la famiglia $\hat{\tau}$ dei chiusi dal momento che $\emptyset^C = X$ e che $X^C = \emptyset$,
2. **topologia discreta:** la famiglia degli aperti τ coincide con $\mathcal{P}(X)$ per cui se ho $A \in \tau$ ho:
 - (a) $A^C \in \tau$ ovvero A^C è aperto per come ho definito τ e
 - (b) A^C è chiuso perchè complemento di un aperto.

Dato che τ contiene tutti i possibili sottoinsiemi di X se $A \in \tau$ allora anche $A^C \in \tau$ per cui A^C è sia aperto (perchè è in τ) sia chiuso (perchè complemento di un aperto) e ciò vale $\forall A \in \tau$ per cui nella topologia discreta tutti gli insiemi sono sia aperti sia chiusi. Lo stesso vale per i singoletti ovvero per gli insiemi contenenti un solo elemento di X .

3. **topologia generica:** se considero $X = \{a, b, c, d\}$ e come topologia considero la famiglia di sottoinsiemi:

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\} \quad (86)$$

come topologia degli aperti, come corrispondente topologia dei chiusi ho:

$$\hat{\tau} = \{\emptyset, \{b, c, d\}, X\} \quad (87)$$

7.2 Chiusura e interno

Dato un insieme X e una famiglia di suoi sottoinsiemi che soddisfa le proprietà della definizione 7.2 posso considerare un elemento B della topologia $(X, \tau)^2$ di cui definisco la chiusura.

Definizione 7.5 (Chiusura) Dato $B \in (X, \tau)$ si definisce la chiusura di B , indicata con $\overline{B}$, come:

$$\overline{B} = \cap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \quad (88)$$

dove gli insiemi C_λ sono insiemi chiusi tali che $C_\lambda \supset B \forall \lambda \in \Lambda$. La chiusura di B è l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi che contengono B ovvero è il più piccolo insieme chiuso che contiene B . La $\cap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ è una intersezione di un numero qualunque di insiemi chiusi per cui è un insieme chiuso (si considera una topologia di insiemi chiusi). Lo stesso dicasi per $\overline{B}$ che gode delle seguenti proprietà:

1. $\overline{B} \supset B$, deriva dalla definizione di $\overline{B}$ e dal fatto che $C_\lambda \supset B$,
2. $\overline{\emptyset} = \emptyset$, deriva dalla precedente e dal fatto che $\overline{\emptyset} \supset \emptyset \Rightarrow \overline{\emptyset} = \emptyset$,
3. $\overline{X} = X$,
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
5. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
6. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, idempotenza della chiusura,
7. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$, deriva dalla definizione di chiusura e dal fatto che si ha $A_\lambda \supset A$ e $B_\lambda \supset B$,
8. A è chiuso sse $A = \overline{A}$.

Nota 7.6 Come vedremo meglio in seguito si ha:

1. se B è chiuso allora $\overline{B} = B$;
2. se $\overline{B} = B$ allora B è chiuso.

Dato il concetto di chiusura di un insieme qualunque B si ha il suo duale che diremo **interno** e che è ottenibile utilizzando la dualità.

²Nelle presenti note quando si trova il riferimento ad una topologia si deve tenere presente che di solito si parla di una topologia sugli aperti, sottoinsiemi di un universo X noto e contenuti in una famiglia τ . In alcuni casi la specifica dell'insieme X può mancare oppure può mancare la specifica della famiglia τ .

Definizione 7.6 (Interno di un insieme B) Dato un insieme $B \subset X$ si definisce **interno di B** e lo si indica con $\dot{B}$:

$$\dot{B} = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad (89)$$

dove gli insiemi A_λ sono gli insiemi aperti contenuti in B ovvero sono gli insiemi aperti tali che $A_\lambda \subset B$.

La definizione di interno è la duale di quella di chiusura: si ha $\cup$ invece di $\cap$, *aperto* invece di *chiuso* e $\subset$ invece di $\supset$. Parafrasando le definizioni si ha che nel caso della chiusura di B non si può ottenere meno di B mentre non si può ottenere più di B nel caso dell'interno.

Definizione 7.7 (Proprietà dell'interno di un insieme) L'interno di un insieme A o B o di una coppia di insiemi A e B gode delle proprietà duali della chiusura:

1. $\dot{B} \subset B$, deriva dalla definizione,
2. $\dot{\emptyset} = \emptyset$,
3. $\dot{X} = X$,
4. $\overline{\dot{A} \cap \dot{B}} = \dot{A} \cap \dot{B}$,
5. $\overline{\dot{A} \cup \dot{B}} = \dot{A} \cup \dot{B}$,
6. $\dot{\dot{A}} = \dot{A}$, idempotenza dell'operatore "interno di"
7. $A \subset B \Rightarrow \dot{A} \subset \dot{B}$
8. A aperto sse $A = \dot{A}$

Le proprietà di cui ai punti 4. e 5. dipendono anche dalle proprietà della chiusura prima elencate.

Si hanno anche le seguenti proprietà:

1. $\dot{\dot{A}} = \dot{A}$,
2. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

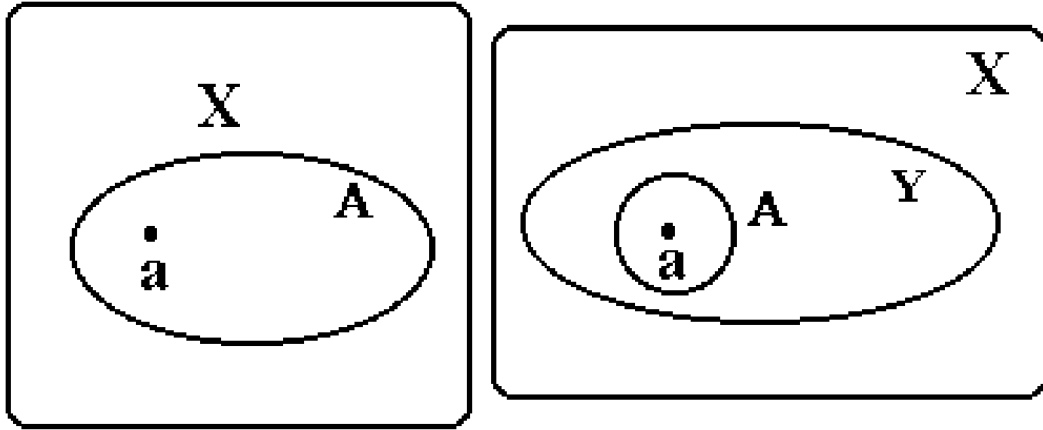


Figura 12: *Intorni un punto (dettagli nel testo)*

Esercizio 7.2 *Dati un insieme B e due famiglie di insiemi A_λ e C_λ con $\lambda \in \Lambda$ (insieme qualunque di indici) si definiscono la chiusura e l'interno di B come:*

$$\overline{B} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \quad (90)$$

$$\dot{B} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad (91)$$

con C_λ chiusi tali che $C_\lambda \supset B$ e A_λ aperti tali che $A_\lambda \subset B$. Si vuole dimostrare che $\overline{B}$ e $\dot{B}$ sono rispettivamente il più piccolo (in senso insiemistico, per l'inclusione) chiuso che contiene B e il più grande aperto contenuto in B .

Considerando una topologia τ degli insiemi aperti in un universo X (vedi la parte sinistra della figura 12) si definisce un **intorno aperto** di $a \in A$, $\forall A \in \tau$, come un qualunque aperto che contiene a . Ogni punto a ha almeno un intorno aperto che lo contiene e tale intorno è l'universo X . Un altro modo di definire un intorno di $a \in X$ è quello mostrato nella parte destra della figura 12: come intorno di a si considera un sottoinsieme Y di X al cui interno si ha un aperto A del punto a . Formalmente:

$$\forall Y \subset X \exists A \text{ tale che } a \in A \subset Y \quad (92)$$

cioè Y è un intorno di a se contiene un insieme aperto $A \in \tau$ tale che $a \in A$. Il ruolo che negli spazi metrici è giocato dagli intervalli è giocato in topologia dagli intorni.

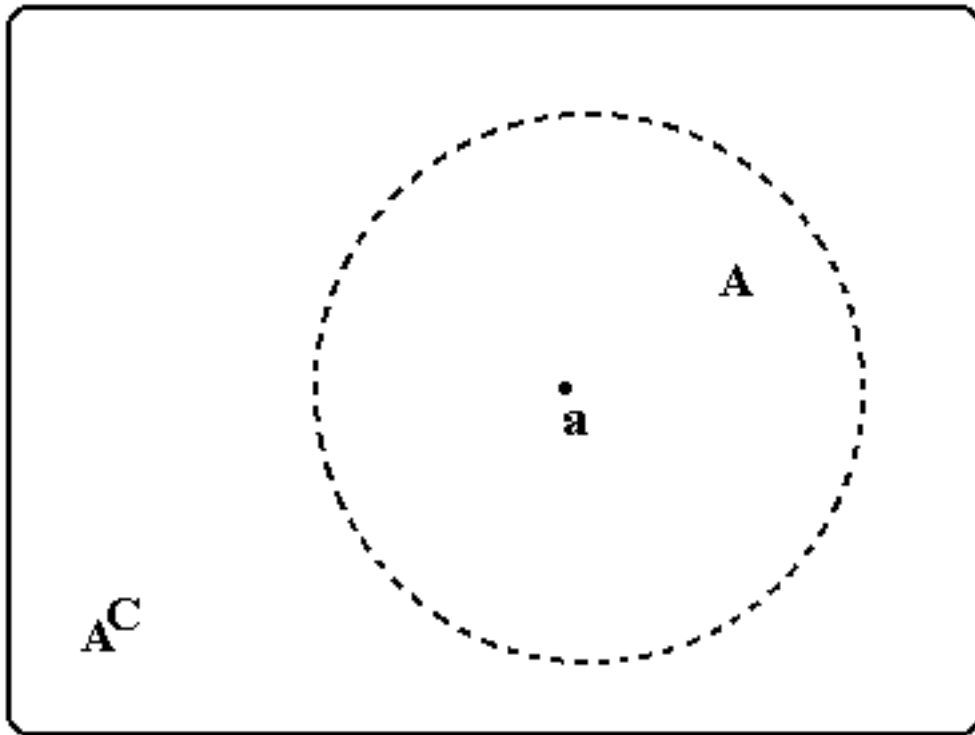


Figura 13: *Intorno nel caso di insiemi aperti*, dettagli nel testo

7.3 Caratterizzazione dei punti

Dato un punto $a \in X$ (vedi la figura 13) un suo intorno aperto è un insieme $A \in \tau$ il cui complementare A^C è chiuso e non contiene a (ovvero $a \notin A^C$).

Dato che non si può far ricorso al concetto di distanza si definisce come punto vicino ad un punto a dato ogni punto contenuto in un intorno aperto che contiene il punto a . Con tale caratterizzazione si possono classificare i punti come:

1. di frontiera,
2. interni,
3. di accumulazione,
4. isolati,
5. esterni.

Definizione 7.8 (Classificazione dei punti) Data la topologia (X, τ) e un insieme $Y \subset X$ si ha:

1. $y \in Y$ si dice punto interno di Y se $y \in \dot{Y}$ cioè $y \in Y$ è punto interno di Y se $\exists A \in \tau$ tale che $A \subset Y$ e $y \in A$;
2. $y \notin Y$ è esterno a Y se esiste un intorno U di y tale che $U \cap Y = \emptyset$ ovvero se $y \in \dot{Y}^C$;
3. $y \in Y$ si dice punto isolato di Y se esiste un intorno U di y tale che $U \cap Y = \{y\}$;
4. $y \in X$ si dice punto di frontiera per Y se esiste un intorno U di y tale che $U \cap Y \neq \emptyset$ e $U \cap Y^C \neq \emptyset$ cioè se ogni intorno di y contiene sia punti interni sia punti esterni;
5. $y \in Y$ si dice punto di accumulazione di Y se per ogni intorno U di y si ha che $(U \cap Y) \setminus \{y\} \neq \emptyset$. Tale condizione equivale alla seguente: $(U \setminus \{y\}) \cap Y \neq \emptyset$.

Nota 7.7 Dalla definizione di punto isolato e di punto di accumulazione segue che **un punto isolato non può essere punto di accumulazione** e che **un punto isolato è un punto di frontiera**: si ha un intorno che contiene solo $y \in Y$ e tutti gli altri punti dell'intorno appartengono a Y^C .

Nota 7.8 (Simbologia) Dato un insieme Y con ∂Y indicheremo l'insieme dei punti di frontiera e con DY o $D(Y)$ (o derivato di Y) l'insieme dei punti di accumulazione di Y .

Nota 7.9 (Cautele) Le seguenti affermazioni non hanno validità generale:

1. la chiusura di un insieme è data dalla unione dei punti dell'insieme e dei punti di accumulazione,
2. la chiusura di un insieme è data dalla unione dei punti interni e dei punti di frontiera.

Esempio 7.6 Si danno alcuni esempi per chiarire i concetti esposti (vedi la figura 14). Si ricorda che ci proponiamo di lavorare con una topologia di insiemi aperti (X, τ) .

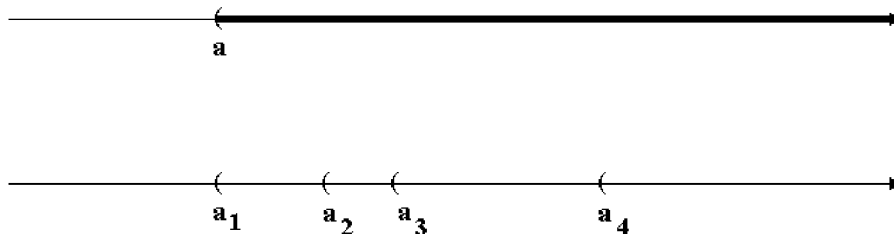


Figura 14: *Intorni su $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)*

1. $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{(a, +\infty)\} \cup \emptyset \cup \mathbb{R}$. Se a assume il valore $+\infty$ si ottiene $\emptyset$, se a assume il valore $-\infty$ si ottiene $\mathbb{R}$, per completezza è bene inserire esplicitamente tali insiemi in τ . Se a assume valori in $\mathbb{R}$ si hanno gli insiemi come quelli mostrati nella parte superiore della figura 14. La parte inferiore della figura 14 illustra il caso di una famiglia di insiemi $\cup A_\lambda$ con $A_\lambda = (a_\lambda, +\infty)$ dove $\lambda \in \mathbb{N}$.

Si ha:

- (a) $\cup_\lambda A_\lambda = (\alpha, +\infty)$ con $\alpha = \inf(a_\lambda)$ ovvero $\alpha \notin \cup_\lambda A_\lambda$ per cui per ogni λ si ha $\alpha \notin A_\lambda$;
- (b) $\cap_\lambda A_\lambda = (\alpha, +\infty)$ con $\alpha = \max(a_\lambda)$ ovvero per ogni λ si ha $\alpha \in A_\lambda$.

2. Da quanto visto al punto precedente si ha:

- (a) l'unione di semirette è una semiretta,
- (b) l'intersezione di semirette è una semiretta.

3. Se ho un numero infinito di semirette (insiemi aperti) la loro intersezione non è necessariamente un insieme aperto. Ad esempio se ho:

$$\cap_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}, +\infty) \quad (93)$$

passando al limite $n \rightarrow +\infty$ e sfruttando il fatto che il punto 1 è comune a tutti gli intervalli $(1 - \frac{1}{n}, +\infty)$ si ottiene l'insieme chiuso $[1, +\infty)$.

4. Se considero $\tau = \{(a, +\infty)\}$, con $a \in \mathbb{R}$, gli insiemi aperti $\{(a, +\infty)\}$ hanno come insiemi chiusi corrispondenti gli insiemi $(-\infty, a]$ cui corrisponde una topologia degli insiemi chiusi $\hat{\tau} = (-\infty, a]$.

5. Si ha:

$$\cap_n (-\infty, -n] = \emptyset \text{ con } n \in \mathbb{N}. \quad (94)$$

6. Nella topologia di cui al punto 1 due insiemi aperti non sono mai disgiunti, ovvero hanno sempre intersezione non vuota (vedi la figura 14).



Figura 15: Intorni aperti di x su $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)

7. Se considero gli insiemi aperti del tipo $(a, +\infty)$ un intorno di x è un intervallo aperto che contiene x ovvero è una semiretta del tipo mostrato in figura 15. Il punto x è di accumulazione rispetto all'insieme $(a, +\infty)$ che lo contiene perchè data la semiretta $(a, +\infty)$ tutti i suoi punti sono punti di accumulazione. Discorsi analoghi, *mutatis mutandis*, valgono nel caso di insiemi aperti del tipo $(-\infty, a)$.

8 Terza Lezione

Si riprendono gli esempi fatti alla fine della lezione precedente introducendo un'altra topologia particolare detta *topologia di Zarinski*, topologia che sarà spesso utilizzata per ricavare controesempi di proposizioni che si vogliono dimostrare false.

Definizione 8.1 (Topologia di Zarinski) *Dato un insieme X considero come elementi della topologia degli insiemi chiusi $\hat{\tau}$ i sottoinsiemi finiti (ovvero con un numero finito di elementi) di X cui aggiungo $\emptyset$ e X . Se, invece, lavoro su insiemi aperti nella topologia metto gli insiemi i cui complementi sono insiemi finiti.*

Gli insiemi della topologia così definita (sugli insiemi chiusi) soddisfano le proprietà degli insiemi chiusi ovvero:

1. $\emptyset$ e X chiusi,
2. se C_λ sono insiemi chiusi lo è $\cap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ (intersezione qualunque),
3. se C_i sono insiemi chiusi lo è $\cup_{i \in I} C_i$, con $I \subset \mathbb{N}$ (unione finita).

Se X è un insieme finito la topologia di Zarinski coincide con la topologia discreta in cui:

1. ogni insieme è aperto e chiuso allo stesso tempo,
2. i punti sono insiemi aperti e sono complementi di aperti ovvero sono chiusi (e viceversa).

Se X è un insieme infinito (ovvero contiene un numero infinito di elementi) non si può affermare che gli insiemi aperti siano necessariamente insiemi infiniti. Si considerano, per ipotesi, come aperti gli insiemi infiniti i cui complementi sono insiemi finiti. Si ha:

1. il complementare è l'unione di due chiusi,
2. i punti sono insiemi chiusi,
3. l'intersezione di tutti gli intorni **aperti** di un punto è il punto stesso ovvero $\forall x \in X$ se U_λ è un intorno **aperto** di x allora è $\cap_\lambda U_\lambda = \{x\}$.

Siconsideri un punto diverso $y \neq x$. L'insieme singoletto $\{y\}$ è finito e chiuso (perchè contiene tutti i suoi punti di accumulazione distinti da y dato che non ce ne sono) mentre $U_{\hat{\lambda}} = X \setminus \{y\}$ è aperto perchè è il complemento di un insieme chiuso (X è l'insieme universale). Se considero $x \in X \setminus \{y\} = U_{\hat{\lambda}}$ quando faccio $\cap_\lambda U_\lambda$ perdo y perchè nell'intersezione entra in gioco l'insieme $X \setminus \{y\}$ che non contiene y .

Esercizio 8.1 Dato uno spazio topologico qualunque (X, τ) si dimostri che le proprietà seguenti sono equivalenti:

1. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \{x\} \forall x$ e con U_λ intorno aperto di x ,
2. i singoletti $\{x\}$ sono insiemi chiusi

ovvero 1. $\Rightarrow$ 2. e 2. $\Rightarrow$ 1.

Per risolverlo si deve dimostrare una doppia implicazione. Se vale la 2. vuol dire che $\{x\}$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione (per definizione di insieme chiuso) per cui $D\{x\} = \emptyset$ in quanto non ho punti distinti da x in $\{x\}$. Dal momento che posso esprimere $\{x\}$ come intersezione di insiemi U_λ dalla 2. segue 1.

Esempio 8.1 Se considero $X = \mathbb{R}$ con l'ordinamento naturale $\leq$ e definisco:

$$\tau = \{A \mid \forall a \in A \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A\} \quad (95)$$

dove $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ è un insieme aperto allora ho che A è un aperto in $\mathbb{R}$ perchè per ogni punto $a \in A$ ho in intorno aperto contenuto in A .

Esempio 8.2 Dato un insieme X , se d è una distanza su X definisco una nuova distanza (sempre < 1):

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (96)$$

in base alla quale posso definire una nuova topologia τ' . A questo punto si deve verificare (**primo passo**) che la d' è realmente una distanza, ovvero che ne soddisfa gli assiomi di definizione, e poi (**secondo passo**) che le due topologie τ e τ' sono equivalenti.

Per il **primo passo** si ha:

1. $d'(x, y) \geq 0 \forall x, y$ vera perchè d è una distanza per cui $d(x, y) \geq 0 \forall x, y$;
2. $d'(x, x) = 0$ vera perchè d è una distanza per cui $d(x, x) = 0$,
3. $d'(x, y) = d'(y, x) \forall x, y$ vera perchè d è una distanza per cui $d(x, y) = d(y, x)$.

Resta da dimostrare la disuguaglianza triangolare ovvero che:

$$\forall x, y, z \quad d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z) \quad (97)$$

Si ha³:

³Si sfrutta il fatto che, su valori positivi, se $a < b$ e $c < d$ allora $a/c < b/d$ e che $a/(c+d) < a/c$.

$$\begin{aligned}
d'(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1+d(x, z)} \leq \frac{d(x, y)+d(y, z)}{1+d(x, y)+d(y, z)} = \\
&= \frac{\frac{d(x, y)}{1+d(x, y)+d(y, z)}}{\frac{1+d(x, y)+d(y, z)}{1+d(x, y)+d(y, z)}} + \frac{\frac{d(y, z)}{1+d(x, y)+d(y, z)}}{\frac{1+d(x, y)+d(y, z)}{1+d(x, y)+d(y, z)}} = \\
&\leq \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1+d(y, z)} = d'(x, y) + d'(y, z)
\end{aligned}$$

Per il **secondo passo** si deve dimostrare che le topologie τ e τ' sono equivalenti per cui $\tau = \tau'$. Tale dimostrazione può essere fatta in due modi:

1. con una doppia inclusione fra le topologie ovvero dimostrando che $\tau \subset \tau'$ e che $\tau' \subset \tau$,
2. dimostrando che ad ogni intorno di τ corrisponde un intorno di τ' e viceversa.

Nota 8.1 (Risultato preliminare) Per dimostrare l'equivalenza delle topologie si ha bisogno di un risultato preliminare che deriva dalla definizione di d' in funzione di d . Essendo:

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (98)$$

si ha $d' < 1$ e in più $d' \leq d$ e da ciò discende che gli intorni di τ' sono contenuti negli intorni di τ .

Esempio 8.3 Dati due spazi metrici (X, d) e $(X, \hat{d})$ con le rispettive distanze d e $\hat{d}$ se:

$$\forall x, y \in X \quad \hat{d}(x, y) \leq d(x, y) \quad (99)$$

con $\hat{d}$ che definisce la topologia $\hat{\tau}$ e d che definisce la topologia τ si ha che $\hat{\tau}$ è meno fine di τ cioè $\hat{\tau} \subset \tau$ e quindi $\hat{\tau}$ ha meno aperti di τ .

8.1 Continuità

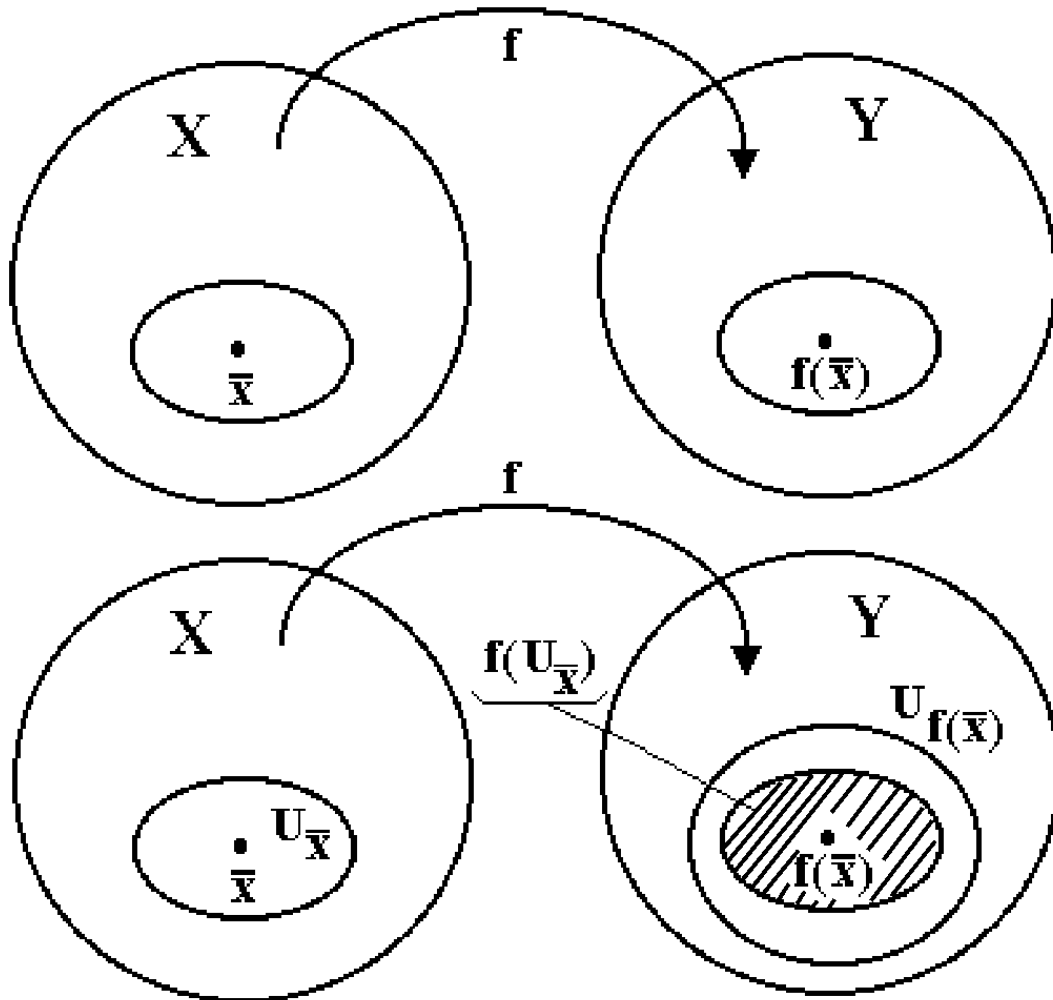


Figura 16: Funzioni fra spazi topologici (dettagli nel testo)

Dati due spazi topologici X e Y (vedi la parte superiore della figura 16) e data la funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (100)$$

su X si ha la topologia τ_X e su Y si ha la topologia τ_Y .

Definizione 8.2 (Continuità) La funzione f è continua in un punto $\bar{x} \in X$ se comunque si prende un intorno $U_{f(\bar{x})} \subset Y$ $\exists$ un intorno $U_{\bar{x}}$ tale che $f(U_{\bar{x}}) \subset U_{f(\bar{x})}$ (vedi la parte inferiore della figura 16). La funzione f si dice continua in X se è continua per tutti i punti $x \in X$.

Teorema 8.1 (Continuità per controimmagini) *La funzione:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (101)$$

è **continua** sse la controimmagine di un insieme aperto qualunque di τ_Y è un insieme aperto di τ_X cioè sse:

$$\forall B \in \tau_Y \quad f^{-1}(B) \in \tau_X \quad (102)$$

dove la f^{-1} non rappresenta l'inversa della f , che in generale non esiste a meno di ipotesi sulla f . Al proposito vedi il Capitolo 3.

Esempio 8.4 Si abbiano due topologie τ e σ ovvero due spazi topologici (X, τ) e (X, σ) e si consideri la funzione identità definita come segue:

$$id_x X, \tau \longrightarrow X, \sigma \quad (103)$$

in modo che sia $id_x(x) = x \quad \forall x \in X$.

La funzione id_x è continua sse ogni aperto di σ è aperto in τ cioè sse $\sigma \subset \tau$ ovvero sse σ è meno fine di τ ovvero se ci sono più aperti in τ che in σ . La continuità per controimmagine di aperti è facilmente verificabile in quanto dalla definizione di id_x si ha che $id_x^{-1} = id_x$ e, quindi, dato B aperto, $B \in \sigma$ si ha $id_x^{-1}(B) = B$ aperto in τ . La topologia τ contiene tutti gli aperti di σ più altri insiemi aperti.

Da quanto visto si ha che se la id_x è continua $\Rightarrow \sigma \subset \tau$ e che se $\sigma \subset \tau \Rightarrow id_x$ è continua. Si noti, tuttavia, che gli spazi di partenza e di arrivo sono diversi perchè le topologie τ e σ sono diverse sebbene la funzione identità mappi aperti su aperti identici.

Se si ha:

$$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma) \quad (104)$$

dove σ è la topologia indiscreta (ovvero $\sigma = \{\emptyset, Y\}$ in cui posso avere $Y = X$ oppure $Y \neq X$). In questo caso ogni funzione f è continua.

Per vederlo devo dimostrare che la controimmagine di un aperto è un aperto e considero che:

1. se $\emptyset$ è aperto in σ ho $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ aperto in τ ,
2. se Y è aperto in σ ho $f^{-1}(Y) = X$ aperto in τ

e questo per definizione di topologia (la prima proprietà di una topologia su un insieme X prevede che sia $\emptyset$ sia X appartengano alla topologia).

Se in X ho tanti insiemi aperti la funzione $f : X \longrightarrow Y$ tende ad essere continua fino al caso limite in cui se su X ho la topologia discreta τ allora

la f è continua. Per verificarlo sfrutto il fatto che l'immagine inversa di un aperto deve essere un aperto per cui preso un $Y' \in \sigma$, per definizione di τ topologia discreta, l'insieme $f^{-1}(Y')$ è un elemento di τ e, pertanto, è un aperto da cui la continuità della f .

Esempio 8.5 Date due distanze d e $\hat{d}$ mediante le quali sono definite due topologie (X, d) e $(X, \hat{d})$ con

$$\hat{d}(x, y) \leq d(x, y) \quad (105)$$

Se prendo la funzione

$$id_x (X, d) \longrightarrow (X, \hat{d}) \quad (106)$$

per dimostrare che id_x è continua si può far vedere che $(X, \hat{d})$ ha una topologia meno fine di (X, d) perchè se ciò è vero si ha che la funzione id_x è continua.

8.2 Successioni e convergenza

Negli spazi topologici si possono introdurre i concetti di:

1. successione,
2. convergenza di successioni.

Definizione 8.3 (Successioni) Dato uno spazio topologico (X, τ) una successione è una funzione:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X \quad (107)$$

che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ fa corrispondere un elemento x_n di X . La notazione per le successioni è $\{x_n\}_n$ e in tal modo si individua un sottoinsieme di X ovvero $\{x_n\}_n \subset X$. Si usa la notazione $\langle x_n \rangle$ per denotare la funzione.

Definizione 8.4 (Convergenza) Una successione $\{x_n\}_n$ è convergente a $\bar{x}$ ovvero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \quad (108)$$

sse $\forall U_{\bar{x}}$ intorno di $\bar{x} \exists n_{U_{\bar{x}}} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_{U_{\bar{x}}}$ si ha $x_n \in U_{\bar{x}}$ e cioè se a partire da un certo indice in poi tutti i termini della successione (e quindi tutti tranne un numero finito) sono nell'intorno del punto di convergenza.

Teorema 8.2 (Chiusura per successioni) *Si abbia un insieme $B \subset X$ **chiuso** e si abbia una successione $\{x_n\}_n \subset B$ con $x_n \in B \forall n$. Se:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \quad (109)$$

allora $\bar{x} \in B$ cioè se un insieme è chiuso contiene i limiti delle successioni convergenti composte da punti dell'insieme.

Dimostrazione

La dimostrazione è per assurdo ovvero si nega la tesi e si suppone che $\bar{x} \notin B$ per cui $\bar{x} \in B^C$, con B^C aperto perchè complementare di B , che è un insieme chiuso per ipotesi.

Dal fatto che $\bar{x} \in B^C$ segue che B^C è un intorno di $\bar{x}$ che non contiene nessun punto della successione $\{x_n\}_n$ (dal momento che tali punti sono in B) per cui $\bar{x}$ non può essere punto limite per $\{x_n\}_n$ contro l'ipotesi che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ per cui è falsa la tesi negata e quindi è vera la tesi per cui $\bar{x} \in B$.

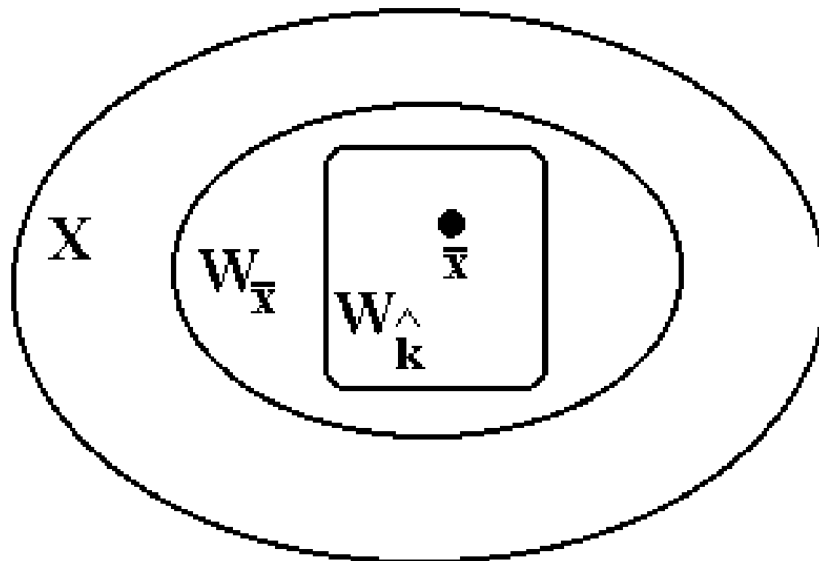


Figura 17: *Sistema fondamentale di intorni (dettagli nel testo)*

Ci si chiede se sia vero il viceversa ovvero dato $\bar{x} \in B$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ e $\{x_n\}_n \subset B$ si può dire che B è un insieme chiuso? In generale no. L'affermazione precedente vale solo nel caso di spazi normati (o metrici) e un controesempio è $\mathbb{R}$ con la **topologia di Zarinski** nella quale gli insiemi chiusi sono insiemi finiti. Presa una successione $\{x_n\}_n$ di tipo non stazionario,

ovvero caratterizzata da infiniti termini, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \quad (110)$$

cioè si ha che la successione $\{x_n\}_n$ converge a tutti i punti di $\mathbb{R}$ ovvero si ha la convergenza qualunque sia il numero reale $\bar{x}$ scelto. Da un certo indice $\bar{n}$ in poi i termini della successione $\{x_n\}_n$ sono contenuti in un intorno di $\bar{x}$ detto $U_{\bar{x}}$. Al di fuori di $U_{\bar{x}}$ ho un numero finito di elementi della successione $\{x_n\}_n$ mentre gli infiniti elementi della successione per $n > \bar{n}$ sono tutti in $U_{\bar{x}}$.

Le successioni non stazionarie convergono a qualunque punto in $\mathbb{R}$. Preso un qualunque $B \subset \mathbb{R}$ considero una qualunque $\{x_n\}_n \subset B$ con:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \quad (111)$$

ovvero ogni punto di B è limite di una successione di punti di B . Vedremo che la topologia di Zarinski non soddisfa un assioma fondamentale per cui è un controesempio alla richiesta che, dato $\bar{x} \in B$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ e $\{x_n\}_n \subset B$, si possa dire che B è un insieme chiuso.

Definizione 8.5 (Spazio fondamentale di intorni) *Dato uno spazio topologico (X, τ) e dato un punto $\bar{x} \in X$ si definisce:*

$$W = \{U_k\}_{k \in K} \quad (112)$$

*ovvero una famiglia di opportuni intorni U_k di $\bar{x}$. W in generale è infinito. Si dice che W è un **sistema fondamentale di intorni** (vedi la figura 17) se gode della seguente proprietà:*

1. $\forall W_{\bar{x}}$ intorno di $\bar{x} \exists \hat{k}$ tale che $\bar{x} \in W_{\hat{k}} \subset W_{\bar{x}}$.

Ciò va bene se K è una famiglia “buona” e ciò accade se K è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.

9 Quarta Lezione

Esempio 9.1 Dato uno spazio metrico (X, d) con la distanza d , si considerino gli **insiemi telescopici** così denominati perchè contenuti uno dentro gli altri e definiti come segue:

$$\{I(\bar{x}, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (113)$$

Dalla definizione (113) discendono gli insiemi $I(\bar{x}, 1)$, $I(\bar{x}, 1/2)$, $I(\bar{x}, 1/3)$ e così via che rappresentano un **sistema fondamentale di intorni numerabili** di centro $\bar{x}$ e ampiezza $1/n$ detti $W_{\bar{x}}$. Tale costruzione non vale in generale ma solo nel caso degli spazi metrici.

Esempio 9.2 (Controesempio) Vediamo il caso di $\mathbb{R}$ con la topologia di Zarinski. Considero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e procedo per assurdo. Si considera un **sistema**

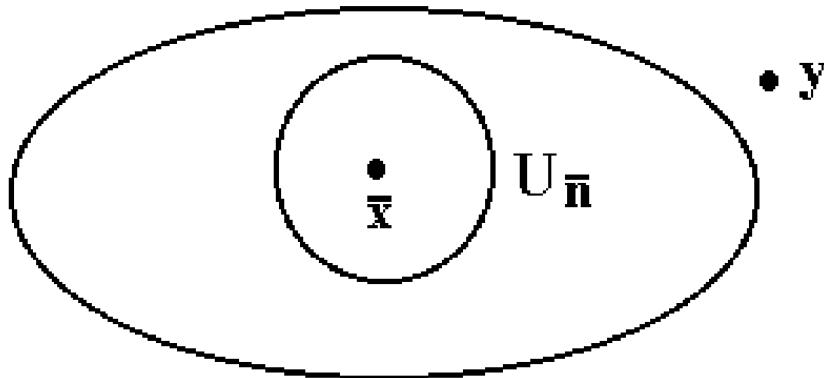


Figura 18: Sistema fondamentale di intorni (dettagli nel testo)

fondamentale di intorni (vedi la figura 18) $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e si definisce la:

$$\cap_n U_n = \{\bar{x}\} \quad (114)$$

Preso il punto y si ha che $\{y\}$ è un chiuso (perchè contiene tutti i suoi punti di accumulazione che non ci sono essendo $D(\{y\}) = \emptyset$) per cui $\{y\}^C$ è un aperto. Dalla (114) si ha che esiste un indice $\bar{n}$ che individua un elemento del sistema fondamentale di intorni $U_{\bar{n}}$ che non contiene il punto y qualunque esso sia cioè comunque scelgo y esiste un valore $\bar{n}$ che individua un insieme $U_{\bar{n}}$ che non contiene y per cui nella $\cap_n U_n$ perdo ogni elemento diverso da $\bar{x}$

ed ho solo $\bar{x}$.

Dalla (114) complementando m. a m. si ha:

$$(\cap_n U_n)^C = \mathbb{R} \setminus \{\bar{x}\} \quad (115)$$

ovvero

$$\cup_n U_n^C = \mathbb{R} \setminus \{\bar{x}\} \quad (116)$$

dove gli insiemi U_n^C sono insiemi finiti perchè complementari di insiemi infiniti (nella topologia di Zarinski i chiusi sono insiemi finiti). Siamo arrivati ad una contraddizione: si ha, infatti, una unione numerabile di insiemi finiti, ovvero un insieme contabile, che sarebbe uguale a un insieme non contabile (ovvero $\mathbb{R} \setminus \{\bar{x}\}$). Gli spazi per i quali la proprietà detta è verificata hanno una denominazione particolare che verrà introdotta nella prossima sezione.

9.1 Primo contabile

Si dice che uno spazio topologico (X, τ) soddisfa il **primo assioma di numerabilità** ovvero è **primo contabile** se per ogni punto $\bar{x} \in X$ ammette un insieme fondamentale di intorni che è numerabile ovvero contabile.

Definizione 9.1 *Uno spazio topologico X è detto essere **primo contabile** se soddisfa il **primo assioma di numerabilità**: per ogni $p \in X$ esiste una classe numerabile di insiemi aperti $\mathcal{B}_p$ che contengono p tali che per ogni insieme aperto G che contiene p si ha:*

$$p \in B_p \subset G \quad (117)$$

per un qualche $B_p \subset \mathcal{B}_p$.

Nota 9.1 *Si noti che $\mathbb{R}$ con la topologia di Zarinski non è primo contabile.*

Nota 9.2 *Dato uno spazio metrico X e un punto $p \in X$ se considero la classe numerabile delle sfere aperte di centro p :*

$$\left\{ S\left(p, \frac{1}{n}\right) \right\} \quad n \in \mathbb{N} \quad (118)$$

è una base locale (ovvero un sistema fondamentale di intorni) in p che soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Nota 9.3 *Se X è uno spazio topologico con la topologia discreta si ha che ogni singoletto $\{p\}$ è aperto ed è contenuto in ogni insieme aperto G che contiene $p \in X$ per cui soddisfa il primo assioma ed è primo contabile.*

Teorema 9.1 Sia (X, τ) **primo contabile**. Se considero $B \subset X$ tale che $\forall \{x_n\}_n \subset B$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \in B \iff B \text{ è chiuso.}$$

Nota 9.4 La condizione vista è necessaria e sufficiente. Nella direzione $\Leftarrow$ non si richiede il primo assioma mentre l'assioma è necessario nella direzione $\Rightarrow$. La dimostrazione viene fatta per assurdo: si suppone B non chiuso e si costruisce, usando il primo assioma, una successione di punti di B che non converge ad un punto di B .

Nota 9.5 Come detto la dimostrazione è per assurdo ovvero si suppone che B non sia chiuso e che sia tale che $\forall \{x_n\}_n \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \in B$. Posso costruire una successione per cui non vale tale proprietà ovvero per la quale si ha $x_n \rightarrow \bar{x}$ ma $\bar{x} \notin B$.

Teorema 9.2 (Teorema di continuità per successioni) Il presente teorema si compone di due parti:

1. una valida sempre,
2. una vera se vale il primo assioma di contabilità.

Si inizia considerando una funzione fra spazi topologici X e Y :

$$f : X \longrightarrow Y \quad (119)$$

continua. So che $\forall \{x_n\}_n \subset X$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ si ha $\{f(x_n)\}_n \subset Y$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\bar{x}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)) \quad (120)$$

Si sfrutta il fatto che funzioni continue portano successioni convergenti in successioni convergenti per cui se si ha una successione in X che converge ad un punto in X la successione delle immagini converge all'immagine di tale punto. Dato che la f è continua (vedi la figura 19) esiste un intorno di $\bar{x}$, $U_{\bar{x}}$, che tramite la f viene mappato in $U_{f(\bar{x})}$. La successione $\{x_n\}_n$ converge a $\bar{x}$ per cui $\exists \bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ gli elementi della successione sono contenuti tutti in $U_{\bar{x}}$ (per definizione di successione convergente) mentre i punti della successione $\{f(x_n)\}_n$ sono contenuti nell'insieme (1) per cui il valore di $\bar{n}$ lo uso anche per dire da che punto in poi gli elementi della successione delle immagini sono contenuti in (1).

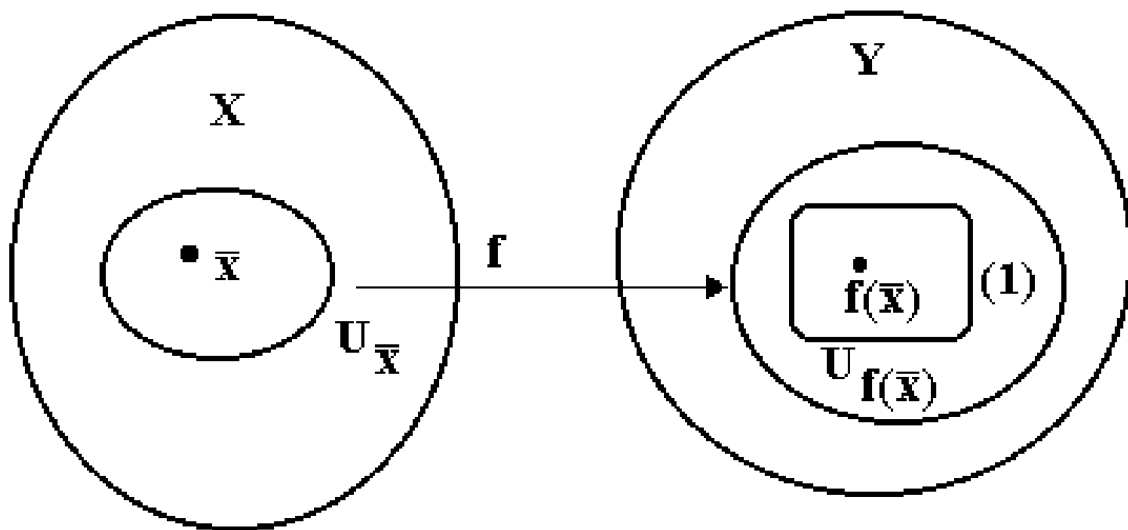


Figura 19: *Continuità per successioni (dettagli nel testo)*

Si vuole il *teorema inverso* in formulazione locale. Si parte sempre dalla funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (121)$$

(su cui non si fanno ipotesi) e da una successione $\{x_n\}_n \subset X$ convergente ad un punto $\bar{x}$. Si ha una successione corrispondente $\{f(x_n)\}_n$ convergente a $f(\bar{x})$ ma da ciò non si può concludere che la funzione f è continua. Perché sia possibile affermare che la f è continua è necessario che X sia primo contabile. Se ciò accade dalla convergenza delle successioni in X e delle rispettive immagini segue che la f è continua. La dimostrazione del presente **teorema inverso** la si fa per assurdo ovvero si nega la tesi e si suppone f non continua in $\bar{x} \in X$.

Sotto tale ipotesi esiste un intorno di $f(\bar{x})$, $U_{f(\bar{x})}$, tale che, comunque scelgo un intorno $U_{\bar{x}}$ di $\bar{x}$, la sua immagine $f(U_{\bar{x}})$ non è contenuta in $U_{f(\bar{x})}$ e ciò per il fatto che la f non è continua. Se fisso $U_{f(\bar{x})}$ e ipotizzo che X sia primo contabile posso considerare un sistema fondamentale di interni contenuti in X , $\{U_n\}$, tali che $U_n \supset U_{n+1}$ (senza perdita di generalità). Tale sistema fondamentale di interni esiste perché X è primo contabile.

Se suppongo di avere una base locale numerabile in $\bar{x}$ rappresentato dagli aperti V_i posso trovare una base locale annidata (ovvero un sistema fondamentale di interni) in modo costruttivo con il procedimento che segue.

Gli interni della successione $\{U_n\}$ tali che $U_n \supset U_{n+1}$ sono interni telescopici tali che:

1. $U_1 = V_1$
2. $U_2 = V_1 \cap V_2$
3. $U_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3$

e così via su un numero finito di insiemi aperti. Se $f(U_1)$ non è contenuto in $U_{f(\bar{x})}$ allora:

- $\exists x_1 \in U_1$ t.c. $f(x_1) \notin U_{f(\bar{x})}$,
- $\exists x_2 \in U_2$ t.c. $f(x_2) \notin U_{f(\bar{x})}$,
- $\vdots$
- $\exists x_n \in U_n$ t.c. $f(x_n) \notin U_{f(\bar{x})}$,

in questo modo si definisce una successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in U_n$ e $f(x_n) \notin U_{f(\bar{x})}$ con in più $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ma $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(\bar{x})$ perchè i punti $f(x_n)$ non sono contenuti in un intorno di $f(\bar{x})$ e quindi le immagini non convergono a $f(\bar{x})$ e ciò contro l'ipotesi per cui la f è continua.

Si sfrutta il fatto che X è primo contabile per costruire il controesempio.

Esercizio 9.1 *Date le distanze:*

$$\hat{d}(x, y) \leq d(x, y) \quad (122)$$

su uno spazio metrico X su cui si possono definire due topologie $\tau_{\hat{d}}$ e τ_d dimostrare che la prima è più fine della seconda ovvero che:

$$\tau_{\hat{d}} \subset \tau_d \quad (123)$$

Nota 9.6 *Dato uno spazio metrico X , con le distanze $\hat{d}$ e d definite nell'esercizio precedente, se si ha:*

$$\{x_n\} \xrightarrow{d} \bar{x} \quad (124)$$

allora è:

$$\{x_n\} \xrightarrow{\hat{d}} \bar{x} \quad (125)$$

ciò perchè:

$$d(x_n, \bar{x}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (126)$$

e per la (122). Sempre per la (122) so che:

$$\hat{d}(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, \bar{x}) \quad (127)$$

ma la $d(x_n, \bar{x})$ tende a 0 in modo da “schiacciare” a 0 la $\hat{d}(x_n, \bar{x})$.

Se ho:

$$X, d \xrightarrow{id_x} X, \hat{d} \quad (128)$$

con X, d spazio metrico per il quale vale il primo assioma di numerabilità ho che la id_x è continua sse trasforma successioni convergenti in successioni convergenti ovvero sse una successione $\{x_n\}$ convergente secondo d viene trasformata dalla id_x in una successione $\{x_n\}$ convergente secondo la $\hat{d}$. Da ciò discende che id_x è continua (porta successioni convergenti in successioni convergenti) per cui la topologia dello spazio di arrivo è meno fine di quella dello spazio di partenza e quindi $\hat{d}(x, y) \leq d(x, y)$.

Esercizio 9.2 Si dimostri la stessa proprietà:

$$\tau_{\hat{d}} \subset \tau_d \quad (129)$$

senza usare il metodo visto ma sfruttando la definizione di insiemi chiusi definiti come successioni.

Se ho X chiuso e considero $\{x_n\}_n \subset X$ con $x_n \rightarrow x \in X$:

$$\{x_n\} \xrightarrow{d} x \quad (130)$$

$$\{x_n\} \xrightarrow{\hat{d}} x \quad (131)$$

gli intorni chiusi di $\tau_{\hat{d}}$ lo sono anche in τ_d per cui questa ha più insiemi chiusi ed è meno fine e, pertanto, si ha $\tau_d \subset \tau_{\hat{d}}$.

9.2 Topologie e basi

Definizione 9.2 Una base per una topologia τ è una classe di insiemi $\mathcal{B} = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ di τ con certe proprietà. Dato uno spazio topologico (X, τ) , $\mathcal{B}$ è una famiglia di oggetti $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Se $\{B_\lambda\} \in \tau$ allora $\cup_\lambda B_\lambda$ è un insieme aperto e, in più, $\forall A \in \tau$ si ha:

$$A = \cup_{k \in K} B_k \quad (132)$$

dove i B_k sono aperti di τ e l'unione è finita.

La base $\mathcal{B}$ contiene un numero sufficiente di “mattoni” per definire **tutti** gli insiemi aperti di τ . Se ho $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea:

$$d(x, y) = |x - y| \quad (133)$$

ho gli insiemi aperti della base:

$$\mathcal{B} = \{(a, b), a < b : a, b \in \mathbb{R}\} \quad (134)$$

tali che ogni insieme aperto di $\mathbb{R}$ è scrivibile come combinazione di elementi di $\mathcal{B}$. La base $\mathcal{B} \subset \tau$ è sufficiente per formare tutti gli aperti mediante operazioni di unione di insiemi. Dato $\mathbb{R}$ una base $\mathcal{B}$ è:

$$\mathcal{B} = \{(q, p), q < p \text{ e } p, q \in \mathbb{Q}\} \quad (135)$$

Nota 9.7 Dato uno spazio topologico (X, τ) con $\mathcal{B}$ base di τ , $\mathcal{B} \subset \tau$, preso $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U$ (ovvero U è un elemento di $\mathcal{B}$ che contiene il punto x) e considerato un sistema fondamentale di intorni $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, se A è un aperto di τ lo posso scrivere come unione di elementi di $\mathcal{B}$ per cui esiste un oggetto che appartiene a $\mathcal{B}$ e che contiene x . In altre parole, se:

$$A = \cup_{k \in K} B_k \quad (136)$$

$\exists B_{\bar{n}}$ tale che $x \in B_{\bar{n}}$ considerato che $B_k \subset A$ ovvero B_k è un intorno contenuto in A .

Dato un insieme X se prendo $\mathcal{B} \subset 2^X$ non ho, in generale, una topologia. Si ha quindi il seguente problema: è possibile costruire una topologia in modo che un insieme $\mathcal{B}$ ne sia una base? Ovvero esiste una topologia di aperti τ per la quale un insieme $\mathcal{B}$ dato rappresenta una base? Che proprietà devono soddisfare X e $\mathcal{B} \subset 2^X$ perchè quest'ultimo sia una base per la topologia τ ?

Teorema 9.3 Dato un insieme di sottoinsiemi di X ovvero dato $\mathcal{B} \subset 2^X$ perchè $\mathcal{B}$ sia una base per una topologia τ per X devono essere verificate le seguenti proprietà:

1. gli elementi di $\mathcal{B}$ sono un **ricoprimento** di X ovvero $\mathcal{B} = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è tale che $\cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = X$;
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ voglio che $B_1 \cap B_2$ sia un aperto per cui deve esistere un elemento $B_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}$ che appartiene all'intersezione ovvero tale che $B_{\bar{\lambda}} \subset B_1 \cap B_2$ (vedi la figura 20).

La seconda proprietà può essere espressa formalmente come segue:

$$\forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B} \text{ tale che } x \in B_{\bar{\lambda}} \subset B_1 \cap B_2 \quad (137)$$

ed è soddisfatta se $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ per cui esiste una ed una sola topologia τ fissata da $\mathcal{B}$ che ha $\mathcal{B}$ come sua base.

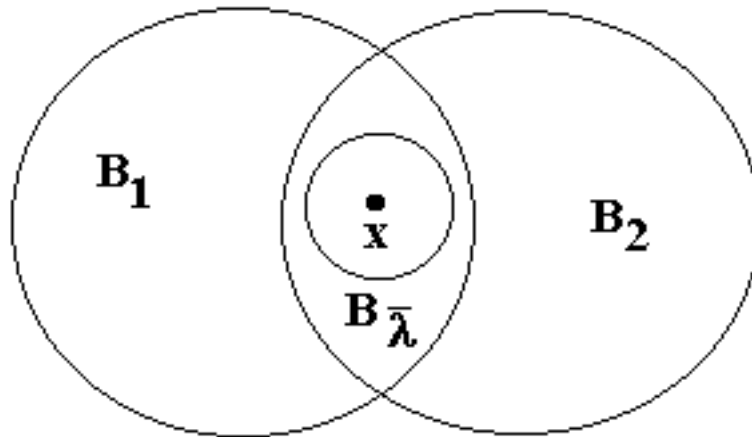
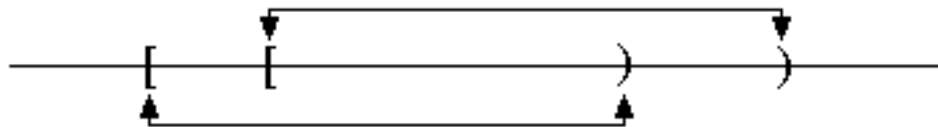


Figura 20: Ricoprimenti (dettagli nel testo)

Figura 21: Elementi di una topologia su $\mathbb{R}$ (dettagli nel testo)

Nota 9.8 (Topologia diversa su $\mathbb{R}$) Se considero $\mathcal{B} = \{[a, b)\}$ ho che con gli elementi di $\mathcal{B}$ posso ricoprire tutto $\mathbb{R}$ e, in più, intersecando elementi di $\mathcal{B}$ ho ancora elementi di $\mathcal{B}$ (vedi la figura 21) per cui $\mathcal{B}$ è una base per $\mathbb{R}$. Se voglio un insieme del tipo (a, b) (ovvero un aperto di $\mathbb{R}$) lo posso scrivere come:

$$(a, b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b) \quad (138)$$

ovvero come una intersezione numerabile di oggetti di $\mathcal{B}$ che, pertanto, definisce un aperto. Si ha quindi una sola topologia $\hat{\tau}$ i cui aperti sono del tipo (a, b) (ovviamente con $a < b$ e $a, b \in \mathbb{R}$), topologia strettamente più fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Si ha, tuttavia, anche la topologia su $\mathbb{R}$ con $\mathcal{B} = \{[a, b)\}$.

Nota 9.9 Si ricorda che, dati gli insiemi “telescopici” A_i (ovvero tali che $A_i \supset A_{i+1}$ con $i = 1, \dots, N$), si ha:

1. $\bigcup_i A_i = A_1$;

$$2. \cap_i A_i = A_N.$$

9.3 Secondo contabile e spazi topologici separabili

Si introduce a questo punto la nozione di *secondo contabile*.

Definizione 9.3 (Secondo contabile) *Uno spazio topologico (X, τ) è **secondo contabile** ovvero soddisfa il secondo assioma di numerabilità se ammette una base numerabile per la topologia τ .*

In questo caso lo spazio topologico ammette un sistema fondamentale di intorni ed è primo contabile.

Nota 9.10 *Se X è secondo contabile allora è primo contabile ma non vale il viceversa. Un controesempio che permette di vedere come:*

$$\text{primo contabile} \not\Rightarrow \text{secondo contabile} \quad (139)$$

è quello di considerare $\mathcal{B} = \{[a, b]\}$ che è primo ma non secondo contabile.

Esempio 9.3 *Se si considera $\mathbb{R}$ con la topologia usuale e si definisce $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b \text{ e } a, b \in \mathbb{Q}\}$ si ha che $\mathcal{B}$ soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *è numerabile;*
2. *è una base per $\mathbb{R}$ con la topologia usuale per cui $\mathbb{R}$ è secondo contabile (e quindi anche primo contabile).*

Esempio 9.4 *Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia discreta. In questo caso $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $\{x\}$ sono elementi di ogni base che pertanto non è numerabile per cui $\mathbb{R}$ con la topologia discreta non soddisfa il secondo assioma di numerabilità ovvero non è secondo contabile. Si ricorda che nel caso di $\mathbb{R}$ con la topologia discreta una classe di insiemi $\mathcal{B}$ è una base per la topologia sse contiene tutti i singoletti. Ciò vale per ogni spazio topologico X con la topologia discreta e discende dal fatto che qualunque intersezione di elementi della base deve essere un elemento della base.*

Nota 9.11 *Dato uno spazio topologico X secondo contabile si ha:*

1. *ogni base $\mathcal{B}$ è riducibile ad una base numerabile per X ;*
2. *dato $A \subset X$, se $\mathcal{A}$ è una classe di sottoinsiemi aperti di X tali che $A \subset \cup_{E \in \mathcal{A}} E$ si dice che $\mathcal{A}$ è un ricoprimento aperto di A . Se X è secondo contabile si ha che ogni ricoprimento aperto è riducibile a un ricoprimento numerabile.*

Definizione 9.4 Dato uno spazio topologico X un suo sottoinsieme finito o contabile A si dice denso se la sua chiusura coincide con l'intero spazio ovvero se:

$$\bar{A} = X \quad (140)$$

Se A è un sottoinsieme proprio di X la suddetta relazione implica che A non può contenere tutti i suoi punti di accumulazione. Se li contenesse avrei $D(A) \subset A$ ovvero $\bar{A} = A \cup D(A) = A = X$ contro l'ipotesi su A .

Definizione 9.5 (Spazi topologici separabili, prima definizione)

Uno spazio topologico (X, τ) si dice separabile se contiene un sottoinsieme numerabile denso Y .

Esempio 9.5 Vediamo ora come $\mathbb{R}$ con due topologie distinte possa essere separabile con una e non separabile con l'altra.

1. se su $\mathbb{R}$ ho la topologia usuale τ e considero $\mathbb{Q}$ ho che $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}$ è separabile essendo $\mathbb{Q}$ denso e dato $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ho che $\mathbb{Q}$ è numerabile.
2. se su $\mathbb{R}$ ho la topologia discreta τ_D ho che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è contemporaneamente aperto e chiuso per cui l'unico insieme la cui chiusura coincide con $\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$ stesso che non è numerabile per cui $\mathbb{R}$ non è uno spazio topologico separabile.

Nota 9.12 Di nuovo si ha che le proprietà topologiche di un insieme X possono essere precisate solo dopo aver specificato una topologia per tale insieme. Va da sé che le proprietà delle operazioni inisemistiche sono indipendenti dalla topologia.

Nota 9.13 Si ha:

1. ogni insieme infinito della topologia di Zarinski è denso;
2. $\mathbb{R}$ con la topologia di Zarinski è denso;
3. ogni $A \subset \mathbb{R}$ A infinito è denso in $\mathbb{R}$ e $\bar{A} = \mathbb{R}$;
4. dato $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ e $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$;
5. dato $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea, $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$ e $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$

Se Y è denso in X con punti di Y si approssimano punti di X . Nel caso di $\mathbb{R}$ si ha che i suoi punti si possono approssimare con punti di $\mathbb{Q}$.

Nota 9.14 Il fatto che un insieme Y sia denso in un insieme X significa che $\forall x \in X$ e $\forall U$ intorno di x si ha $U \cap Y \neq \emptyset$.

Definizione 9.6 (Spazi topologici separabili, seconda definizione)

Dato uno spazio topologico (X, τ) e preso $Y \subset X$ si dice che Y è **denso** in X se i punti di X non sono separabili da quelli di Y .

Definizione 9.7 (Spazi topologici separabili, terza definizione)

Dato uno spazio topologico (X, τ) e preso $Y \subset X$ si dice che X e Y sono separabili se Y è **denso** e **numerabile**.

Esempio 9.6 Se (con la topologia euclidea) ho $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ ho che $\mathbb{R}$ è separabile perchè $\mathbb{Q}$ è numerabile e denso in $\mathbb{R}$ (e infatti $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$). Se considero $\mathbb{R}$ con la topologia discreta non è separabile perchè $\mathbb{R}$ non è numerabile e l'unico insieme la cui chiusura coincide con $\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$ stesso.

Esempio 9.7 Dato uno spazio metrico separabile X si ha che X è secondo contabile. Uno spazio può essere primo contabile senza essere metrico.

Nota 9.15 Se X ammette $Y \subset X$ denso e numerabile ciò $\nRightarrow$ che X sia secondo contabile. Come controesempio posso prendere $\mathcal{B} = ([a, b))$ separabile e primo contabile ma non secondo contabile.

Nota 9.16 Si ha:

1. metrico $\Rightarrow$ primo contabile,
2. primo contabile $\nRightarrow$ metrico,
3. metrico e separabile $\Rightarrow$ secondo contabile,
4. primo contabile e separabile $\Rightarrow$ secondo contabile.

Nota 9.17 Si danno alcuni risultati senza fornirne la dimostrazione:

1. se uno spazio topologico X soddisfa il secondo assioma di numerabilità ovvero è secondo contabile allora è separabile;
2. in genere non vale l'inverso ovvero non è vero che uno spazio topologico separabile è anche secondo contabile, un esempio è dato da $\mathbb{R}$ con la topologia degli intervalli del tipo $[a, b)$;
3. uno spazio metrico separabile è secondo contabile;

4. *non tutti gli spazi metrici sono separabili come abbiamo visto anche negli esempi di questa sezione.*

Nota 9.18 *Data una proprietà P di uno spazio topologico X la si definisce ereditabile se ogni sottospazio $Y \subset X$ la possiede. Sulla base di tale definizione si ha:*

1. *l'essere primo contabile è ereditabile;*
2. *l'essere secondo contabile è ereditabile;*
3. *l'essere separabile non è ereditabile*

Nota 9.19 *Dato uno spazio topologico X si ha:*

1. *se X è secondo contabile allora è separabile;*
2. *se X è secondo contabile allora è primo contabile.*

10 Quinta Lezione

10.1 Topologia indotta

Dato uno spazio topologico (X, τ) e dato un sottoinsieme $Y \subset X$ si vuole definire una topologia su Y che tenga conto della topologia presente su X ovvero si vuole vedere cosa la topologia definita su Y eredita dalla topologia definita sul soprainsieme X . Si noti che non necessariamente $Y \in \tau$.

Definizione 10.1 (Insiemi aperti nella topologia indotta) *Dati due spazi topologici (X, τ) e (Y, τ_Y) , con $Y \subset X$, si ha che un insieme B è un aperto di Y sse $B = A \cap Y$ con A aperto di X .*

La famiglia degli insiemi B di Y ottenuti come intersezione di Y con insiemi aperti di X è una topologia di aperti per cui soddisfa gli assiomi che caratterizzano le topologie di aperti. Se considero gli elementi:

$$B_\lambda = A_\lambda \cap Y \quad (141)$$

e definisco la loro unione indicata da $\lambda \in \Lambda$ ho:

$$\cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \cup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap Y) = (\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap Y \quad (142)$$

in cui $(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$ è un aperto di X perchè unione di aperti in X . Gli aperti che si ottengono non sono, tuttavia, necessariamente aperti nella topologia di partenza τ . Per capirlo considero un esempio.

Esempio 10.1 *Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $Y = [0, 1]$ (vedi la figura 22). Si fa notare come $Y \notin \tau$ se τ è una topologia di aperti su X .*

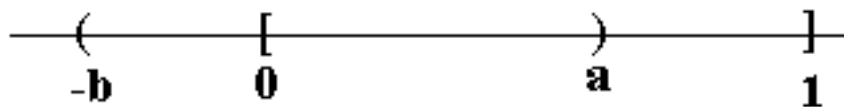


Figura 22: Aperti e topologia indotta (dettagli nel testo)

Se prendo $0 < a < 1$ e considero un sottoinsieme di Y del tipo $[0, a)$ lo posso vedere come ottenuto da:

$$[0, a) = Y \cap (-b, a) = [0, 1] \cap (-b, a) \quad (143)$$

con $b > 0$ per cui $[0, a)$ è un aperto nella topologia relativa τ_Y ma non è un insieme aperto in $\mathbb{R}$.

Se ho:

1. X con gli insiemi aperti e Y aperto in X tale che $Y \subset X$ allora gli aperti della topologia indotta sono gli insiemi aperti di X ;
2. X con gli insiemi chiusi e Y chiuso in X tale che $Y \subset X$ allora i chiusi della topologia indotta sono gli insiemi chiusi di X .

Definizione 10.2 (Insiemi chiusi nella topologia indotta) *Dati due spazi topologici (X, τ) e (Y, τ_Y) , con $Y \subset X$ e Y chiuso, si ha che un insieme B è un chiuso di Y sse $B = A \cap Y$ con A chiuso di X (su X ho una topologia di insiemi chiusi).*

Nota 10.1 *Se X è **primo contabile** (ovvero ciascun punto $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile) e se considero $Y \subset X$ allora Y con la topologia indotta è primo contabile.*

*Se X è **secondo contabile** lo stesso vale per Y . Se prendo X con una base di aperti $\mathcal{B} = \{B_\lambda\}$ ho che $B_\lambda \cap Y$ è una base per $Y \subset X$ ovvero se X ha una base numerabile anche Y ne ha una e tale base è la base di X intersecata con Y .*

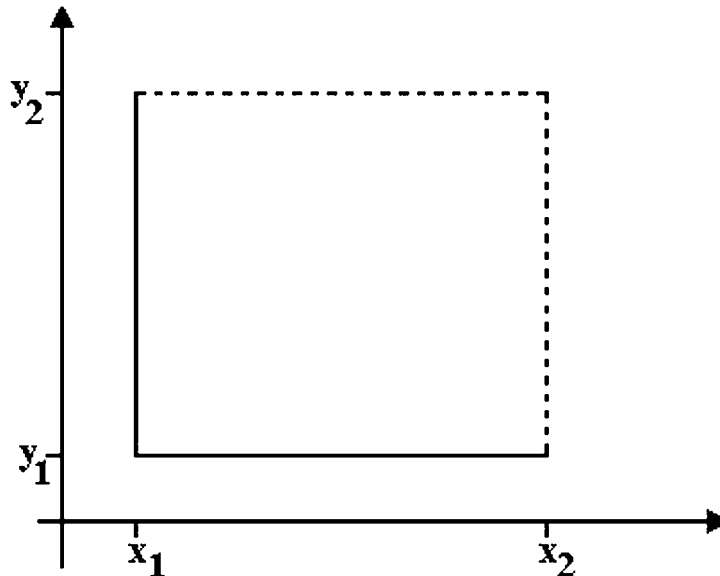


Figura 23: Separabilità (dettagli nel testo)

Nota 10.2 Dato X e preso $Y \subset X$ si ha che:

$$X \text{ separabile} \not\Rightarrow Y \text{ separabile} \quad (144)$$

Un controesempio in $\mathbb{R}^2$ è illustrato in figura 23. Considero rettangoli del tipo:

$$[x_1, x_2) \times [y_1, y_2) \quad (145)$$

La famiglia formata dai rettangoli di tale tipo copre lo spazio $\mathbb{R}^2$. Intersecando coppie di rettangoli si ottiene o l'insieme vuoto oppure un rettangolo dello stesso tipo. È una situazione analoga a $\mathbb{R}$ con intervalli del tipo $[a, b)$ che formano una base per $\mathbb{R}$ perchè ne sono un ricoprimento. Una base, infatti, è caratterizzata da due proprietà:

1. è un ricoprimento,
2. intersezioni di elementi della base sono elementi della base.

La famiglia:

$$[x_1, x_2) \times [y_1, y_2) \quad (146)$$

dà luogo ad una topologia in $\mathbb{R}^2$ ed è una base. Se ora considero q_1 e $q_2 \in \mathbb{Q}$ e definisco:

$$[q_1, q_1 + 1/n) \times [q_2, q_2 + 1/m) \quad (147)$$

con m e $n \in \mathbb{N}$ ottengo una famiglia di oggetti definiti in base a q_1, q_2, m e n ovvero ho bisogno di quattro coordinate numerabili in $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{N}$: ho una famiglia numerabile che è anche una base numerabile coincidente con quella dello spazio di partenza.

Se la base è numerabile lo spazio topologico è separabile prendendo un punto in ogni insieme aperto.

Se considero un punto $(x, -x) \in \mathbb{R}^2$ (vedi la figura 24) e un suo intorno qualunque del tipo mostrato in figura ho che in tale intorno vi sono infiniti punti del tipo $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$. Siccome $\{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2\}$ è numerabile e denso lo spazio $\mathbb{R}^2$ è separabile. Se ancora in $\mathbb{R}^2$ considero la topologia indotta sulla retta bisettrice del secondo e del quarto quadrante (detta Y , vedi la figura 24), gli insiemi illustrati in figura sono aperti A contenenti il punto $(x, -x)$ per costruzione. So che:

1. Y è non numerabile,
2. i punti sono insiemi aperti

per cui $(x, -x) = Y \cap A$ è un aperto e la topologia risultante è quella discreta e non è separabile.

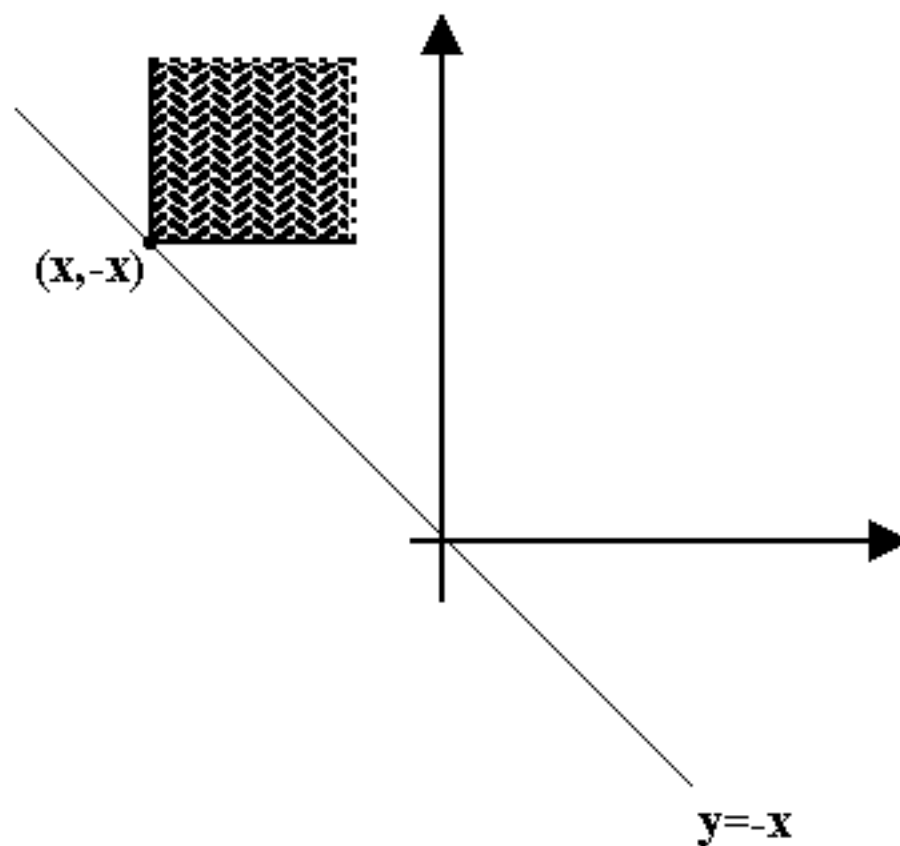


Figura 24: *Intorni e copertura in $\mathbb{R}^2$ (dettagli nel testo)*

Nota 10.3 *Dato uno spazio topologico X con la topologia discreta si ha che l'unico insieme la cui chiusura coincide con X è X stesso per cui se X non è numerabile dalla definizione di separabilità discende che X non è separabile.*

10.2 Assiomi di separazione

Si introduce una classificazione degli spazi topologici che dice quanti aperti si hanno e se sono sufficienti o meno per fare certe cose.

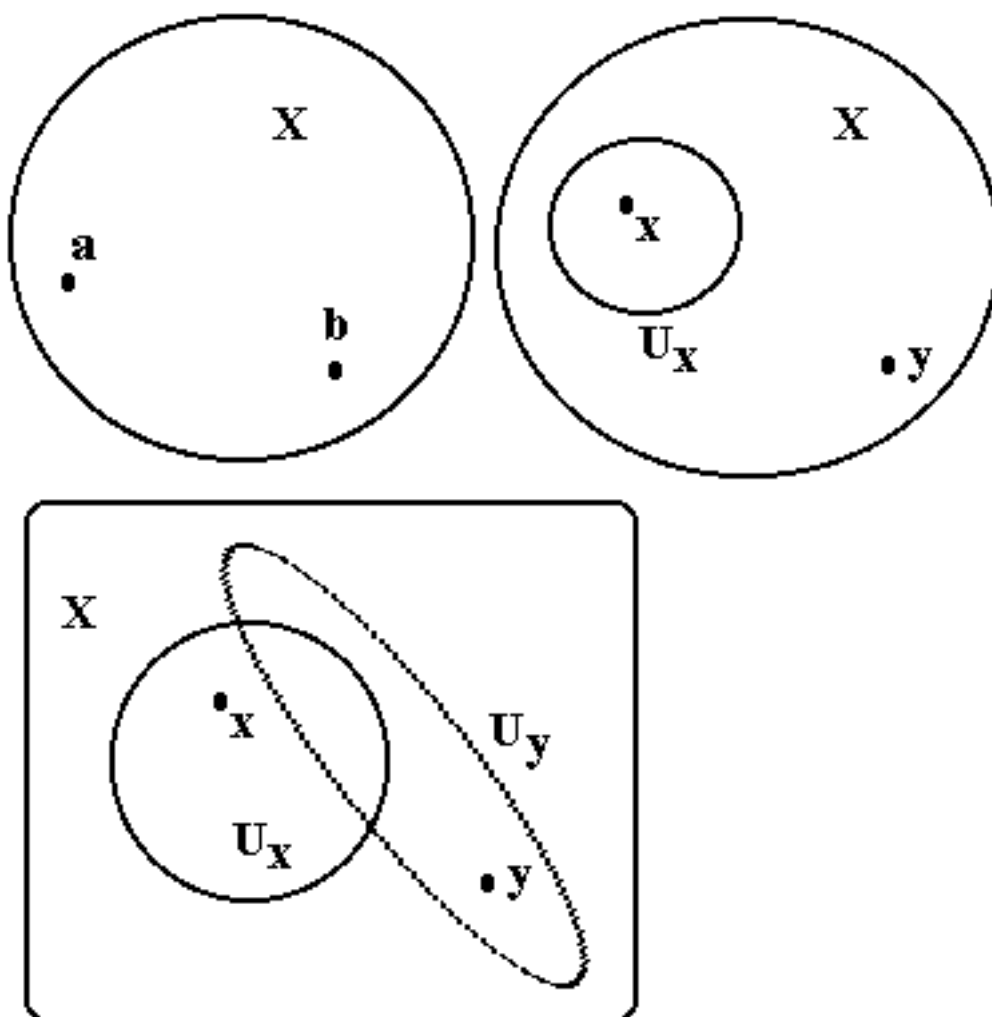


Figura 25: Assiomi di separazione (1) (dettagli nel testo)

Nota 10.4 (Primo caso: separare i punti) Si devono trovare, dati due punti distinti come a e b di figura 25 in alto a sinistra, degli insiemi aperti che contengano uno dei due punti ma non l'altro in modo da separare i due punti fra di loro.

Definizione 10.3 (Definizione di spazio T_0) Dato uno spazio topologico (X, τ) , con τ famiglia di aperti, si dice che X è di classe T_0 (vedi la parte in alto a destra della figura 25) se $\forall x, y \in X \exists U_x$ (intorno aperto di x) tale che $y \notin U_x$ oppure $\exists U_y$ (intorno aperto di y) tale che $x \notin U_y$ (caso non mostrato in figura), dove le due condizioni possono essere anche entrambe vere ma non lo sono necessariamente entrambe.

Esempio 10.2 Un esempio di spazio topologico T_0 è dato dalla topologia delle semirette su $\mathbb{R}$. In questo caso si definiscono gli intorni aperti del tipo $(a, +\infty)$ (con $a \in \mathbb{R}$) per cui dati due punti x e y della retta reale $\mathbb{R}$ se posso trovare un intorno che contiene x ma non y non riesco a trovarne uno che contiene y ma non x (se $y < x$) o viceversa (se $x < y$).

Definizione 10.4 (Definizione di spazio T_1) Dato uno spazio topologico (X, τ) , con τ famiglia di aperti, si dice che X è di classe T_1 (vedi la parte in basso della figura 25) se $\forall x, y \in X \exists U_x$ (intorno aperto di x) tale che $y \notin U_x$ e $\exists U_y$ (intorno aperto di y) tale che $x \notin U_y$, dove le due condizioni devono essere anche entrambe vere. Come mostra la figura i due intorni non devono essere disgiunti (ovvero possono avere intersezione non vuota) solo devono contenere ciascuno uno solo dei due punti.

Se considero la topologia di Zarinski gli insiemi chiusi sono gli insiemi finiti. Se considero due punti x e y ho che:

1. $\{y\}$ è chiuso per definizione (perchè è finito),
2. $\{y\}^C$ è aperto perchè complemento di un chiuso,
3. $x \in \{y\}^C$,
4. $y \notin \{y\}^C$.

Da tali premesse segue che lo spazio topologico così definito è di tipo T_0 e anche T_1 (lo si vede prendendo $x \neq y$ e definendo $\{x\}$ e il relativo complemento: si hanno due aperti non disgiunti che separano i due punti).

Se X è infinito (con la topologia di Zarinski) due suoi sottoinsiemi (infiniti) aperti hanno sempre intersezione non vuota.

Supponiamo di avere A e B infiniti, aperti e contenuti in X . Si suppone per assurdo che sia $A \cap B = \emptyset$. Si ha, complementando m. a m., $(A \cap B)^C = (\emptyset)^C = X$ ovvero $A^C \cup B^C = X$ ovvero X sarebbe finito perchè unione di insiemi finiti (per definizione di topologia di Zarinski complementi di insiemi infiniti) contro l'ipotesi che sia infinito per cui deve essere $A \cap B \neq \emptyset$.

In questo caso ho abbastanza aperti per separare coppie di punti ma non riesco a dire se due aperti sono disgiunti o meno.

Nota 10.5 Se ho X infinito con la topologia di Zarinski τ_Z ho una topologia di insiemi chiusi in cui:

1. gli insiemi della topologia sono gli insiemi finiti,
2. i loro complementi sono aperti e sono insiemi infiniti.

Se ho $A \in \tau_Z$ ho A^C aperto e infinito dal momento che deve essere $A \cup A^C = X$ e X è infinito.

Esercizio 10.1 Dimostrare che uno spazio topologico (X, τ) è T_1 sse i punti (insiemi singoletto) sono insiemi chiusi.

Si deve dimostrare che:

1. se X è di tipo T_1 allora i singoletti sono insiemi chiusi;
2. se i singoletti sono insiemi chiusi allora X è di tipo T_1 .

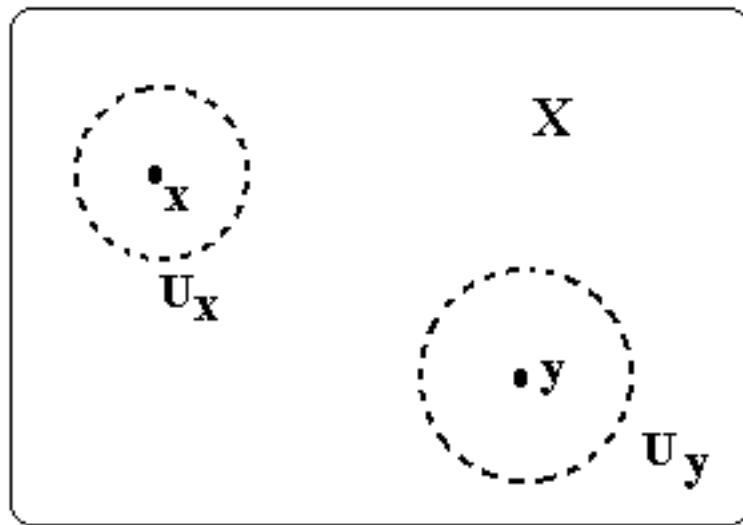


Figura 26: Spazi T_2 (dettagli nel testo)

Nota 10.6 Se ho uno spazio di tipo T_1 vale la proprietà relativa ai punti. Se prendo come insiemi aperti gli insiemi del tipo (a, ∞) i loro complementi sono del tipo $(-\infty, a]$ e sono insiemi chiusi per cui i punti sono insiemi singoletto chiusi. Si ha che vale la seguente relazione:

$$T_0 \supset T_1 \quad (148)$$

Definizione 10.5 (Spazi T_2) Uno spazio topologico X è di tipo T_2 (vedi la figura 26) se comunque prendo due punti distinti x e y in X ho che esistono due intorni U_x e U_y dei punti x e y tali che:

1. $y \notin U_x$,
2. $x \notin U_y$,
3. $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Nota 10.7 In uno spazio topologico di tipo T_2 posso separare punti distinti con aperti disgiunti.

Nota 10.8 La catena delle inclusioni dei tipi degli spazi topologici (alcuni dei quali saranno introdotti a breve) è la seguente:

$$T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3,5} \supset T_4 \quad (149)$$

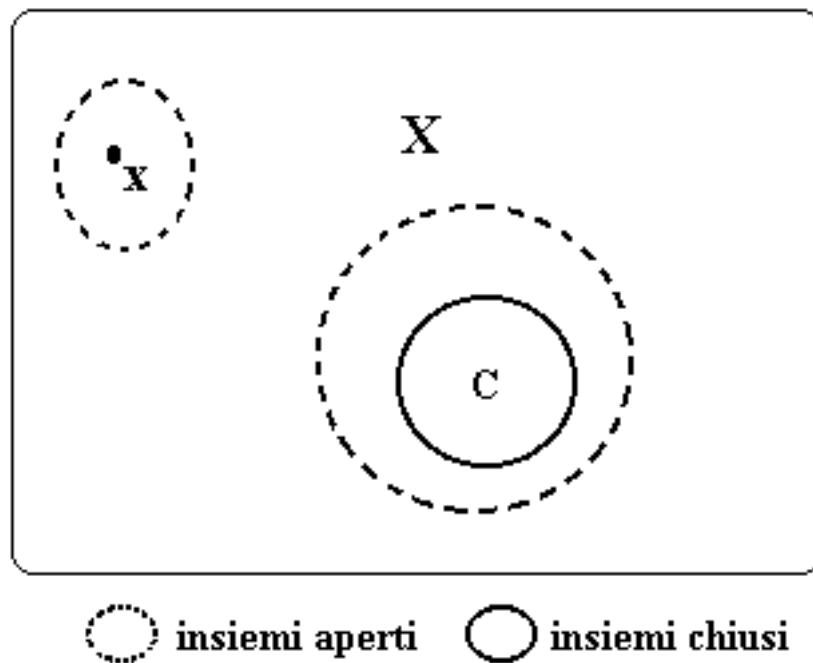


Figura 27: Spazi T_3 (dettagli nel testo)

Definizione 10.6 (Spazi T_3) Uno spazio topologico X si dice di tipo T_3 (vedi la figura 27) o di **tipo regolare** se:

1. è di tipo T_1 ovvero i punti sono insiemi chiusi,
2. per ogni insieme chiuso $C \in X$ e per ogni $x \in X$, $x \notin C$, esistono due insiemi aperti U_x (che contiene x) e U_C (che contiene C) tali che $U_x \cap U_C = \emptyset$,

cioè se posso separare un punto e un insieme chiuso con due insiemi aperti disgiunti.

Nel caso di uno spazio T_3 si separano i punti fra di loro e, in più, si riesce a separare un punto da un insieme chiuso qualunque. Dal momento che si hanno spazi topologici che sono di tipo T_2 ma non di tipo T_3 ho che si ha $T_2 \supset T_3$ con una inclusione stretta, in modo che se X è di tipo T_3 allora è di tipo T_2 ma non vale mai il viceversa.

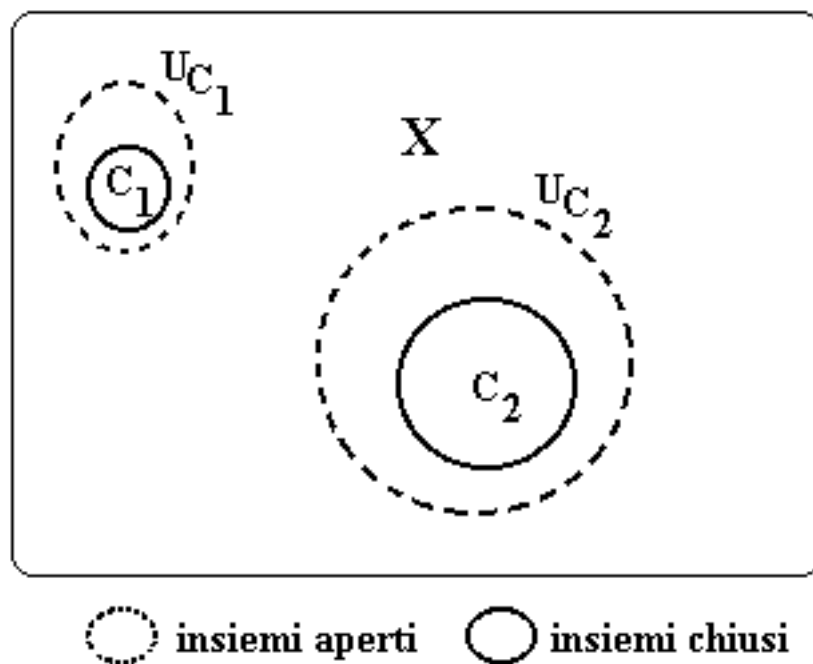


Figura 28: Spazi T_4 (dettagli nel testo)

Nota 10.9 Un altro modo di vedere le cose è il seguente. Si procede in due passi:

1. si parte da uno spazio X di tipo T_1 (in cui separo punti distinti con aperti non disgiunti);

2. si introduce il concetto di regolarità.

In questo modo uno spazio X che è sia T_1 sia regolare è detto essere di tipo T_3 .

Per finire si definisce il concetto di spazio topologico **regolare**.

Uno spazio topologico X si dice regolare sse dato un sottoinsieme chiuso $F \subset X$ e un punto $p \in X$ con $p \notin F$ si ha che esistono due insiemi aperti disgiunti G ed H tali che $F \subset G$ e $p \in H$.

Nota 10.10 Dato lo spazio topologico X se X è regolare non necessariamente è T_1 . Lo si vede con un esempio.

Sia $X = \{a, b, c\}$ con la topologia:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\} \quad (150)$$

Dal fatto che in uno spazio T_1 i singoletti di X (non della topologia) sono insiemi chiusi e dal fatto che in questo caso $\{b\}$ non è chiuso si ha che lo spazio X non è T_1 . Si vede, tuttavia, che tale spazio è regolare. È facile vedere che gli insiemi di τ sono contemporaneamente aperti e chiusi. Ho i seguenti casi:

1. se considero a come F ho $\{b, c\}$ e come insiemi aperti posso prendere $H = \{a\}$ e $G = \{b, c\}$;
2. se considero b come F ho $\{a\}$ e come insiemi aperti posso prendere $G = \{a\}$ e $H = \{b, c\}$;
3. se considero c come F ho $\{a\}$ e come insiemi aperti posso prendere $G = \{a\}$ e $H = \{b, c\}$.

Definizione 10.7 (Spazi T_4) Uno spazio topologico X si dice di tipo T_4 (vedi la figura 28) oppure di **tipo normale** se:

1. è di tipo T_1 e, in più,
2. riesco a separare due insiemi chiusi qualunque ovvero se comunque prendo due insiemi chiusi C_1 e C_2 tali che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$:

(a) $\exists U_{C_1}$ aperto che contiene C_1 ,

(b) $\exists U_{C_2}$ aperto che contiene C_2 ,

tali che $U_{C_1} \cap U_{C_2} = \emptyset$.

In questo caso separo due insiemi chiusi qualunque con due insiemi aperti disgiunti e, pertanto, un punto (che è un chiuso) da un insieme chiuso (ovvero lo spazio è T_3) e un punto da un altro (ovvero lo spazio è T_2).

Teorema 10.1 *Ogni spazio metrico è normale ovvero è di tipo T_4 ovvero, in modo formale, se (X, d) è uno spazio metrico allora (X, d) è uno spazio normale.*

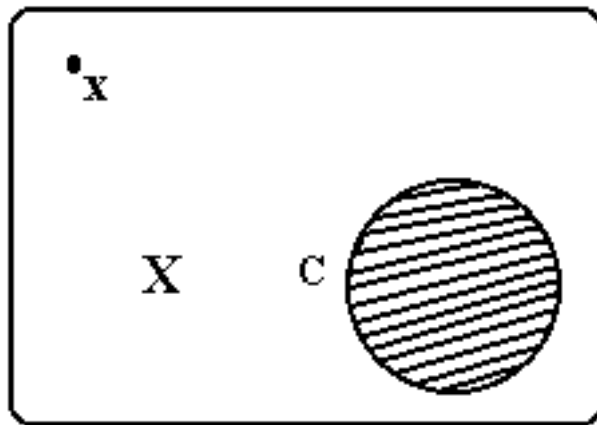


Figura 29: Uno spazio metrico è uno spazio normale (dettagli nel testo)

Dimostrazione

Per la dimostrazione del teorema (vedi la figura 29) considero un insieme qualunque C non necessariamente chiuso e definisco la grandezza $d_C = \inf\{d(x, c) \mid \forall c \in C\}$.

1. **prima verifica:** si deve verificare che la funzione d_C definita come:

$$d_C : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (151)$$

è continua per ogni c rispetto alla topologia euclidea su $\mathbb{R}$,

2. **seconda verifica:** se C è chiuso allora $d_C(x) = 0$ sse $x \in C$, se C non è chiuso $x \notin C$ ma la sua distanza dai punti di C può essere nulla.

Dalla definizione della d_C (vedi la figura 30, parte superiore) si ha che C è un insieme non chiuso e che $0 \notin C$ sebbene $d_C(0) = \inf\{d(0, c) \mid \forall c \in C\} = 0$. La parte inferiore della figura 30 illustra il caso di due aperti disgiunti

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \quad (152)$$

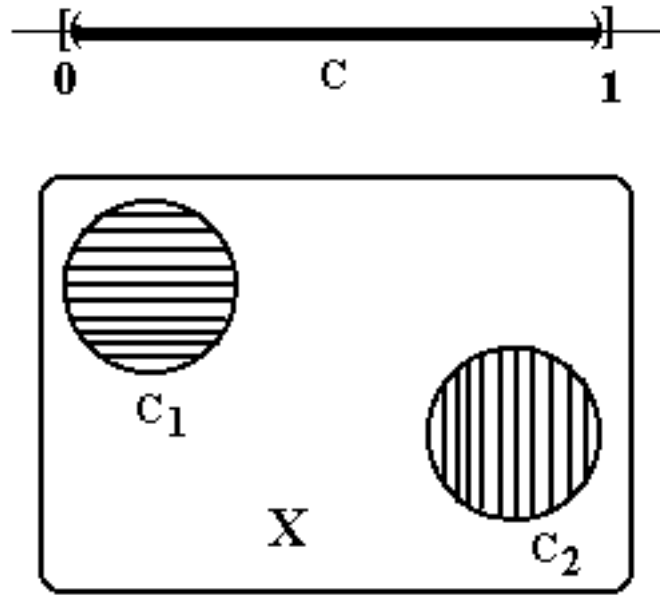


Figura 30: Dimostrazione del teorema (dettagli nel testo)

In questo caso si può definire una funzione:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (153)$$

tale che:

$$f(x) = d_{C_1}(x) - d_{C_2}(x) \quad (154)$$

Si ha quindi:

1. se $x \in C_1$ e $x \notin C_2$ allora $f(x) < 0$ perchè $d_{C_1}(x) = 0$ e $d_{C_2}(x) > 0$,
2. se $x \in C_2$ e $x \notin C_1$ allora $f(x) > 0$ perchè $d_{C_1}(x) > 0$ e $d_{C_2}(x) = 0$.

La funzione f è continua perchè somma di due funzioni continue per cui l'immagine inversa di un insieme aperto è un insieme aperto. Applicando tale principio al caso presente e con riferimento alla figura 31 si ha:

1. $f^{-1}(-\infty, 0)$ è un aperto che contiene C_1 per definizione per cui ho $A_1 = f^{-1}(-\infty, 0)$ aperto,
2. $f^{-1}(0, \infty)$ è un aperto che contiene C_2 per definizione per cui ho $A_2 = f^{-1}(0, \infty)$ aperto

tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$: ho quindi due aperti disgiunti che separano C_1 e C_2 .

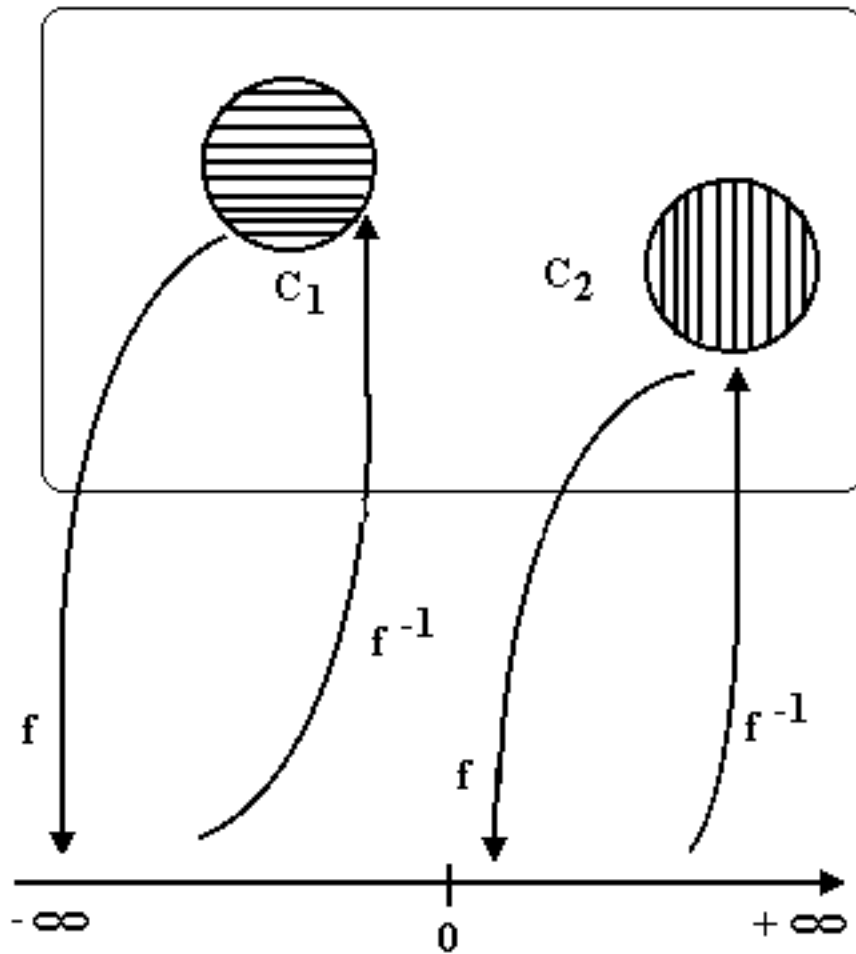


Figura 31: Dimostrazione del teorema (dettagli nel testo)

Definizione 10.8 (Spazi $T_{3.5}$) In uno spazio topologico di tipo $T_{3.5}$ gli insiemi sono detti **completamente regolari** e si parla di **separazione** per mezzo di **funzioni continue**.

Dato uno spazio topologico X e due punti distinti x_1 e $x_2 \in X$ se su $\mathbb{R}$ si ha la topologia naturale o euclidea si può definire una funzione continua:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (155)$$

che separa i punti ovvero tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$ senza che ciò implichi che X sia di tipo T_2 (vedi la figura 32 (a)). Se prendo due interni aperti di $f(x_1)$ e $f(x_2)$ (vedi la figura 32 (a)) ho che:

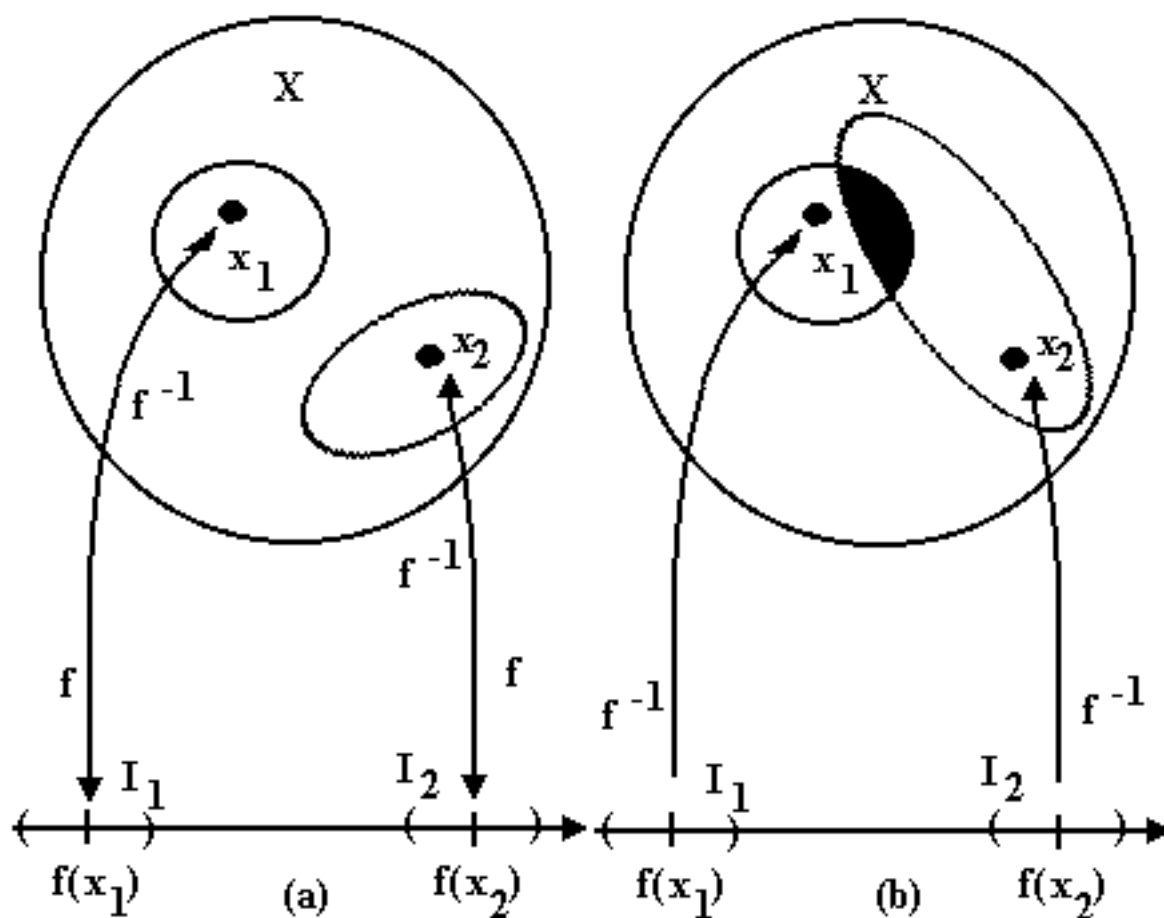


Figura 32: *Intorni, immagini e controimmagini (dettagli nel testo)*

1. $f^{-1}(I_1)$ è un insieme aperto che non contiene x_2 mentre
2. $f^{-1}(I_2)$ è un insieme aperto che non contiene x_1

e tali insiemi sono fra loro disgiunti. Se infatti la situazione fosse quella della figura 32 (b) avrei che i punti contenuti nell'area ombreggiata verrebbero trasformati tramite la f in punti sia in I_1 sia in I_2 contro l'ipotesi che la f sia una funzione. A questo punto si introduce un teorema che caratterizza gli spazi topologici normali.

Teorema 10.2 (Lemma di Urysohn) *Dato uno spazio topologico X (vedi la figura 33) in cui comunque prendo due insiemi chiusi e disgiunti C_1 e C_2 esiste una funzione **continua** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:*

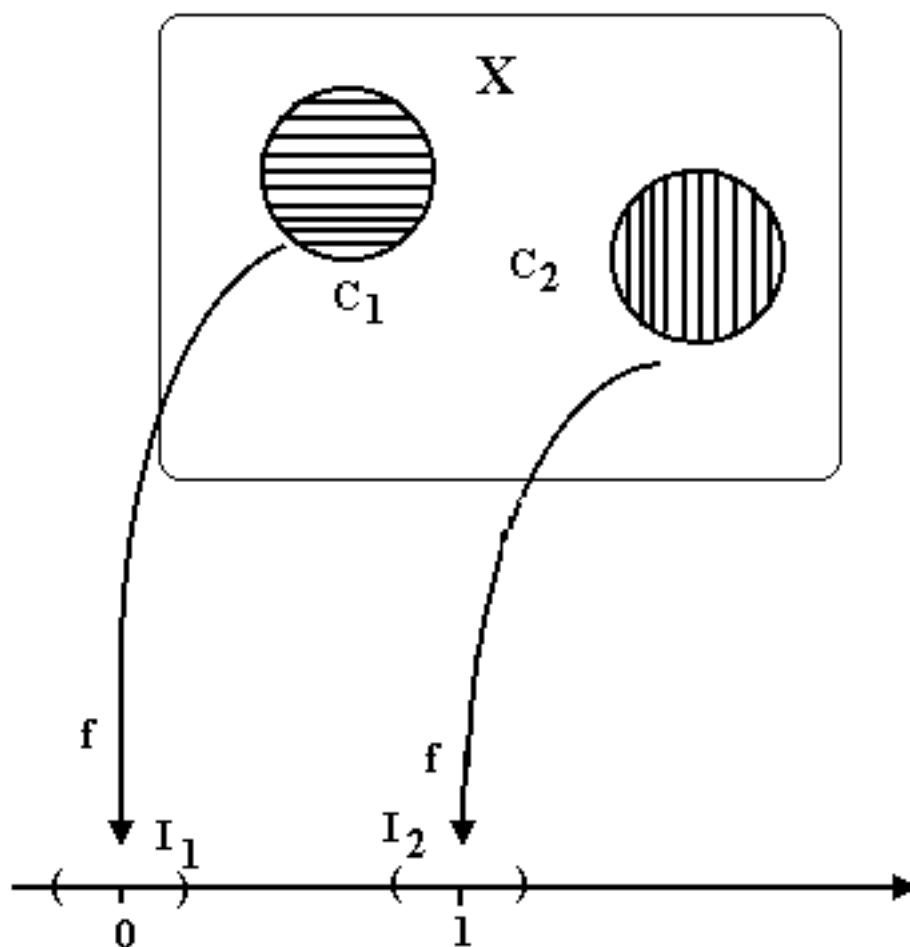


Figura 33: *Lemma di Urysohn (dettagli nel testo)*

1. f ristretta a C_1 ($f|_{C_1}$) assume per ogni $x \in C_1$ il valore 0,
2. f ristretta a C_2 ($f|_{C_2}$) assume per ogni $x \in C_2$ il valore 1

ho che lo spazio topologico X è di tipo T_4 .

Se I_1 è un intorno di 0 e I_2 è un intorno di 1 si ha:

1. $f^{-1}(I_1)$ è un insieme aperto che contiene C_1 ,
2. $f^{-1}(I_2)$ è un insieme aperto che contiene C_2

e tali insiemi sono disgiunti: se avessero un punto in comune tale punto, tramite la f , andrebbe sia in I_1 sia in I_2 contro la definizione di funzione. Il

lemma prescrive anche il viceversa ovvero se so che lo spazio topologico X è di tipo T_4 ed ho due insiemi chiusi C_1 e C_2 tali che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ed ho una funzione f definita in modo che sia:

$$1. f|_{C_1} = 0$$

$$2. f|_{C_2} = 1$$

allora posso estendere f per continuità su tutto X ovvero esiste una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che:

$$1. f|_{C_1} = 0$$

$$2. f|_{C_2} = 1$$

estesa per continuità su tutto X .

Tale equivalenza non vale in generale per cui a tale scopo si introduce il concetto di spazi topologici di tipo $T_{3.5}$.

Definizione 10.9 *Uno spazio topologico X di tipo $T_{3.5}$ si dice **completamente regolare**.*

Se uno spazio topologico X è di tipo T_1 preso un qualunque punto $x \in X$ e un qualunque insieme chiuso $C \subset X$ tale che $x \notin C$ (vedi figura 34 (a)) esiste una funzione **continua** f tale che:

$$1. f(x) = 0,$$

$$2. f|_C = 1$$

e tale che:

$$1. f^{-1}(I_0) = A_0 \supset \{x\} \text{ e}$$

$$2. f^{-1}(I_1) = A_1 \supset C$$

(con A_0 e A_1 insiemi aperti) allora X è di tipo T_3 . Non è vero il viceversa cioè se ho uno spazio topologico di tipo T_3 non vuol dire che riesco a separare un punto e un insieme chiuso utilizzando una funzione continua. Se considero la Definizione 10.9 ho un oggetto che da un lato è di tipo T_3 ma contiene meno di oggetti del tipo T_3 perchè esistono spazi per i quali la proprietà non è vera: se in uno spazio topologico X una funzione continua f separa un punto da un insieme chiuso allora lo spazio topologico X è di tipo T_3 ma se ho uno

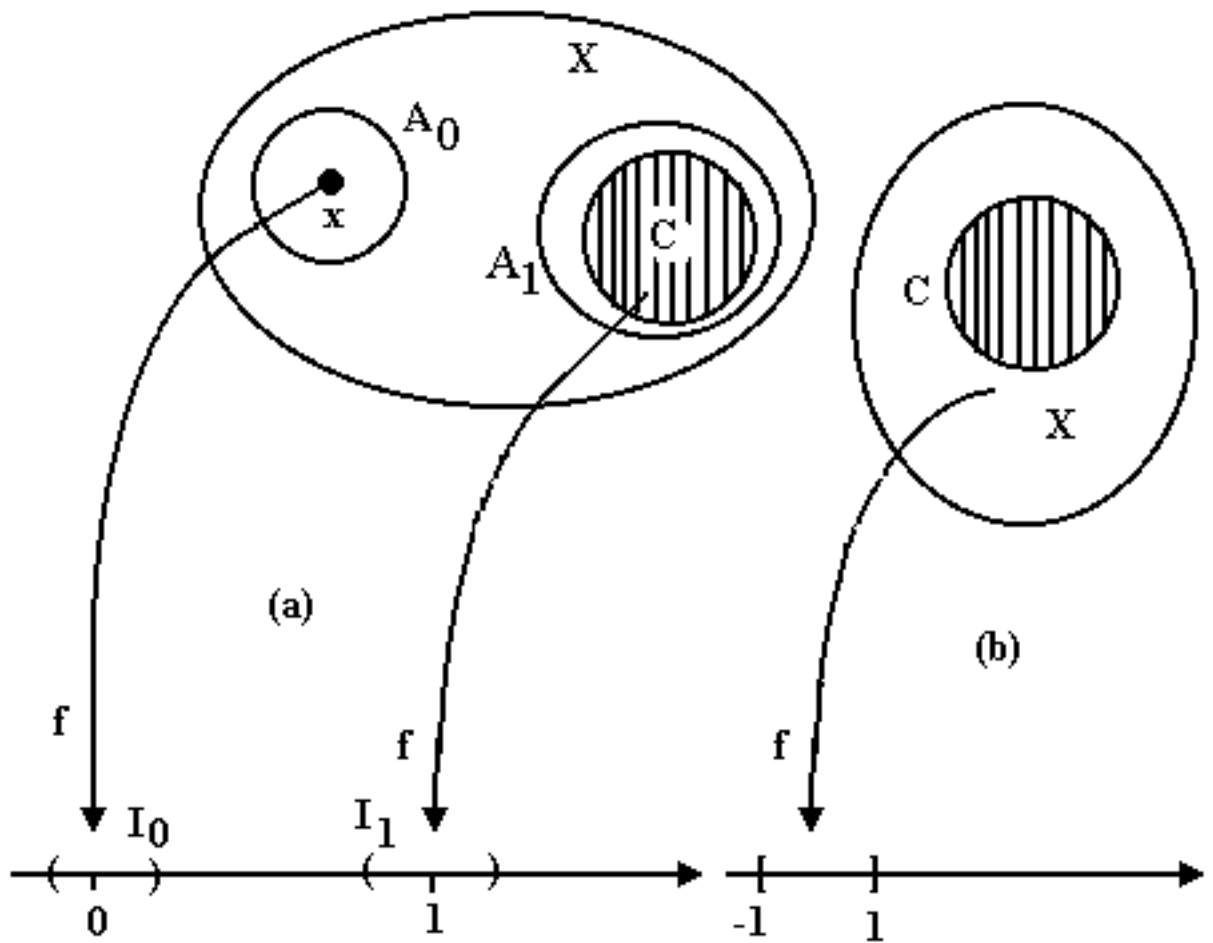


Figura 34: Ancora sugli intorni (dettagli nel testo)

spazio topologico di tipo T_3 non vale il viceversa. Da quanto detto si ha la seguente catena di relazioni fra spazi topologici:

$$T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3.5} \supset T_4 \quad (156)$$

e tali proprietà (tranne l'essere T_4) si trasferiscono ai sottospazi per cui se, ad esempio, si ha uno spazio topologico di tipo T_2 e si ha $Y \subset X$ la topologia indotta su Y è di tipo T_2 .

Nota 10.11 *A questo punto si sono date le caratterizzazioni di un certo numero di tipi di spazi topologici ma rimangono alcune questioni aperte cui si accenna solamente, con approfondimenti di teoria, rimandando all'Appendice per spiegazioni esaurienti:*

1. *il Lemma di Urysohn stabilisce una proprietà di coppie di insiemi chiusi disgiunti cui posso associare una funzione continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ che assume un valore su uno dei due insiemi e l'altro valore sull'altro;*
2. *uno spazio topologico si dice **normale** se è possibile separare sottoinsiemi chiusi disgiunti di X con insiemi aperti disgiunti;*
3. *si ha una caratterizzazione alternativa di uno spazio normale: uno spazio topologico è detto essere normale sse per ogni coppia di insiemi F chiuso e H aperto che contiene F esiste un insieme aperto G tale che: $F \subset G \subset \bar{G} \subset H$;*
4. *se si ha uno spazio topologico T_1 che è normale allora si ha uno spazio topologico T_4*
5. *uno spazio topologico normale e T_1 che sia anche secondo contabile è metrizzabile ovvero data una topologia su X ad essa si può associare una metrica;*
6. *data una classe di funzioni $\mathcal{A} = \{f_i : i \in I\}$ da un insieme X ad uno Y si dice che tale classe separa i punti di X sse comunque si prendono due punti distinti a e b esiste una funzione f nella classe $\mathcal{A}$ tale che $f(a) \neq f(b)$;*
7. *se le funzioni suddette sono continue e $Y = \mathbb{R}$ (ovvero è T_2) allora anche X è di tipo T_2 : si abbiano due punti distinti a e b in X , per ipotesi esiste f tale che $f(a) \neq f(b)$. Siccome $Y = \mathbb{R}$ è di tipo $T - 2$ esistono due aperti disgiunti G ed H che contengono rispettivamente $f(a)$ e $f(b)$ in modo che $f^{-1}(G)$ e $f^{-1}(H)$ siano aperti disgiunti che separano a e b per cui anche X è di tipo T_2 ;*
8. *oltre al concetto di **spazio regolare** si può introdurre quello di spazio topologico **completamente regolare** come caratterizzato dalla presenza di una funzione continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ che separa un punto $p \in X$ da un insieme chiuso F che non lo contiene ovvero tale che $f(p) = 0$ mentre $f[F] = \{1\}$;*
9. *se uno spazio topologico è completamente regolare allora è regolare;*
10. *se si ha uno spazio topologico completamente regolare che è anche T_1 tale spazio è anche regolare e T_1 (ovvero è T_3) e lo si dice **spazio di Tychonoff**;*

11. per il Lemma di Urysohn uno spazio T_4 è uno spazio di Tychonoff che, per la proprietà precedente anche T_3 ;
12. uno spazio di Tychonoff (ovvero uno spazio T_1 completamente regolare) lo si dice spazio $T - 3.5$.

Teorema 10.3 (Teorema di Tietze (vedi figura 34 (b))) Dato uno spazio topologico X di tipo T_4 e dato un insieme chiuso $C \subset X$ con la topologia indotta esiste una funzione f continua:

$$f : C \longrightarrow [-1, 1] \quad (157)$$

che ammette una estensione continua su tutto X . Più in generale il codominio può essere un qualunque intervallo chiuso di $\mathbb{R}$.

Secondo il Lemma di Urysohn si può estendere la funzione f su un sotto-spazio in modo da mantenerne la continuità ovvero $\exists g : X \longrightarrow [-1, 1]$ tale che $f = g|_C$. Il Teorema di Tietze contiene il Lemma di Urysohn come caso particolare. Se ho una funzione continua:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (158)$$

e due insiemi chiusi C_1 e C_2 tali che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ e definisco:

1. $f|_{C_1} = 0$
2. $f|_{C_2} = 1$

con $C = C_1 \cup C_2$ (C in quanto unione di insiemi chiusi è un insieme chiuso) si può definire:

$$f : C_1 \cup C_2 \longrightarrow [-1, 1] \quad (159)$$

funzione continua. In base al teorema di Tietze esiste $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $g|_C = f$ che vale 0 su C_1 e 1 su C_2 .

10.3 Spazi topologici connessi

Definizione 10.10 (Definizione intuitiva) Uno spazio topologico X si dice **connesso** se è composto di un solo pezzo.

Definizione 10.11 (Definizione negativa) Uno spazio topologico X si dice **connesso** se **non è sconnesso** cioè se non esistono due insiemi aperti di X , A_1 e A_2 , tali che:

1. $A_1 \cup A_2 = X$,

$$2. A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$3. A_1, A_2 \neq \emptyset$$

Esempio 10.3 Dato $\mathbb{Q}$, spazio metrico con la distanza normale, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, posso scrivere:

$$\mathbb{Q} = \{q < \sqrt{2}\} \cup \{q > \sqrt{2}\} \quad (160)$$

ovvero posso scrivere $\mathbb{Q}$ come unione di due insiemi disgiunti (che sono sia aperti sia chiusi perchè sono uno il complemento dell'altro) non vuoti per cui $\mathbb{Q}$ è sconnesso. Lo stesso non vale per $\mathbb{R}$.

Definizione 10.12 (Condizione necessaria e sufficiente) Uno spazio topologico X è connesso sse gli unici insiemi che sono contemporaneamente sia **aperti** sia **chiusi** sono $\emptyset$ sia X .

Se esiste un insieme A sia aperto che chiuso (che non coincide nè con X nè con $\emptyset$), A verifica le condizioni della definizione 10.11 perchè si ha:

$$1. A \cup A^C = X$$

$$2. A \cap A^C = \emptyset$$

$$3. A \neq \emptyset$$

$$4. A^C \neq \emptyset$$

Definizione 10.13 Dato uno spazio topologico X e un suo sottoinsieme $Y \subset X$ si dice che Y è un sottoinsieme connesso di X se è connesso nella topologia indotta.

Esempio 10.4 Supponiamo di avere $X = \{a, b, c\}$ con la topologia:

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\} \quad (161)$$

posso considerare $A = \{a\}$ e $A^C = \{b, c\}$ che soddisfano le proprietà suddette in modo che X sia sconnesso.

Esempio 10.5 Se considero $\mathbb{R}$ con la topologia degli insiemi aperti $(-\infty, a)$ ho che gli unici insiemi che sono contemporaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}$ è connesso.

Nota 10.12 Si introduce ora una definizione di connessione per spazi topologici che è più forte di quella data finora basata non sull'assenza di insiemi aperti ma sull'uso di archi. La si dice **connessione per archi**.

Nota 10.13 Si noti che *connessione per archi* $\Rightarrow$ *connessione* ma non vale il viceversa.

Definizione 10.14 (Connettività per archi (definizione positiva))

Uno spazio topologico X è **connesso per archi** (vedi la figura 35 (a)) se comunque prendo x_1 e $x_2 \in X$ esiste una funzione f continua che descrive una curva:

$$f : [0, 1] \longrightarrow X \quad (162)$$

tale che:

1. $f(0) = x_1$
2. $f(1) = x_2$

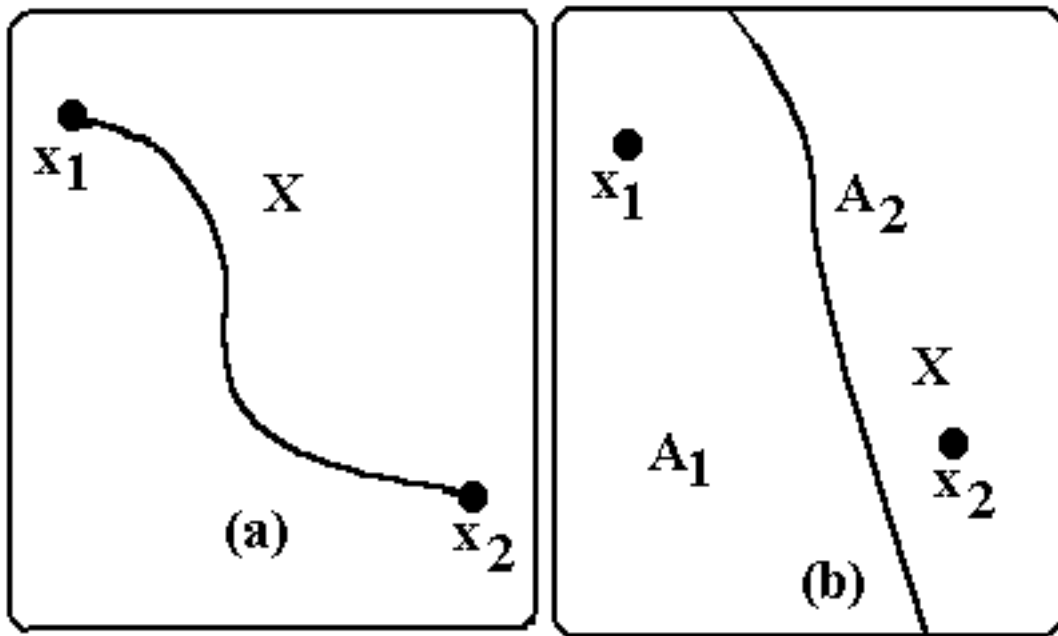


Figura 35: Connettività per archi (dettagli nel testo)

Teorema 10.4 (Connesso per archi implica connesso) Uno spazio topologico connesso per archi è connesso.

Dimostrazione

Suppongo che X non sia connesso⁴ per cui, per quanto visto in precedenza,

⁴Se devo dimostrare che $A \Rightarrow B$ suppongo $\neg B$ e derivo una contraddizione.

X ammette due insiemi aperti disgiunti A_1 e A_2 (vedi la figura 35 (b)) tali che $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = X$. Si possono prendere, pertanto:

1. $x_1 \in A_1$

2. $x_2 \in A_2$

L'ipotesi è che lo spazio topologico X sia **connesso per archi** per cui esiste una funzione:

$$f : [0, 1] \longrightarrow X \quad (163)$$

tale che:

1. $f(0) = x_1$

2. $f(1) = x_2$

Considero ora gli insiemi:

1. $t \in [0, 1]$ t.c. $f(t) \in A_1$

2. $t \in [0, 1]$ t.c. $f(t) \in A_2$

Dalla continuità della f segue che tali insiemi sono aperti (perchè retroimmagini di aperti tramite una funzione continua). Si ha:

1. il primo insieme è $f^{-1}(A_1) \neq \emptyset$ perchè A_1 contiene almeno x_1 ,

2. il secondo insieme è $f^{-1}(A_2) \neq \emptyset$ perchè A_2 contiene almeno x_2 .

In più so che:

1. $f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) = [0, 1]$,

2. $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = \emptyset$ perchè A_1 e A_2 sono disgiunti,

per cui l'insieme $[0, 1]$ risulterebbe sconnesso perchè composto da due insiemi aperti disgiunti la cui unione è $[0, 1]$. Ciò è però assurdo dal momento che gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli insiemi connessi di $\mathbb{R}$ (vedi il Teorema 10.5) per cui è falsa la tesi negata e X risulta connesso.

Teorema 10.5 Gli insiemi connessi in $\mathbb{R}$ sono **tutti e soli** gli intervalli.

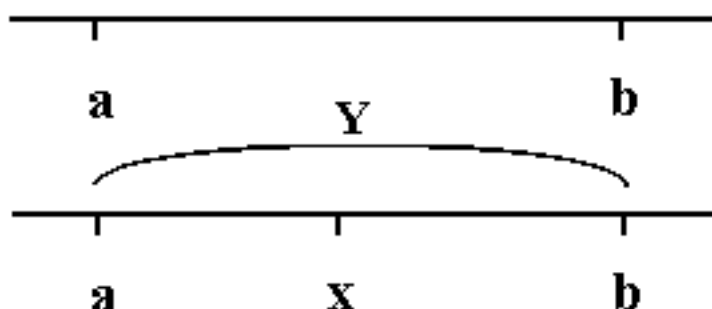


Figura 36: Intervalli e connettività (dettagli nel testo)

Se definisco l'intervallo I come in figura 36 (in alto) ho che:

$$a, b \in I \Rightarrow x \in I \forall x : a < x < b \quad (164)$$

ovvero un intervallo contiene tutti i punti compresi fra i suoi punti estremi per cui non presenta buchi. Da ciò discende che sono intervalli: $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, b]$, (a, b) , $[a, \infty)$, (a, ∞) , $(-\infty, b]$ e $(-\infty, b]$. Tali intervalli sono tutti e soli gli insiemi connessi di $\mathbb{R}$.

Si ha quindi che se un insieme $Y \in \mathbb{R}$ è connesso allora è un intervallo e viceversa.

Con riferimento alla figura 36 (in basso) suppongo che Y sia connesso ma non sia un intervallo per cui (negando la definizione data nel Teorema 10.5) non contiene il punto x compreso fra a e b e si ha:

1. $Y \cap (-\infty, x)$ è un insieme aperto di $\mathbb{R}$ (intersezione di due aperti),
2. $Y \cap (x, +\infty)$ è un insieme aperto di $\mathbb{R}$ (intersezione di due aperti),

e tali insiemi sono:

1. disgiunti,
2. non vuoti perchè contengono, rispettivamente, almeno a o b

le la loro unione è $Y \setminus \{x\}$ per cui Y non sarebbe connesso contro l'ipotesi fatta per cui è anche un intervallo. Si ha, inoltre, anche la proposizione inversa per la quale se un insieme $Y \in \mathbb{R}$ è un intervallo allora è connesso.

Esercizio 10.2 *Dimostrare che un intervallo è connesso.*

Esercizio 10.3 *Dimostrare che se un insieme è connesso per archi allora è connesso ma non vale il viceversa.*

Lo si vede con un esempio. In $\mathbb{R}^2$ (vedi la figura 37) considero la funzione:

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (165)$$

$x > 0$.

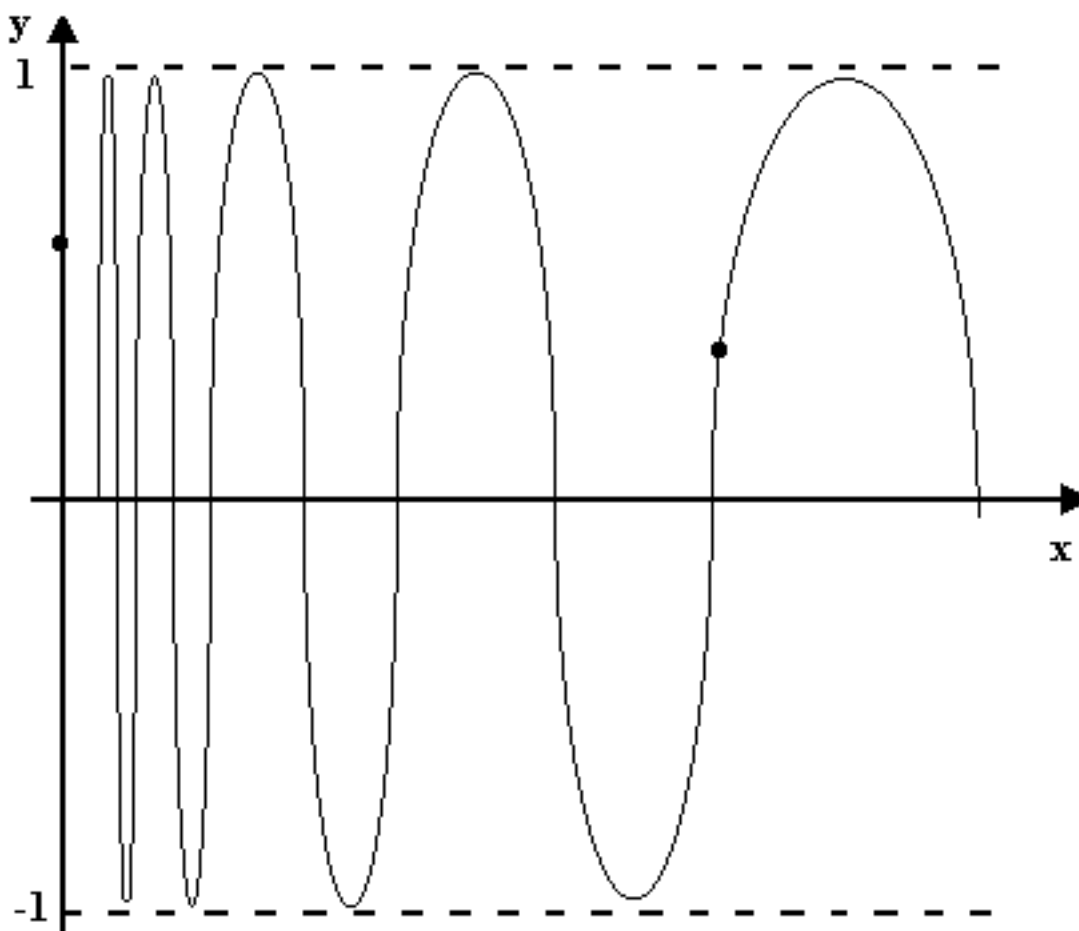


Figura 37: Intervalli e connesività (dettagli nel testo)

Considero l'insieme $\{y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}\} \cup \{0, y\}$ con $-1 \leq y \leq 1$. Ho che $\{0, y\}$ non appartiene a $\{y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}\}$. L'insieme è connesso e non riesco a spezzarlo in due sottoinsiemi disgiunti e non vuoti ed è connesso ma non per archi come si può vedere considerando i due punti segnati in figura 37.

Definizione 10.15 (Componente connessa) *Dato uno spazio topologico X e dato $Y \subset X$ con la topologia indotta se prendo un punto $y \in Y$ si chiama **componente connessa** di y il più grande (ovvero massimale) insieme connesso C_y tale che $y \in C_y \subset Y$.*

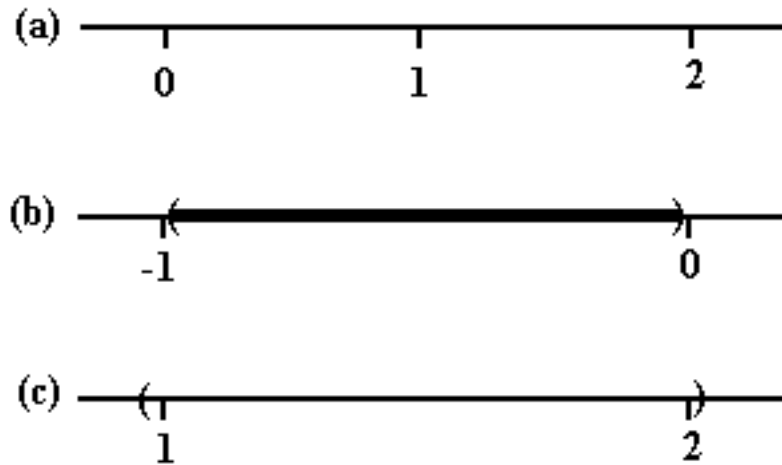


Figura 38: Intervalli (dettagli nel testo)

Se considero $Y = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (vedi la figura 38 (a)) le componenti connesse (vedi la figura 38 (b)) sono gli intervalli aperti del tipo $C_x = ([x], [x] + 1)$ (dove con $[x]$ si indica la parte intera di x). Se ora considero l'insieme rappresentato in figura 38 (c) ho che tale insieme è composto di tre parti dato che i punti 1 e 2 non vi appartengono, per come ho definito Y , e, pertanto, è unione delle sue componenti connesse.

Esercizio 10.4 *Con riferimento alla figura 38 (b), sia Y uno spazio topologico, C una componente connessa di Y (ovvero è il più grande insieme connesso di Y) allora C è un insieme chiuso nella topologia indotta di Y . L'insieme $(-1, 0)$ è un insieme aperto in $\mathbb{R}$ mentre è un insieme chiuso nella topologia indotta su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ perchè lo posso scrivere come segue:*

$$(-1, 0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cap [-1, 0] \quad (166)$$

in cui $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ è lo spazio rispetto a cui vedo la topologia e $[-1, 0]$ è un insieme chiuso di $\mathbb{R}$.

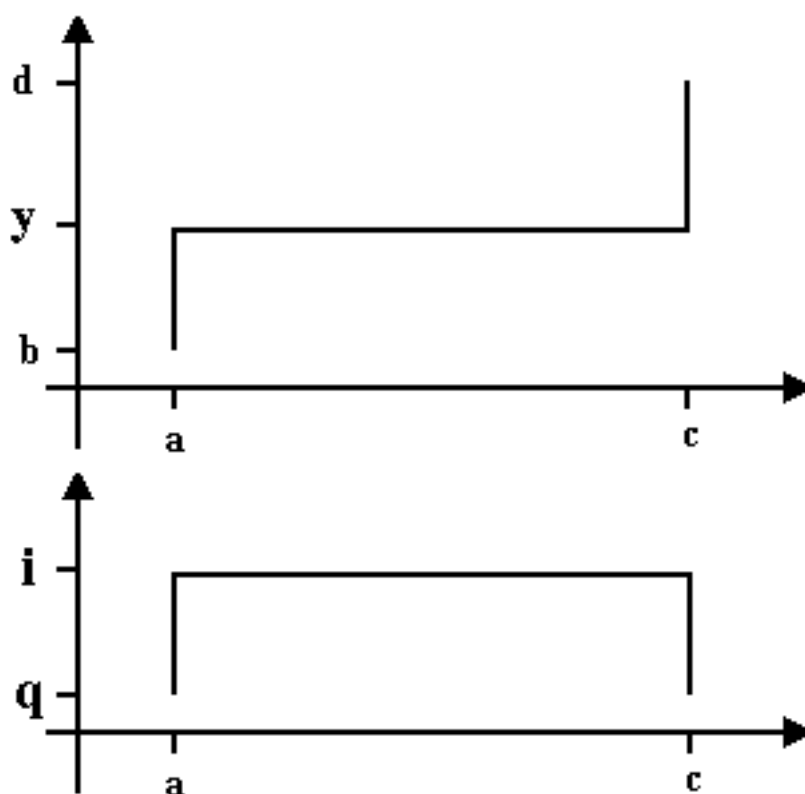


Figura 39: Connessione per archi (dettagli nel testo)

Esercizio 10.5 Considero $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ (ovvero $\mathbb{R}^2$ da cui tolgo tutti i punti con coordinate razionali ovvero un insieme di punti denso). So che $\mathbb{R}^2$ è connesso per archi, voglio dimostrare che lo è anche $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.

Con riferimento alla figura 39 (in alto) posso prendere due punti in $\mathbb{R}^2$, il primo (a, b) tale che tale che, ad esempio, $a \in \mathbb{Q}$ mentre $b \notin \mathbb{Q}$ e il secondo (c, d) tale che, ad esempio, $c \notin \mathbb{Q}$ mentre $d \in \mathbb{Q}$. Da ciò discende che:

1. $(a, b) \notin \mathbb{Q}^2$ e cioè $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$,
2. $(c, d) \notin \mathbb{Q}^2$ e cioè $(c, d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.

Mi muovo ora lungo la retta $x = a$ fino a che non arrivo al valore y dell'ordinata: non posso arrivare fino a d perchè $(a, d) \in \mathbb{Q}^2$ e non appartiene al mio spazio topologico. Posso arrivare fino a (a, y) con $y \notin \mathbb{Q}$ cioè mi sposto in quella direzione per quanto posso cioè fino a che trovo irrazionali. A questo punto mi sposto lungo la retta $(0, y)$ fino al punto $(c, y) \notin \mathbb{Q}^2$ e, infine, lungo la retta $x = c$ fino al punto $(c, d) \notin \mathbb{Q}^2$. In questo modo posso trovare

un percorso di al più tre segmenti da un punto all'altro che non passa mai per punti di $\mathbb{Q}^2$ ovvero per punti del tipo $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$. In questo caso ho un percorso di due segmenti da (a, b) a (c, b) e poi a (c, d) .

Con riferimento alla figura 39 (in basso) se a, b sono irrazionali e $q \in \mathbb{Q}$ non posso andare direttamente da (a, q) a (b, q) perchè potrei dover passare per un punto di $\mathbb{Q}^2$ per cui devo percorrere un cammino di tre pezzi: da (a, q) a (a, i) (con i irrazionale) da (a, i) a (b, i) e da (b, i) a (b, q) .

Teorema 10.6 Dato un insieme C connesso esiste una famiglia di insiemi connessi C_λ ($\lambda \in \Lambda$) tali che $\forall \lambda$:

1. $C_\lambda \cap C \neq \emptyset$
2. $C \cup (\cup_\lambda C_\lambda) = \cup_\lambda (C \cup C_\lambda)$ è connesso.

Si usa tale teorema per dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è connesso.

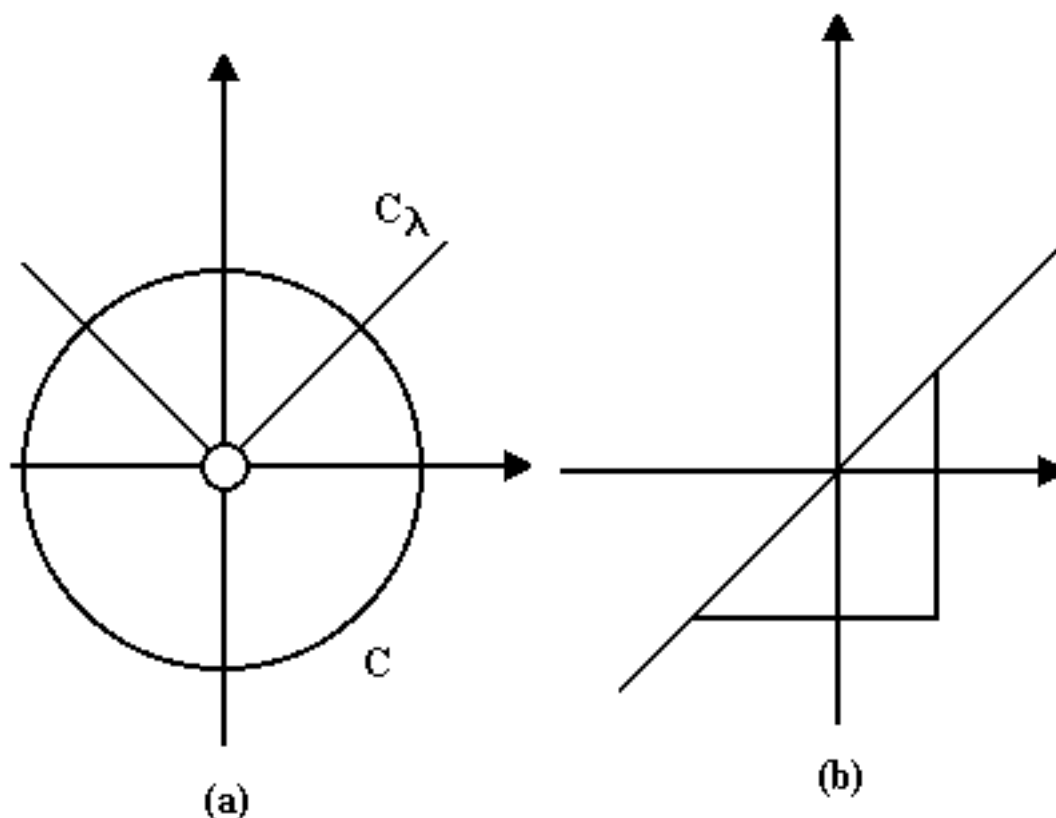


Figura 40: Esempio di insieme connesso (dettagli nel testo)

Con riferimento alla figura 40 (a) si ha:

1. la circonferenza C è un insieme connesso;
2. le semirette C_λ sono insiemi connessi aperti (perchè mancano del punto $(0, 0)$).

Da tutto ciò e dal teorema precedente segue che:

$$\cup_\lambda (C \cup C_\lambda) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad (167)$$

è un insieme connesso. La figura 40 (b) mostra come la connessività non si conserva sui sottoinsiemi.

Teorema 10.7 *Dati gli spazi topologici X e Y e una funzione continua:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (168)$$

se C è un sottoinsieme connesso di X allora $f(C) \subset Y$ è un insieme connesso.

Dimostrazione

La dimostrazione viene fatta per assurdo ovvero si suppone che $f(C)$ non sia connesso per cui esistono due insiemi aperti di Y , A_1 e A_2 , tali che:

1. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
2. $A_1 \cup A_2 \supset f(C)$,
3. $A_1 \cap f(C) \neq \emptyset$,
4. $A_2 \cap f(C) \neq \emptyset$.

A_1 e A_2 sono insiemi aperti e disgiunti nella topologia di $f(C)$. Dal fatto che f è continua si ha che $f^{-1}(A_1)$ e $f^{-1}(A_2)$ sono aperti (perchè controimmagini di aperti mediante una funzione continua) e disgiunti (per definizione di funzione). In più, dato che trovo punti di C da cui sono partito ho:

1. $C \cap f^{-1}(A_1) \neq \emptyset$,
2. $C \cap f^{-1}(A_2) \neq \emptyset$

Inoltre si ha $C = C \cap f^{-1}(A_1) \cup C \cap f^{-1}(A_2)$ ovvero $f^{-1}(A_1)$ e $f^{-1}(A_2)$ sono insiemi aperti di X che coprono C e sono disgiunti tali che $f(C) \subset A_1 \cup A_2$ ma ciò è assurdo perchè comporterebbe che C è sconnesso contro l'ipotesi di partenza. Con riferimento alla figura 41, si sfrutta il fatto che:

1. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

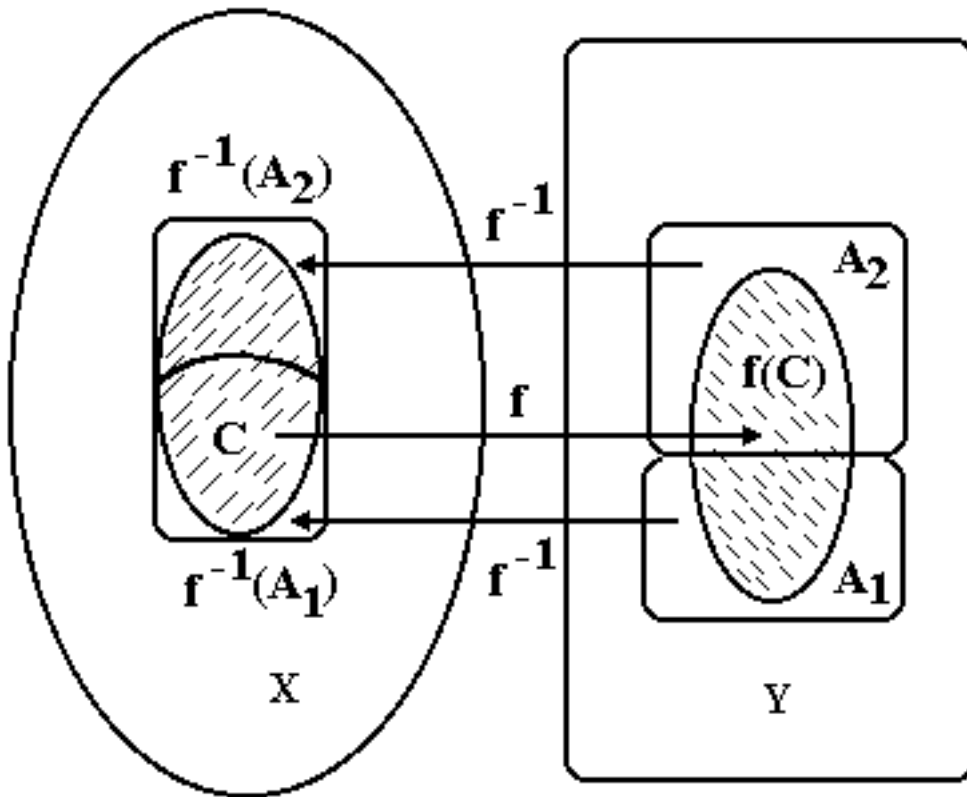


Figura 41: Funzioni continue e connessività (dettagli nel testo)

$$2. f^{-1}(A_1 \cap A_2) = \emptyset,$$

ovvero

$$f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = \emptyset \quad (169)$$

per cui le controimmagini sono disgiunte perchè se non lo fossero avrei almeno un punto in X che mediante la f andrebbe sia in A_1 sia in A_2 in contrasto con il fatto che la f è una funzione. In più si ha che $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ sempre dal fatto che la f è una funzione.

Esempio 10.6 Data la funzione:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (170)$$

definita come associare a un valore $t \in [0, 2\pi]$ una coppia di valori $(\cos(t), \sin(t))$ (che individuano una circonferenza, vedi la figura 42 (a)) si

ha che $[0, 2\pi]$ è connesso perchè è un intervallo di $\mathbb{R}$ e, poichè la f è continua, la circonferenza è un insieme connesso di $\mathbb{R}^2$ perchè immagine di un insieme connesso tramite una funzione continua (si può usare la definizione di connessione per archi dal momento che se un insieme è connesso per archi allora è connesso).

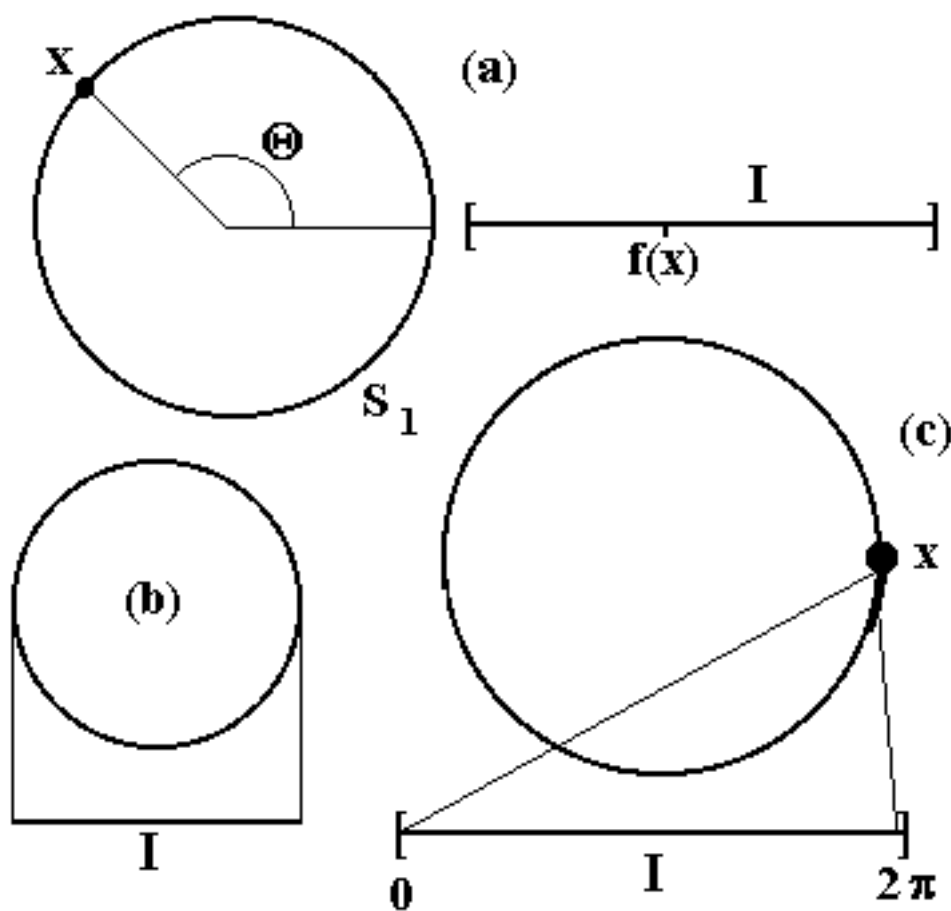


Figura 42: Ancora su funzioni continue e connessività (dettagli nel testo)

Se la funzione f è definita come associare a un valore $t \in \mathbb{R}$ una coppia di valori $(e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ (che individuano una spirale logaritmica) si ha che $f(\mathbb{R})$ è un insieme connesso perchè lo è $\mathbb{R}$.

Con riferimento alle figure 42 (a), (b) e (c), se con S^1 si indica una circonferenza come insieme di $\mathbb{R}^2$ e con I un intervallo di $\mathbb{R}$ (ad esempio $I = [0, 2\pi]$)

non può esistere una funzione f continua:

$$f : S^1 \longrightarrow I \quad (171)$$

che sia una corrispondenza biunivoca. Supponiamo che f sia *iniettiva* (vedi la figura 42 (b)). Si ha $x \in S^1$ che viene portato in $f(x)$. Se (vedi la figura 42 (a)) si prende $S^1 \setminus \{x\}$ come insieme connesso, tale insieme è connesso per archi. Se considero il punto di coordinate $(\cos(\theta + t), \sin(\theta + t))$, al variare di t in $(0, 2\pi)$ descrive la circonferenza eccettuato il punto $\{x\}$. Se la funzione f è continua da un insieme connesso a un insieme connesso allora $f(S^1 \setminus \{x\})$ risulta connesso ma ciò è falso perchè si tratta di un intervallo privato di un punto e, pertanto, non può essere connesso. Con riferimento alla figura 42 (c) si può dimostrare la cosa per altra via: il punto x è immagine sia di 0 sia di 2π e, perciò, se si vuole una corrispondenza biunivoca si deve escludere 2π per cui punti vicini hanno immagini lontane da cui discende che f non può che essere discontinua anche se solo in x .

10.4 Omeomorfismo

Un **omeomorfismo** è un *isomorfismo su spazi vettoriali*. Nel seguito studieremo proprietà invarianti degli omomorfismi.

Definizione 10.16 Due spazi topologici X e Y sono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo fra di loro ovvero se esiste:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (172)$$

continua e invertibile cui è associata f^{-1} continua (per cui f è detta essere bicontinua ovvero è continua insieme alla sua inversa).

Se su X ho la topologia τ_X e su Y ho la topologia τ_Y allora ho:

$$f : X, \tau_X \longrightarrow Y, \tau_Y \quad (173)$$

per cui $\forall B \in \tau_Y$ si ha $f^{-1}(B) \in \tau_X$. Una funzione f continua “retrotrasporta” insiemi aperti in insiemi aperti ovvero è tale che $\forall A \in \tau_X$ si ha $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) \in \tau_Y$ perchè se f^{-1} è continua allora lo è anche $(f^{-1})^{-1}$.

Un omeomorfismo stabilisce una *corrispondenza biunivoca* fra aperti di X e aperti di Y per cui le proprietà che valgono per gli aperti di X valgono anche per quelli di Y . Un modo diverso per esprimere le cose è quello di dire che per una funzione f continua e invertibile l'immagine di ogni insieme aperto è un insieme aperto ovvero la f trasforma aperti in aperti per cui si lavora solo con insiemi aperti. Se definisco una funzione continua e invertibile su

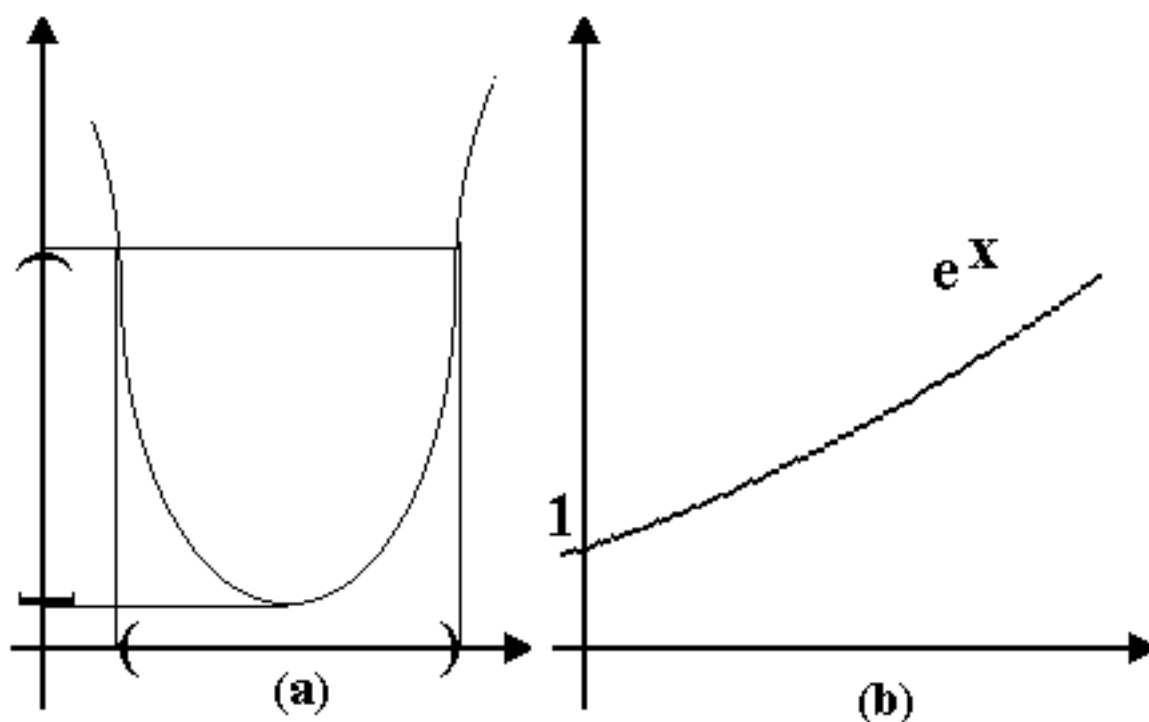


Figura 43: Funzioni invertibili e non (dettagli nel testo)

insiemi chiusi ho che tale funzione trasforma insiemi chiusi in insiemi chiusi. La figura 43 mostra, a sinistra, una funzione non invertibile e, a destra, una funzione invertibile: nel primo caso un intervallo aperto come $(1, 2)$ è mappato in un intervallo che non è aperto (ma neanche chiuso) mentre nel secondo caso l'intervallo aperto $(-\infty, 0)$ viene mappato nell'intervallo aperto $(0, 1)$ (e l'intervallo $(0, +\infty)$ in $(1, +\infty)$). In genere una f continua non trasforma insiemi aperti (o chiusi) in insiemi aperti (o chiusi) mentre ciò accade se f è continua e invertibile.

Definizione 10.17 (Omeomorfismi e relazioni di equivalenza) *Gli omeomorfismi sono relazioni di equivalenza e ciò implica che gli spazi topologici contengono spazi equivalenti fra di loro. Se f è un omeomorfismo e id è la funzione identità (che è banalmente un omeomorfismo) si ha che dati due spazi topologici X e Y le seguenti proprietà, che caratterizzano una relazione di equivalenza, sono verificate:*

1. **riflessiva:** $\text{id} : X \longrightarrow X$,
2. **simmetrica:** se $f : X \longrightarrow Y \implies f^{-1} : Y \longrightarrow X$,

3. **transitiva:** se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z \implies g \cdot f : X \longrightarrow Z$

per cui si ha che se X è omeomorfo a Y e Y è omeomorfo a Z allora X è omeomorfo a Z e $g \cdot f$ è un omeomorfismo se lo sono f e g . Si hanno, pertanto, le classi di equivalenza di spazi omeomorfi fra loro che sono, pertanto, indistinguibili.

Esempio 10.7 Se considero:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad (174)$$

tale insieme non è omeomorfo ad alcun sottoinsieme di $\mathbb{R}$ per cui non lo è neanche rispetto a $\mathbb{R}$. Se, dato $X \in \mathbb{R}$, esistesse una funzione f continua:

$$f : X \longrightarrow S^1 \quad (175)$$

dotata di funzione inversa f^{-1} avrei che da S^1 connesso discenderebbe X connesso e quindi X sarebbe un intervallo I ma non esiste (come già visto) una corrispondenza biunivoca (f continua e invertibile) fra S^1 e un qualche intervallo I .

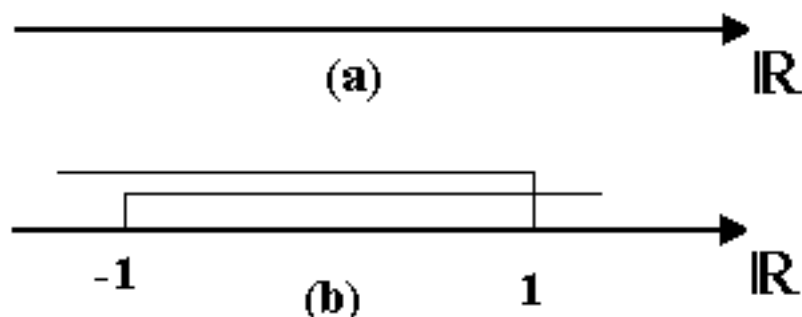


Figura 44: *Compatto e ricoprimento (dettagli nel testo)*

Si introduce ora il concetto di **compattezza** e lo si mette in relazione con il concetto di ricoprimento.

Definizione 10.18 Uno spazio topologico X è uno spazio topologico **compatto** se, volendo ricoprirlo con insiemi aperti, se ne può scegliere un numero finito in modo da ricoprirlo completamente.

In modo più formale si ha che uno spazio topologico X è compatto se data

una qualunque famiglia di insiemi aperti A_λ (tali che $\cup_\lambda A_\lambda = X$) ovvero data $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ esiste un insieme di indici in Λ , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che:

$$\cup_{i=1}^n A_{\lambda_i} = X \quad (176)$$

In questo caso si ha un sottoricoprimento finito cioè da ogni ricoprimento è possibile estrarne uno finito detto, pertanto, sottoricoprimento finito.

La figura 44 presenta un ricoprimento finito di $\mathbb{R}$ con gli insiemi aperti $(-1, \infty)$ e $(-\infty, 1)$ ma ciò non implica che $\mathbb{R}$ risulti compatto perchè la proprietà deve valere per ogni ricoprimento. Se si considera, infatti, $z \in \mathbb{Z}$ e si prendono gli intervalli del tipo $(z - 2/3, z + 2/3)$ si ha che ogni intero sta in un solo intervallo aperto e si hanno aperti la cui unione ricopre $\mathbb{R}$ ma appena se ne toglie uno si ha un buco per cui:

$$\cup_{z \in \mathbb{Z}} (z - 2/3, z + 2/3) \quad (177)$$

è un ricoprimento completo di $\mathbb{R}$ da cui non si può estrarre nessun sottoricoprimento finito dal momento che non si può togliere nessun elemento senza creare un “buco” in modo da non ricoprire più $\mathbb{R}$. Da ciò discende che $\mathbb{R}$ non è compatto.

Se si ha uno spazio metrico $(X, d) \forall x \in X$ e $\forall n \exists y \in X$ tale che $d(x, y) > n$. Se considero come insiemi aperti $I(y, n)$ le circonferenze concentriche di raggio crescente (a partire da quella di raggio unitario) si ha una famiglia di aperti (detta telescopica perchè ogni intorno è contenuto nei successivi) che ricopre $X \subset \mathbb{R}^2$ ovvero tale che:

$$\cup_n I(y, n) = X \quad (178)$$

ma di tale famiglia non ne posso prendere un numero finito per ricoprire X per cui non esiste un sottoricoprimento finito: se lo spazio X non è finito posso prendere un intero N tale che se ho $n < N$ non riesco a ricoprire X . Si ha un enunciato duale. Se considero una famiglia qualunque di insiemi chiusi B_λ (con $\lambda \in \Lambda$), ovvero $\{B_\lambda\}$, tale che $\cap_\lambda B_\lambda = \emptyset$ allora esiste un insieme di indici in Λ , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tali che:

$$\cap_{i=1}^n B_{\lambda_i} = \emptyset \quad (179)$$

e quindi X è compatto se una tale sottofamiglia di insiemi chiusi esiste.

Definizione 10.19 (Sottoinsieme compatto di spazio topologico)

Dato uno spazio topologico X e dato un sottospazio topologico $Y \subset X$ si dice che Y è compatto in X se è compatto con la topologia indotta su di esso da X .

Teorema 10.8 *Dati due spazi topologici X e Y e una funzione continua:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (180)$$

se K è un insieme compatto di X ($K \subset X$) allora $f(K)$ è un insieme compatto di Y in modo che la f continua mappa insiemi compatti in insiemi compatti.

Dimostrazione

Si considera un insieme $K \subset X$ compatto e un ricoprimento $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ di $f(K)$ in cui gli A_λ sono insiemi aperti di Y . Per ipotesi f è continua per cui gli insiemi $f^{-1}(A_\lambda)$ sono insiemi aperti che definiscono una famiglia di insiemi aperti $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ che sono un ricoprimento di K . Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ricopre $f(K)$ sfruttando il fatto che:

$$f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i) \quad (181)$$

(con B_i insiemi qualunque) e scegliendo un sottoinsieme degli insiemi $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ ovvero prendendo gli insiemi $\{f^{-1}(A_{\lambda_i})\}$ con $i = 1, \dots, n$, si ha che:

$$f(f^{-1}(A_{\lambda_i})) \subset A_{\lambda_i} \quad (182)$$

dove gli insiemi $f(f^{-1}(A_{\lambda_i}))$ sono un ricoprimento di $f(K)$ e gli n A_{λ_i} sono anch'essi un ricoprimento di $f(K)$. Si ha, quindi, un ricoprimento finito di $f(K)$ per cui si è dimostrato che se K è compatto lo stesso vale per $f(K)$ se la f è continua.

In altre parole se $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ è un ricoprimento di K compatto ne posso estrarre un sottoricoprimento finito $\{f^{-1}(A_{\lambda_i})\} \supset K$ per cui applicando m. a m. la f sia ha:

$$\cup_{i \in I} f(f^{-1}(A_i)) \supset f(K) \quad (183)$$

da cui la tesi.

Esercizio 10.6 *Se (X, d) è uno spazio metrico e si ha un suo sottoinsieme $K \subset X$ dimostrare che si ha:*

1. K compatto $\Rightarrow K$ chiuso e limitato,
2. K chiuso e limitato $\nRightarrow K$ compatto,

ovvero che i compatti sugli spazi metrici sono chiusi e limitati ma non è vero il viceversa.

Nota 10.14 Dato un insieme $A \subset X$ ne posso sempre trovare un ricoprimento aperto (al limite è dato da X stesso). Ciò che non si può sempre trovare è un sottoricoprimento finito in corrispondenza di ognuno dei ricoprimenti che trovo.

Esercizio 10.7 (Teorema di Heine-Pinkerle-Borel) Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ con la distanza usuale si ha che un insieme è compatto $\iff$ è chiuso e limitato.

Esercizio 10.8 Dimostrare che $\mathbb{R}$ con la topologia di Zarinski è di tipo T_1 ovvero ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è compatto e lo posso ricoprire con insiemi aperti.

Esercizio 10.9 (Teorema 1) Dato uno spazio topologico X di tipo T_2 e un suo sottoinsieme $K \subset X$ dimostrare che si ha:

$$K \text{ compatto} \Rightarrow K \text{ chiuso} \quad (184)$$

Esercizio 10.10 (Teorema 2) Dato uno spazio topologico X compatto e di tipo T_2 dimostrare che X è di tipo T_4 ovvero spazi compatti e separabili sono spazi normali.

Esercizio 10.11 (Teorema 0) Dato uno spazio topologico X compatto e dato un insieme chiuso $Y \subset X$ dimostrare che Y è compatto.

Da questo Teorema 0 si ha che gli insiemi chiusi contenuti in insiemi compatti sono compatti. Si ha che i teoremi 0 e 1 implicano il teorema 4 seguente.

Esercizio 10.12 (Teorema 4) Data una funzione **continua** e **invertibile** (ovvero biunivoca):

$$f : X \longrightarrow Y \quad (185)$$

se X è compatto e Y è di tipo T_2 allora f è un **omeomorfismo**.

Del Teorema 4 si dà una traccia di dimostrazione. Dato un insieme $B \subset X$ si ha: B chiuso $\Rightarrow_{(0)}$ B è compatto $\Rightarrow_{f \text{ continua}}$ $f(B)$ è compatto ed è contenuto in Y che è di tipo T_2 per ipotesi $\Rightarrow_{(1)}$ gli insiemi compatti di Y sono insiemi chiusi per cui si ha che la f mappa insiemi chiusi in insiemi chiusi e, pertanto, è un **omeomorfismo**. Si ricordi che una funzione f continua mappa insiemi compatti in insiemi compatti.

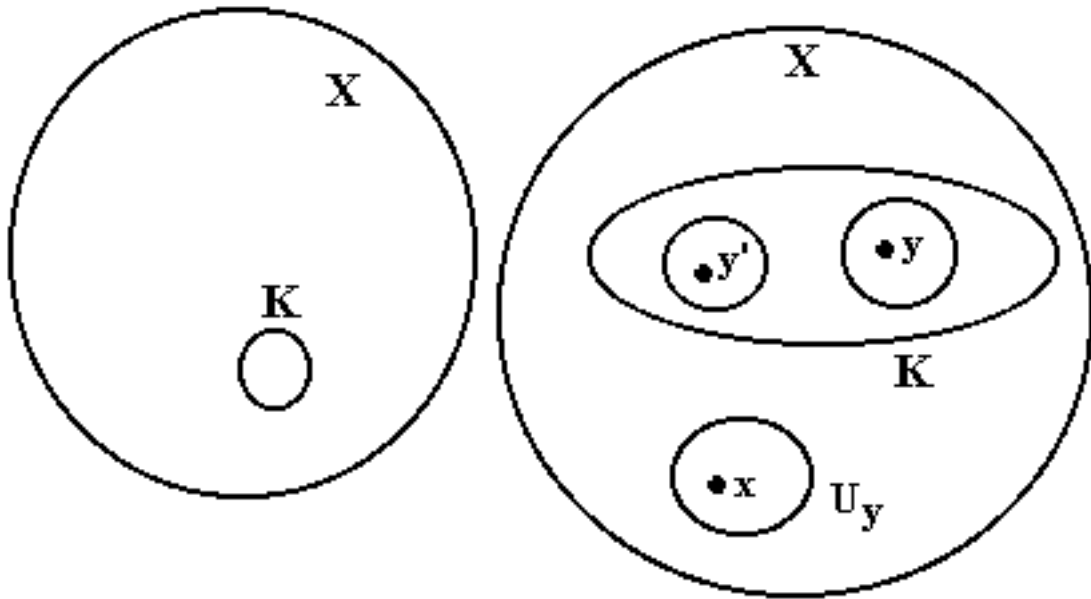


Figura 45: Ancora sugli insiemi compatti (dettagli nel testo)

Esercizio 10.13 (Teorema) Si considerano gli insiemi compatti come punti. Sia K chiuso (vedi la figura 45, sinistra). Ciò equivale a K^C aperto. Per dimostrarlo si deve dimostrare che $\forall x \notin K$ esiste un intorno U_y di x tale che $U_y \cap K = \emptyset$ (vedi la figura 45, destra) per cui si ha K^C aperto e, quindi, K è chiuso.

Se (vedi la figura 45, destra) X è di tipo T_2 comunque si prenda $y \in K$ esistono due intorni:

1. uno di x , U_y ,
2. uno di y , V_y ,

tali che $U_y \cap V_y = \emptyset$. Al variare di y varia V_y in modo da ricoprire K con una famiglia di insiemi aperti $\{V_y\}$. Se da tale famiglia ne estraggo un sottoricoprimento finito $\{V_{y_i}\}$ ($i = 1, \dots, n$) tale che:

1. $V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$ (dove gli insiemi U_{y_i} sono gli intorni di x associati agli intorni V_{y_i} di y),
2. $\cap_{i=1}^n U_{y_i}$ è un insieme aperto perchè intersezione finita di insiemi aperti e, perciò, stà in X ,
3. $x \in \cap_{i=1}^n U_{y_i}$,

4. $\cap_{i=1}^n U_{y_i}$ è un insieme più piccolo di ciascun U_{y_i} ed ha intersezione vuota con tutti gli insiemi V_{y_i} ovvero $(\cap_{i=1}^n V_{y_i}) \cap (\cap_{i=1}^n U_{y_i}) = \emptyset$.

Si noti che $\cap_{i=1}^n V_{y_i}$ è un ricoprimento di K che lo contiene. Si è ottenuto più di quanto si voleva perchè si sono trovati un intorno di x e un insieme compatto K che sono disgiunti. Tutto ciò è alla base della dimostrazione dell'Esercizio/Teorema 2. Al proposito, e con riferimento alla figura 46, si

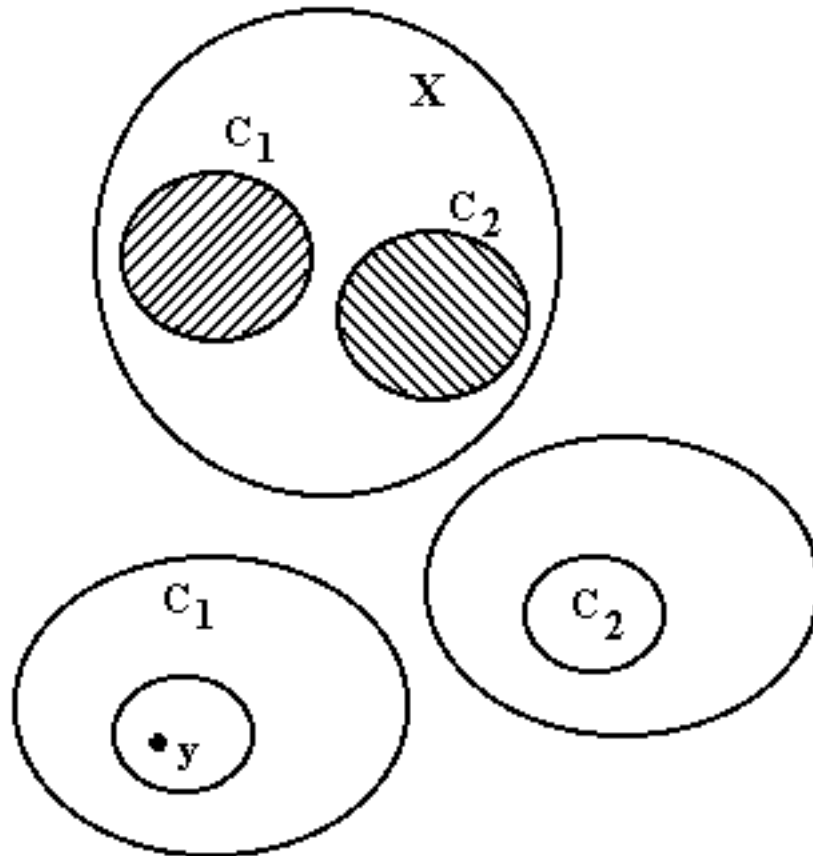


Figura 46: Ancora sugli insiemi chiusi e disgiunti (dettagli nel testo)

ha che se lo spazio topologico è di tipo T_2 al suo interno si possono considerare due insiemi C_1 e C_2 chiusi e disgiunti.

Siccome X è compatto per ipotesi si ha che C_1 e C_2 sono compatti (dato che un insieme chiuso in un compatto è compatto). Si sfrutta il fatto che gli insiemi sono di tipo T_2 (che eredita ai sottoinsiemi di X) e si prende $y \in C_1$ per cui esistono:

1. un intorno di y ,

2. un intorno di C_2

che non hanno punti in comune e ciò vale per qualunque punto di C_1 . Da un ricoprimento $\{U_y\}$ se ne estrae uno finito $\{U_{y_i}\}$ che ricopre C_1 . Per ogni U_{y_i} si ha, per quanto visto in precedenza, un aperto V_{y_i} che contiene C_2 tale che $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$. Si ha quindi che:

$$\text{compatto} + T_2 \implies \text{normale} \quad (186)$$

11 Sesta Lezione

11.1 Ancora sugli spazi compatti

Se X è uno spazio topologico compatto $\forall K, Y \subset X$ si ha che:

1. se Y è chiuso allora Y è compatto nella topologia indotta su Y ;
2. se X è di tipo T_2 e K è compatto allora K è chiuso;
3. se X è di tipo T_2 ed è compatto allora X è di tipo T_4 ;
4. se X è di tipo T_4 un suo sottospazio è certamente di tipo $T_{3.5}$ ma non è necessariamente T_4 ; so che $T_4 \subset T_{3.5}$ per cui si ha una ereditarietà del tipo $X \in T_4 \Rightarrow Y \in T_{3.5}$;
5. se lo spazio X è metrico allora X è di tipo T_4 cioè gli spazi metrici sono spazi normali. Se si ha Y tale che $Y \subset X$ la topologia indotta da X su Y è quella che è caratterizzata dalla stessa funzione distanza d caratteristica dello spazio metrico X per cui la topologia indotta da X su Y definisce uno spazio metrico.

11.2 Spazi compatti, proprietà

Teorema 11.1 (Teorema di Heine-Pinkerle-Borel) *Se X è uno spazio topologico compatto e si prende $A \in X$ infinito allora A ammette almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione

La dimostrazione è per assurdo: si nega la tesi e cioè si suppone che A non ammetta punti di accumulazione in modo che si dimostra che A dovrebbe essere finito. Siccome A è infinito per ipotesi allora ammette almeno un punto di accumulazione. Per ipotesi si ha che $\forall x \in X$, x non è punto di accumulazione per A per cui esiste un intorno aperto U_x del punto x tale che $U_x \cap A$ contiene al più un numero finito di punti (e ciò per definizione di punto di accumulazione: se contenesse un numero infinito di punti x sarebbe punto di accumulazione contro l'ipotesi che A ne sia privo).

Gli intorni U_x , al variare di x in X , sono un ricoprimento di X , mediante insiemi aperti, ricoprimento da cui posso estrarre un sottoricoprimento finito $\{U_{x_i}\}$ (con $i = 1, \dots, n$) che ricopre X per cui:

$$A = A \cap X = A \cap \cup_i U_{x_i} = \cup_i (A \cap U_{x_i}) \quad (187)$$

(essendo X compatto). A questo punto si ha che ognuno degli $A \cap U_{x_i}$ contiene un numero finito di punti e tali insiemi sono in numero finito n per

cui A conterrebbe un numero finito di punti contro l'ipotesi che A sia infinito da cui segue una contraddizione e, pertanto, A ha almeno un punto di accumulazione.

Definizione 11.1 (Compatti su successioni) *Se lo spazio topologico X è compatto e soddisfa il **primo assioma di numerabilità** e si ha una successione:*

$$\{x_n\} \subset X \quad (188)$$

allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_i}\}$ convergente. Se la $\{x_n\}$ contiene infiniti punti allora ammette almeno un punto di accumulazione: sia $\bar{x}$ un punto di accumulazione per tale successione.

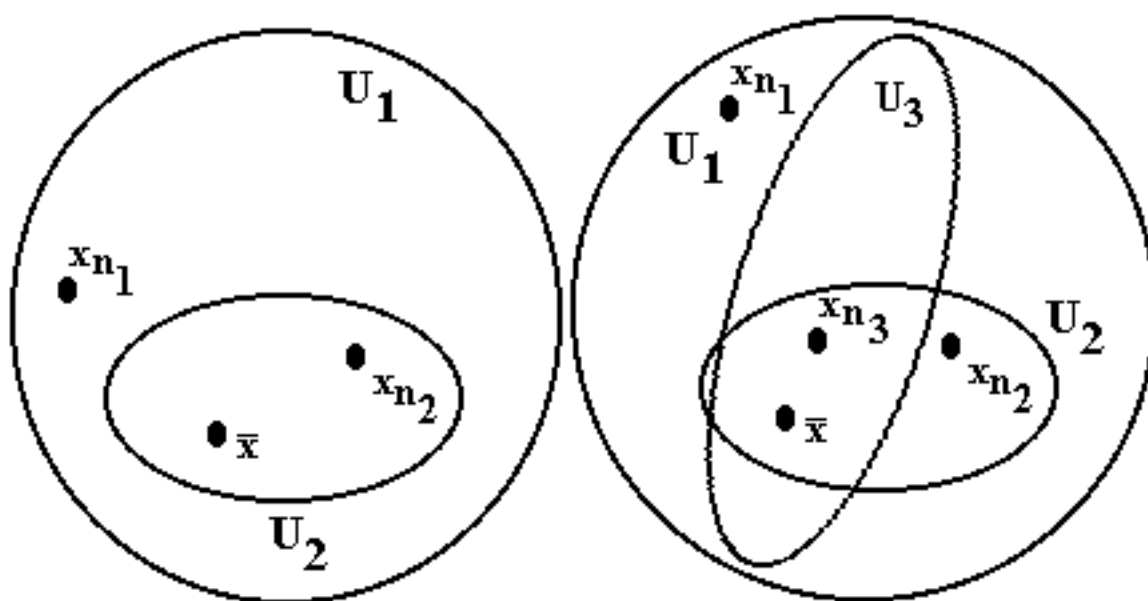


Figura 47: Sulle successioni (dettagli nel testo)

Con riferimento alla figura 47 (sinistra), si ha che U_1 appartiene al sistema fondamentale di intorni e in più $\{x_n\} \rightarrow \bar{x}$ per cui a partire da un certo n in poi gli intorni U_i contengono infiniti punti di una successione convergente (vedi la figura 47 (destra)).

Se X è compatto e soddisfa il primo assioma di numerabilità e se $\{x_n\} \subset X$ ha una sottosuccessione convergente si parla di **compattezza per successioni**.

Esempio 11.1 *Si abbia uno spazio topologico X e sia A un sottoinsieme finito di X allora A è necessariamente compatto per successioni dal momento*

che se si considera una successione $\{s_n\}$ in A si ha che, essendo A finito, almeno un elemento a_0 compare infinite volte nella successione per cui come sottosuccessione si può prendere quella contenente solo a_0 che converge ad $a_0 \in A$.

Esempio 11.2 Se si considera $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ con la topologia ordinaria si ha che tale insieme non è compatto per successioni. Se si considera la successione $\{s_n\}$ con:

$$s_n = \frac{1}{n+1} \quad (189)$$

si ha che questa converge a 0 e lo stesso vale per ogni sua sottosuccessione ma $0 \notin A$ per cui A non è compatto per successioni.

Nota 11.1 Si parla di:

1. compattezza pura,
2. compattezza per successioni,
3. compattezza numerabile,
4. compattezza locale.

Definizione 11.2 Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice **numerabilmente compatto** sse ogni sottoinsieme infinito B di A ha un punto di accumulazione in A . Questa definizione discende dal classico Teorema di Bolzano-Weierstrass in base al quale ogni insieme infinito e limitato di numeri reali ha un punto di accumulazione.

Esempio 11.3 Dato $\mathbb{R}$ ogni insieme limitato e chiuso del tipo $A = [0, 1]$ è numerabilmente compatto. Se considero $B \subset A$ e infinito ho che B è limitato per cui per il teorema di Bolzano-Weierstrass ha un punto di accumulazione che appartiene ad A essendo A chiuso per cui A è numerabilmente compatto.

Esempio 11.4 Dato $\mathbb{R}$ un insieme limitato e aperto del tipo $A = (0, 1)$ non è numerabilmente compatto dal momento che se come B si considera il sottoinsieme infinito individuato dalla successione:

$$s_n = \frac{1}{n+1} \quad (190)$$

si ha che B ha come punto di accumulazione il punto 0 che non appartiene ad A per cui A non è numerabilmente compatto.

Fra le varie definizioni di compattezza viste sinora si hanno le seguenti relazioni:

1. compatto $\Rightarrow$ numerabilmente compatto,
2. compatto per successioni $\Rightarrow$ numerabilmente compatto.

Definizione 11.3 (Compattezza locale, prima definizione) *Uno spazio topologico X si dice essere **localmente compatto** se ogni $p \in X$ ha un **intorno** compatto. Si ricorda che dato $p \in X$ un suo intorno è un soprainsieme N di un insieme aperto G che contiene p per cui si ha:*

$$p \in G \subset N \quad (191)$$

Si ha che la relazione “ N è l'intorno di un punto” è l'inversa della relazione “ p è un punto interno di N ”.

Definizione 11.4 (Compattezza locale, seconda definizione) *X si dice **localmente compatto** se $\forall x \in X \exists$ un intorno $U_x \subset X$ tale che la sua chiusura $\bar{U}_x$ è un insieme compatto.*

Esempio 11.5 *Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia ordinaria. Se si considera $p \in \mathbb{R}$ si ha che p è contenuto in un insieme chiuso e limitato $[p - \delta, p + \delta]$ e perciò, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, compatto per cui è localmente compatto. Come già visto altrove $\mathbb{R}$ non è però compatto dato che si hanno ricoprimenti di aperti dai quali non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.*

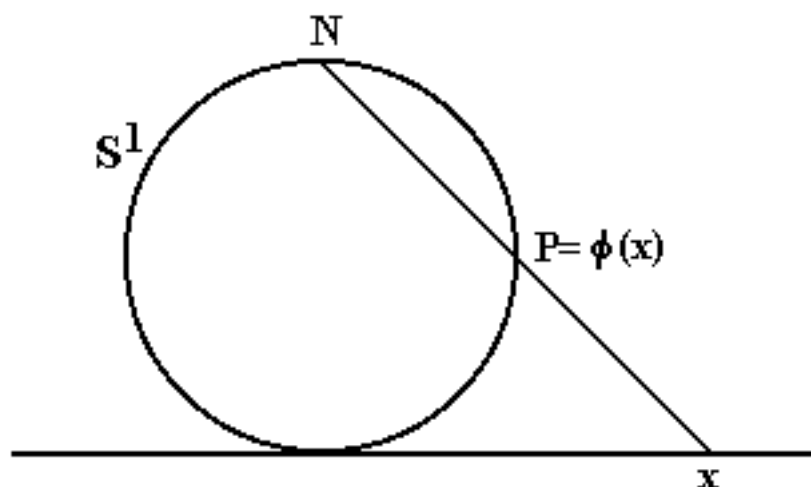
Nota 11.2 *Da quanto detto sinora si ha:*

1. ogni spazio topologico compatto è localmente compatto;
2. se uno spaziotopologico è localmente compatto non è detto che sia compatto.

Esercizio 11.1 (Teorema) *X è localmente compatto se ogni punto $x \in X$ ammette un sistema fondamentale di intorni (ovvero di insiemi ciascuno dei quali contiene un insieme aperto che contiene il punto) compatto.*

La proprietà è vera in $\mathbb{R}$ che è localmente compatto come lo è $\mathbb{R}^n$.

Se ho $x \in \mathbb{R}$ e considero, per $\varepsilon > 0$, l'intervallo chiuso $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ tale intervallo è compatto. Al variare di $\varepsilon > 0$ definisco una famiglia di compatti ciascuno dei quali contiene un aperto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ e, pertanto, tali intervalli formano un sistema fondamentale di intorni.

Figura 48: Compattificazione e $\mathbb{R}^2$ (dettagli nel testo)

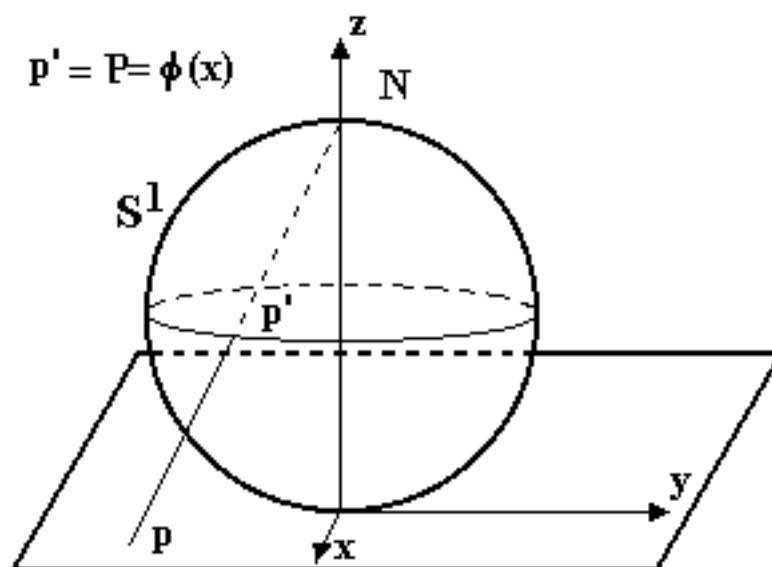
Nota 11.3 (Compattificazione) Si parla di **compattificazione** mediante aggiunta di un punto o di Alexandroff. La si vede in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Nel primo caso si fa riferimento alla figura 48. S^1 è una circonferenza ovvero un insieme compatto in $\mathbb{R}^2$ con la topologia ordinaria. Si vede come, presa la retta tangente alla circonferenza e tracciata la secante per il punto N , si ha che esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti della retta e quelli di S^1 tranne che per il punto N . Si ha cioè:

$$\phi: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \setminus \{N\} \quad (192)$$

in cui la ϕ è biunivoca e invertibile e bicontinua (ovvero è continua insieme alla sua inversa ϕ^{-1}) ovvero è un **omeomorfismo**. Da ciò segue che $\mathbb{R}$ e $S^1 \setminus \{N\}$ sono topologicamente equivalenti perchè sono omeomorfi: ciò che manca a $\mathbb{R}$ per essere compatto è solo l'inverso del punto N ovvero esiste uno spazio omeomorfo a $\mathbb{R}$ tale che, aggiungendovi un punto, si ottiene un compatto e lo stesso vale per $\mathbb{R}$. Nel caso di $\mathbb{R}^3$ si fa riferimento alla figura 49. Si ha una sfera S^2 di raggio unitario di cui si considera solo la superficie. Se si considerano il piano tangente e la retta secante (vedi la figura 49) si ottiene per **proiezione stereografica** un omeomorfismo:

$$\phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\} \quad (193)$$

Se faccio l'intersezione di S^2 con dei piani ho delle circonferenze (dato che della sfera considero solo la superficie) e l'omeomorfismo ϕ trasforma circonferenze in circonferenze a meno che non passino per N e conserva gli angoli

Figura 49: *Compattificazione e $\mathbb{R}^3$ (dettagli nel testo)*

(ovvero esegue una trasformazione conforme). In questo caso si ha uno spazio $\mathbb{R}^2$ non compatto e omeomorfo a $S^2 \setminus N$ cui manca solo il punto N per essere compatto.

Nota 11.4 (Compattificazione) Uno spazio topologico X è detto essere “incastonato” in uno spazio topologico Y se è omeomorfo a un sottospazio di Y ovvero se esiste $S \subset Y$ tale che X è omeomorfo a S . Se, in più, Y è uno spazio compatto si dice che è una **compattificazione** di X . Di solito la compactificazione di uno spazio topologico X viene ottenuta aggiungendo uno o più punti allo spazio X in modo che:

1. sia possibile definire una topologia sull'insieme esteso;
2. l'insieme esteso sia compatto e contenga X come sottospazio.

Esempio 11.6 Si abbia $\mathbb{R}$ con la topologia ordinaria. $\mathbb{R}$ non è compatto. Per renderlo tale si aggiungono due punti indicati con i simboli $-\infty$ e $+\infty$ in modo che se definisco:

$$\mathbb{R}^* = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad (194)$$

ho un insieme compatto detto $\mathbb{R}$ -esteso. La relazione d'ordine definita su $\mathbb{R}$ con la $<$ si può estendere a $\mathbb{R}^*$ definendo per ogni $a \in \mathbb{R}$ la relazione:

$$-\infty < a < +\infty \quad (195)$$

Come base per una topologia su $\mathbb{R}^*$ posso considerare gli intervalli del tipo:

1. $(a, b) = \{x : a < x < b\},$
2. $(a, +\infty] = \{x : a < x\}$
3. $[-\infty, a) = \{x : x < a\}$

che formano una topologia ordinaria estesa $\mathcal{U}^*$.

Dato che $\mathbb{R}^*$ è compatto e contiene $\mathbb{R}$ come sottospazio si ha che il primo è una compattificazione del secondo.

Esempio 11.7 Dato un intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ è facile verificare come tale intervallo sia omeomorfo a tutto $\mathbb{R}$ con la topologia ordinaria. Si può altresì dimostrare che $\mathbb{R}^*$ con la topologia $*$ è omeomorfo a ogni intervallo chiuso $[a, b]$ compatto per il teorema di Heine-Pinkerle-Borel.

Nota 11.5 Per poter parlare di omeomorfismo si deve introdurre una topologia nello spazio di arrivo e in quello di partenza in modo da definire una funzione fra i due che risulta essere bicontinua e non è sufficiente limitarsi a stabilire una corrispondenza biunivoca fra i due spazi.

Esempio 11.8 Con riferimento alla figura (49) se C indica il piano (x, y) e S^1 la sfera di centro $(0, 0, 1)$ sull'asse z e raggio 1 si ha una retta che passa per il punto $N = (0, 0, 2)$ detto polo nord o punto all'infinito ∞ e interseca il piano C in un punto p e la sfera in un punto p' distinto da N . Supponiamo di avere una funzione:

$$f : C \longrightarrow S^1 \quad (196)$$

definita in modo che sia $f(p) = p'$. La f rappresenta un omeomorfismo da C (non compatto) a un sottoinsieme $S^1 \setminus N$ di S^1 con S^1 compatto per cui si ha che S^1 rappresenta una compattificazione di C .

In modo analogo si ha che nel caso della figura (48) la circonferenza rappresenta una compattificazione della retta.

Se X è uno spazio topologico qualunque non compatto e lo si trasforma in $\tilde{X}$ aggiungendo un punto (detto punto all'infinito):

$$\tilde{X} = X \cup \{\infty\} \quad (197)$$

si ha che $\tilde{X}$ è compatto ed è tale che la topologia indotta su $\tilde{X}$ sia quella di X (ovvero quella originaria).

Nota 11.6 Si parte da $\mathbb{R}$ e se ne considera la corrispondenza con $S^1 \setminus N$ il cui N è il punto che deve essere aggiunto perchè si ottenga un compatto. Si fa notare che gli intorno di N sono insiemi aperti di S^1 (ovvero della circonferenza).

La figura 50 presenta il caso delle semirette uscenti da N e secanti la circonferenza in modo da individuare, al limite, tutto $\mathbb{R}$ e, quindi, un complemento chiuso e limitato.

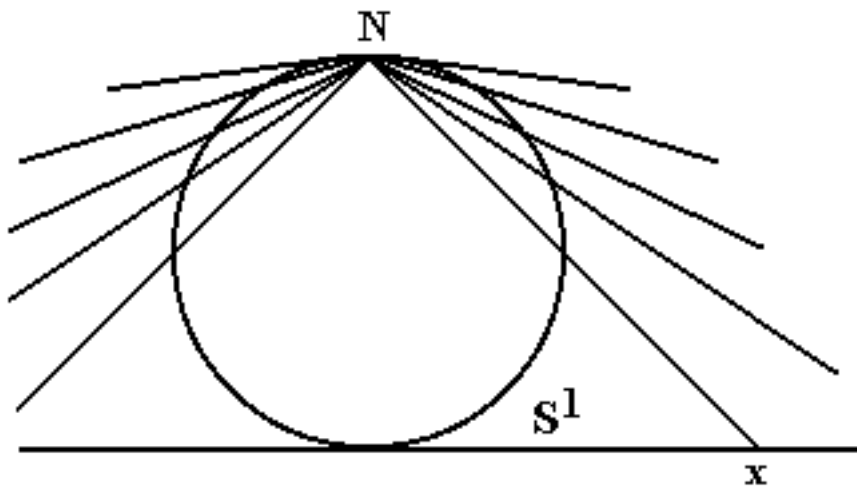


Figura 50: *Dettagli nel testo*

Dato uno spazio topologico X (non compatto) di tipo T_2 se ad esso aggiungo il punto all'infinito (in modo da renderlo compatto) ottengo $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ e quindi ho:

1. $\tilde{\tau} = \tau$ per $X \in \tilde{X}$ nelle topologie su insiemi aperti;
2. $\tilde{\tau} = \mathcal{A} \in \tilde{X}$ per insiemi aperti che contengono il punto all'infinito.

Se la chiusura di A ($\mathcal{C}A$) è un insieme compatto di X si ha $K = (\mathcal{C}A)$ per cui $\infty \in (\mathcal{C}A)$ e anche $\tilde{\tau} \in (\mathcal{C}A)$ e tali elementi sono tutti e soli gli elementi della topologia che contengono il punto all'infinito per cui si ha un sistema fondamentale di intorni di ∞ . $\tilde{\tau}$ è una base della topologia che contiene anche unioni di elementi di $\tilde{\tau}$. Dato X ho sempre insiemi compatti contenuti in esso. Se considero gli insiemi A_1 e A_2 in $\tilde{X}$ tali che $\mathcal{C}A_1$ e $\mathcal{C}A_2$ sono compatti di X ho che valgono le seguenti uguaglianze:

$$A_1 \cap A_2 = \mathcal{C}A_1 \cap \mathcal{C}A_2 = \mathcal{C}(A_1 \cap A_2) \quad (198)$$

La topologia τ rende X compatto come $\tilde{X}$ che può essere coperto da insiemi aperti.

Nota 11.7 $\tilde{X}$ è **compatto**

Nota 11.8 $\tilde{X}$ tale che $X \in \tilde{X}$ con la topologia indotta coincide con X perchè ho:

$$\tilde{\tau} = \begin{cases} \tau \text{ di } X \\ A \subset \tilde{X} \end{cases} \quad (199)$$

Nota 11.9 $\tilde{X}$ è di tipo T_1 .

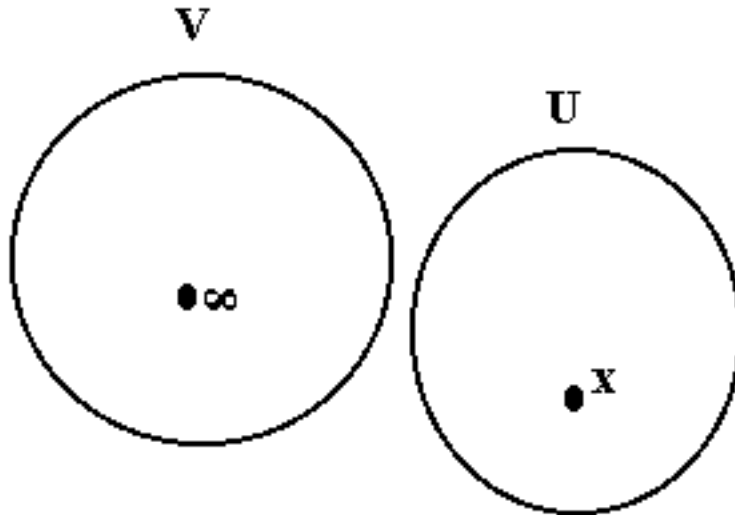


Figura 51: Separazione (dettagli nel testo)

Si ha in più una proprietà interessante che mi garantisce che la compattificazione possa essere di tipo T_2 . In generale se X non compatto è di tipo T_2 non segue necessariamente che la sua compattificazione è di tipo T_2 . Si ha che X è di tipo T_2 ed è localmente compatto sse $\tilde{X} \cup \{\infty\}$ è T_2 . La topologia su $\tilde{X}$ è la topologia $\tilde{\tau}$ vista in precedenza. Se $\tilde{X}$ è di tipo T_2 posso prendere ∞ e un punto $x \in X$ e separarli (vedi la figura 51 in cui i due insiemi aperti sono $V \in \tilde{\tau}$ per ∞ e U per x). La chiusura di V è un compatto $K \subset X$ tale che $K \supset U$ ovvero si ha un compatto K che contiene un aperto U che contiene x .

Teorema 11.2 *Sia X di tipo T_1 e sia $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$, se definisco la topologia $\tilde{\tau}$ come:*

$$\tilde{\tau} = \begin{cases} \tau & \text{di } X \subset \tilde{X} \\ A \subset \tilde{X} \text{ t. c. } \mathcal{C}A \text{ insieme chiuso e compatto di } X \end{cases} \quad (200)$$

allora $\tilde{\tau}$ è base di una topologia e con tale base $\tilde{X}$ è compatto e induce su X la stessa topologia che X aveva di suo per cui X risulta essere localmente compatto.

Teorema 11.3 (Teorema topologico) *Se uno spazio topologico X è di tipo T_2 e localmente compatto allora è completamente regolare.*

Dimostrazione

Se X è di tipo T_2 e localmente compatto allora come $\tilde{X}$ prendo la compattificazione di Alexandroff che risulta di tipo T_2 e compatta $\Rightarrow \tilde{X}$ è di tipo T_4 (perchè di tipo T_2 e compatta) $\Rightarrow \tilde{X}$ è di tipo $T_{3.5} \Rightarrow X$ è di tipo $T_{3.5}$ e quindi è completamente regolare. Nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che la proprietà di completa regolarità eredita ai sottospazi.

Nota 11.10 *Si abbia uno spazio topologico qualunque (X, τ) non compatto. Se ne definisce la compattificazione di Alexandroff (indicata come (X_∞, τ_∞)) o di punto singolo aggiungendo un solo punto detto punto all'infinito ∞ distinto da ogni altro punto di X . Nella compattificazione si ha:*

1. $X_\infty = X \cup \{\infty\}$
2. τ_∞ contiene i seguenti insiemi:
 - (a) gli insiemi contenuti in τ su X ;
 - (b) il complemento in X_∞ di ogni sottoinsieme di X che sia chiuso e compatto.

Nota 11.11 (Relazione fra uno spazio e la sua compattificazione)

In generale lo spazio (X_∞, τ_∞) può non possedere le stesse proprietà dello spazio che lo origina. Una eccezione è rappresentata dagli spazi topologici di Hausdorff o T_2 nel senso che se si ha uno spazio topologico (X, τ) di tipo T_2 e localmente compatto allora la sua compattificazione (X_∞, τ_∞) è uno spazio topologico compatto e di tipo T_2 .

Nota 11.12 (Compattezza in spazi metrici) *Dato uno spazio metrico X e un suo sottoinsieme A si ha che le seguenti affermazioni sono fra di loro equivalenti:*

1. A è compatto;
2. A è numerabilmente compatto;
3. A è compatto per successioni.

11.3 Topologia prodotto

La definizione di **topologia prodotto** è facile nel caso di prodotti finiti ed è difficile nel caso di prodotti infiniti. Nel caso di un numero finito di insiemi X_i si definisce il classico prodotto cartesiano di insiemi definendo un punto appartenente all'insieme come segue:

$$(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \quad (201)$$

se:

$$x_i \in X_i \quad (202)$$

per $i = 1, \dots, n$.

Nel caso di un numero infinito di insiemi definisco $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ con:

1. Λ contabile (ad esempio $\Lambda = \mathbb{N}$): si hanno successioni di oggetti;
2. Λ non contabile (ad esempio $\Lambda = \mathbb{R}$) : si hanno famiglie continue di oggetti.

Se considero la funzione $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ con Λ non contabile ho che tale funzione contiene quelle del caso di Λ finito o contabile. Definisco:

$$f : \Lambda \longrightarrow \cup_\lambda X_\lambda \quad (203)$$

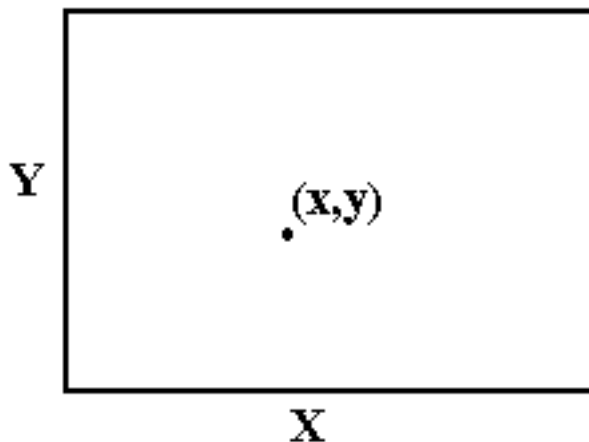
in modo che a $\lambda \in \Lambda$ venga associato l'elemento $x_\lambda \in X_\lambda$: in questo modo ad ogni λ corrisponde un $x_\lambda \in X_\lambda$.

Se $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ siamo nel caso del prodotto cartesiano classico, per insiemi finiti, e quindi ho $x_i = f(i) \in X_i$. Vedremo a questo punto esempi per prodotti finiti che vanno bene nel caso di prodotti infiniti.

Nel caso della figura 52 considero gli spazi topologici X e Y e il punto $(x, y) \in X \times Y$ (che non ha nulla a che vedere con X e con Y perchè non li contiene). Su X ho la topologia τ_X e su Y ho la topologia τ_Y . Voglio definire una topologia su $X \times Y$ che eredita dalle topologie τ_X e τ_Y .

Utilizzo al proposito le proiezioni π_X per X e π_Y per Y definite come segue:

$$\pi_X : X \times Y \longrightarrow X \quad (204)$$

Figura 52: *Topologia prodotto (dettagli nel testo)*

in modo che da (x, y) si ricavi x e:

$$\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y \quad (205)$$

in modo che da (x, y) si ricavi y . Ogni topologia su $X \times Y$ deve essere tale che sia π_X sia π_Y sono **continue**. La richiesta viene fatta su X e Y su cui ho la topologia che, invece, non ho per $X \times Y$ che contiene un numero di insiemi aperti per cui sia π_X sia π_Y sono necessariamente continue.

Se ho:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (206)$$

ho che f è di sicuro continua se Y ha pochi aperti (ad esempio nel caso che τ_Y sia la topologia indiscreta) e lo è anche se X ha molti aperti (come accade se τ_X è la topologia discreta). Su $X \times Y$ voglio la topologia meno fine fra quelle che ho su X e su Y per cui le proiezioni viste sono continue.

Se A è un sottoinsieme aperto di X e B è un sottoinsieme aperto di Y (vedi la figura 53) ottengo (mediante le “proiezioni inverse” π_X^{-1} e π_Y^{-1}):

1. $\pi_X^{-1}(A) = A \times Y$,
2. $\pi_Y^{-1}(B) = X \times B$

dove $A \times Y$ e $X \times B$ sono insiemi aperti se π_X e π_Y sono continue. Se ne considero l'intersezione ottengo $A \times B$ con $A \in \tau_X$ e $B \in \tau_Y$. Se la topologia τ contiene sia $A \times Y$ sia $X \times B$ allora si richiede che τ contenga anche $A \times B$ in modo che π_X e π_Y siano continue.

A questo punto la domanda è la seguente: la topologia τ è una base di $X \times Y$?

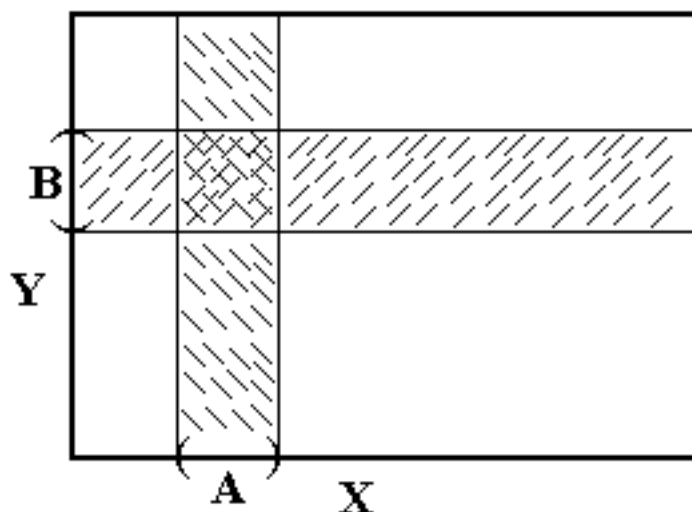


Figura 53: Ancora sulla topologia prodotto (dettagli nel testo)

In caso affermativo allora è una base per la topologia meno fine di $X \times Y$ ovvero contiene i prodotti cartesiani di tutti gli aperti di $X \times Y$.

Nota 11.13 Se considero $\mathbb{R}^2$ spazio topologico con la distanza euclidea oppure $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spazio topologico con la topologia di prodotto cartesiano ho che le due topologie sono coincidenti. Considerazioni analoghe valgono per $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}$ ripetuto n volte.

Nota 11.14 Dati gli spazi topologici X e Y se considero $X \times Y$ con la topologia prodotto vale la seguente proprietà:
le funzioni proiezione π_X e π_Y sono continue e aperte (ovvero portano aperti in aperti) ma non sono chiuse in generale ovvero non necessariamente mappano chiusi su chiusi.

La figura 54 presenta un esempio nel caso di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $x > 0$: si ha che $\mathbb{R}^2$ con $x > 0$ è un insieme chiuso perchè il suo complementare è un insieme aperto mentre le proiezioni π_X e π_Y sono gli insiemi aperti $(0, \infty)$.

Esercizio 11.2 (Teorema) Dimostrare che se X e Y sono compatti lo è anche $X \times Y$. È la versione locale del teorema di Tichonoff che vale anche nel caso di prodotti infiniti. Se ho una famiglia di insiemi compatti X_λ ($\lambda \in \Lambda$) ho che:

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \quad (207)$$

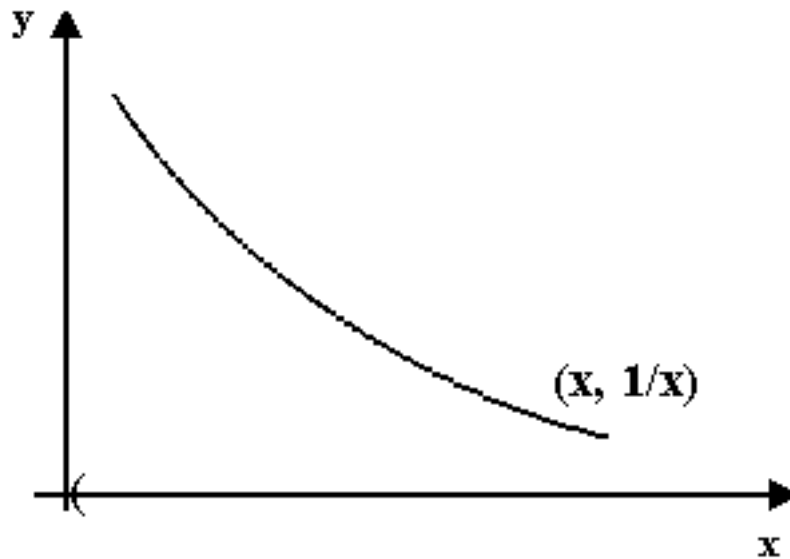


Figura 54: Funzioni e topologia prodotto (dettagli nel testo)

è un insieme compatto e in più si ha che se la funzione $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ allora $\pi_\lambda(f) = f(\lambda)$.

Esercizio 11.3 Dato uno spazio topologico X (vedi la figura 55) posso definire lo spazio prodotto cartesiano $X \times X$ in modo da definire il sottoinsieme $A = \{x, x\} \subset X \times X$. Si dimostri che A (che coincide con il segmento bisettrice di figura) è un insieme chiuso sse X è di tipo T_2 (ovvero se separo punti distinti con aperti disgiunti).

11.4 Proprietà topologiche di spazi metrici completi

Dato uno spazio metrico (X, d) una successione (che è un concetto metrico ma non topologico) $\{x_n\} \subset X$ è detta essere una **successione di Cauchy** sse per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un valore n_0 tale che per $n, m > n_0$ si ha $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definizione 11.5 Si ha il seguente risultato che lega le successioni alle successioni di Cauchy: ogni successione convergente in uno spazio metrico è una successione di Cauchy.

Proposizione 11.1 Se la successione $\{x_n\}$ è convergente a $\bar{x}$ allora è di Cauchy ma non vale il viceversa.

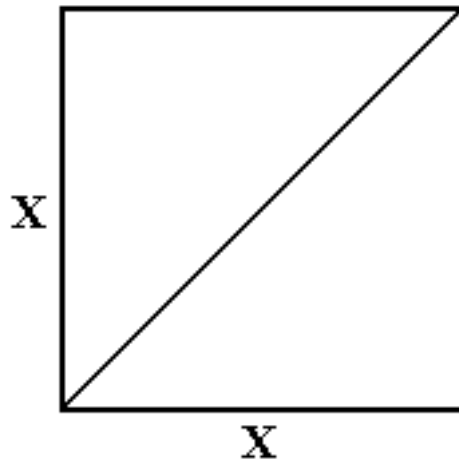


Figura 55: Funzioni e topologia prodotto (dettagli nel testo)

Esempio 11.9 Se considero $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e prendo $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}$ e prendo la successione $\{1/n\} \subset X$ ho che tale successione è di Cauchy ma non è convergente in X perchè converge a $0 \notin X$.

Definizione 11.6 Dato lo spazio metrico completo (X, d) si ha che presa una qualunque successione il suo essere di Cauchy equivale al suo essere convergente.

Vediamo ora alcuni esempi (vedi la figura 56) di spazi metrici completi e no. Se considero le funzioni di classe $\mathcal{C}^0[a, b]$ (ovvero continue sull'intervallo $[a, b]$) del tipo:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad (208)$$

e come distanze definisco:

$$d_1(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \quad (209)$$

e:

$$d_2(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (210)$$

ho che successioni che per d_2 sono di Cauchy non lo sono per d_1 . Se considero la funzione di figura 57 ho una funzione continua su uno spazio vettoriale. La successione $\{x_k^n\}$ è di Cauchy per d_2 ma non per d_1 ma non è convergente per d_2 perchè il limite non è contenuto in $\mathcal{C}^0[0, 1]$ (è la funzione discontinua che vale $=$ su $[0, 1)$ e 1 in 1) per cui per d_2 lo spazio metrico non è completo. Se considero le funzioni della classe $\mathcal{C}^0[a, b]$ con la distanza d_1 come distanza della convergenza uniforme ho che tale spazio è completo.

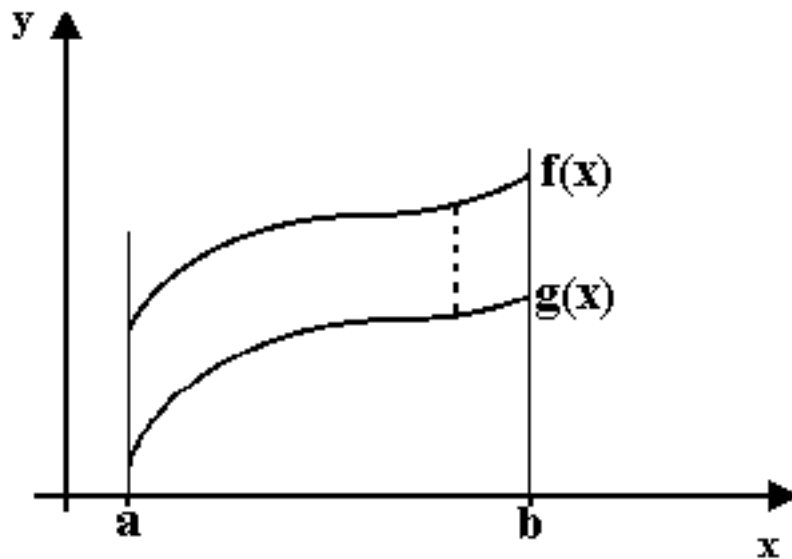


Figura 56: *Spazi metrici completi e no (dettagli nel testo)*

Nota 11.15 *La completezza non è una proprietà topologica perchè posso trovare spazi omeomorfi fra loro di cui uno è completo e uno no.*

Nota 11.16 *Una proprietà, infatti, si dice essere topologica se, quando è posseduta da uno spazio, è posseduta da ogni spazio ad esso omeomorfo.*

Per verificare che la completezza non è topologica posso considerare la funzione (vedi la figura 58):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2} \quad (211)$$

ho che:

1. per $x \longrightarrow -\infty$ $f(x) \longrightarrow 0$, essendo $\arctg -\infty = -\frac{\pi}{2}$;
2. per $x \longrightarrow +\infty$ $f(x) \longrightarrow 1$, essendo $\arctg +\infty = \frac{\pi}{2}$;

La successione di punti $x = 1, x = 2$ fino a $x = n$ non è una successione di Cauchy (dato che coppie di punti adiacenti distano sempre 1) mentre lo è tramite la f dato che i punti $f(i)$ ($i = 1, \dots, n$) si accumulano in 1 per cui da un lato non si ha la completezza mentre dall'altro si.

Se uno spazio topologico X è completo come $\mathbb{R}$ può avere sottoinsiemi (ovvero sottospazi) non completi mentre i sottoinsiemi chiusi sono completi.

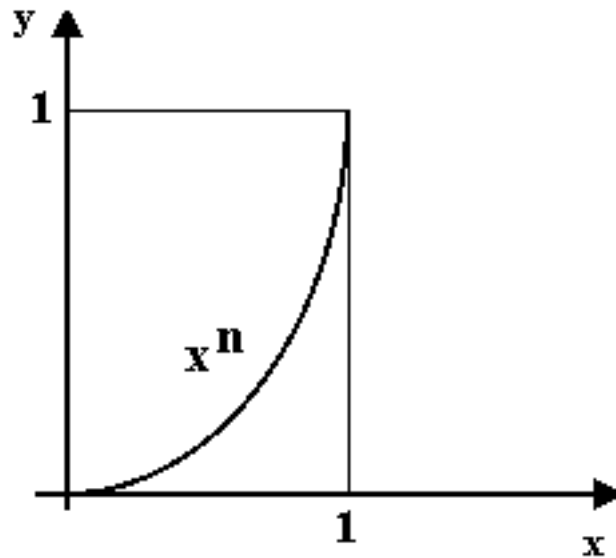


Figura 57: Spazi metrici completi e no (dettagli nel testo)

Teorema 11.4 *Dato uno spazio metrico completo X e un suo sottospazio $Y \in X$ ho che Y è **metrico completo** sse Y è chiuso.*

Nel caso degli spazi metrici completi si ha un teorema che stabilisce l'equivalenza fra quattro diverse definizioni di compattezza.

Teorema 11.5 *Se X è uno spazio metrico allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. X è compatto per insiemi aperti (e la topologia è tale che ogni ricoprimento con insiemi aperti ammetto un sottoricoprimento finito);
2. X gode della proprietà di Heine-Pinkerle-Borel (ovvero se A è un insieme infinito e $A \subset X$ allora $D(A) \neq \emptyset$, dove $D(A)$ indica l'insieme dei punti di accumulazione di A);
3. X è compatto per le successioni tali che $\forall \{x_n\}$ esiste una sottosuccessione convergente;
4. X è completo e totalmente limitato.

Nota 11.17 *Si noti che:*

$$\text{compattezza} \implies \text{completezza} \quad (212)$$

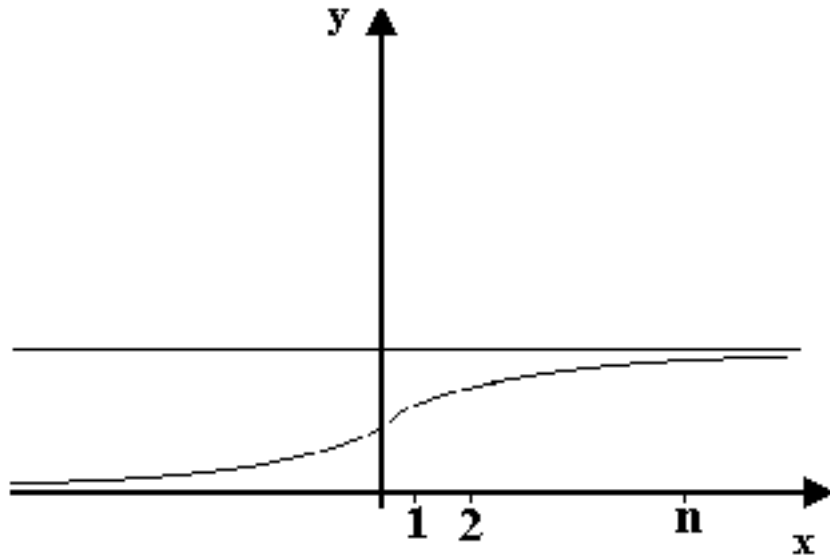


Figura 58: *Spazi metrici completi e no (dettagli nel testo)*

ma non vale il viceversa. Il classico controesempio è $\mathbb{R}$ che è completo (ovvero ogni successione di Cauchy di elementi di $\mathbb{R}$ converge ad un elemento di $\mathbb{R}$) ma non compatto (non se ne può estrarre un sottoricoprimento finito per ogni ricoprimento).

Definizione 11.7 (Spazio topologico totalmente limitato) X si dice **totalmente limitato** se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un numero finito di intorni $I(x_i, \varepsilon)$ ($i = 1, \dots, n$) tale che

$$\bigcup_{i=1}^n I(x_i, \varepsilon) = X \quad (213)$$

cioè se posso ricoprire X con un numero finito di palle tutte uguali di raggio ε piccolo a piacere e centro nei punti x_i .

Con riferimento al Teorema 11.5 si hanno le seguenti relazioni:

1. $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$,
2. $4) \Rightarrow 3)$,
3. $4) + 3) \Rightarrow 1)$.

Esempio 11.10 Dal momento che ogni successione di Cauchy di numeri reali converge ad un numero reale si ha che $\mathbb{R}$ con la metrica usuale è uno spazio metrico completo.

Esempio 11.11 Si abbia uno spazio topologico X con la metrica banale $d(x, y)$ che assume valore 1 se $x \neq y$ e 0 se $x = y$. Una successione $\{s_n\}$ è di Cauchy sse ha la forma $a_1, a_2, \dots, a_n, b, \dots, b$ e converge a $b \in X$ per cui X è completo.

Nota 11.18 Si noti che la completezza non è una proprietà topologica dal momento che $(0, 1)$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$ ma il secondo è completo mentre il primo no (le successioni di Cauchy che convergono a 1 convergono a un punto fuori dell'intervallo e lo stesso vale per quelle che convergono a 0).

Esempio 11.12 Se si considera $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea si ha che tale spazio è completo. Vediamo perchè. Se si considera una successione di Cauchy di elementi di $\mathbb{R}^n$ $\{p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ con $p_i = (x_1, \dots, x_n)$ si ha che le proiezioni di $\{p_m\}$ sugli assi coordinati $\mathbb{R}$ danno luogo a successioni di Cauchy che, siccome $\mathbb{R}$ è completo, convergono a b_i in modo che $\{p_m\}$ converga a $b = (b_1, \dots, b_n)$ data la convergenza delle singole proiezioni.

Nota 11.19 Dato uno spazio metrico X e un suo sottoinsieme A si ricorda che il diametro di A (denotato come $d(A)$) è definito come:

$$d(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\} \quad (214)$$

In più una successione di insiemi A_i (con $i \in I \subset \mathbb{N}$) è detta essere di insiemi annidati se però ogni i si ha $A_i \supset A_{i+1}$. Si hanno i seguenti risultati, dati senza dimostrazione.

1. Uno spazio metrico X è completo sse ogni successione annidata di insiemi non vuoti e chiusi A_i il cui diametro tende a 0 ha intersezione non vuota. Si hanno i due casi seguenti:

(a) se X è completo e $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(A_i) = 0$ allora $\cap_i A_i \neq \emptyset$;

(b) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(A_i) = 0$ e $\cap_i A_i \neq \emptyset$ allora X è completo.

Le due condizioni (A_i chiusi e di diametro che tende a 0) sono entrambe necessarie per la validità del risultato.

2. Dato uno spazio metrico X si ha che una funzione:

$$f : X \longrightarrow X \quad (215)$$

è una **contrazione** se esiste $\alpha \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$ tale che per ogni $p, q \in X$ la distanza fra le immagini è minore della distanza fra i punti ovvero si ha:

$$d(f(p), f(q)) \leq \alpha d(p, q) < d(p, q) \quad (216)$$

Se lo spazio metrico X è completo si ha un teorema di punto fisso che riguarda le contrazioni e che stabilisce che se F è una contrazione su uno spazio metrico completo X allora si ha un solo punto $p \in X$ tale che $f(p) = p$.

Definizione 11.8 (Completamento) *Uno spazio metrico X^* è detto essere un **completamento** di uno spazio metrico X se valgono le seguenti proprietà:*

1. X^* è completo;
2. X isometrico a un sottoinsieme denso di X^* .

Si ricorda che uno spazio metrico (X, d) è isometrico a uno spazio metrico (Y, e) sse esiste una funzione iniettiva:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (217)$$

che conserva le distanze ovvero per la quale si ha (se $p, q \in X$):

$$d(p, q) = e(f(p), f(q)) \quad (218)$$

In tal caso il primo spazio è omeomorfo al secondo. Si noti che due spazi possono essere omeomorfi ma non isometrici.

Esempio 11.13 *Si consideri $\mathbb{R}$ e il suo sottoinsieme $\mathbb{Q}$. Dalla definizione suddetta si ha che:*

1. $\mathbb{R}$ è completo;
2. $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ovvero $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}$

per cui $\mathbb{R}$ è un completamento di $\mathbb{Q}$.

Si vuole vedere come si può costruire un completamento di uno spazio metrico qualunque X . Al proposito si definisce con $C[X]$ l'insieme di tutte le successioni di Cauchy su X su cui si introduce una relazione di equivalenza $\sim$ definita come:

$$\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle \text{ sse } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, b_n) = 0 \quad (219)$$

che individua le successioni di Cauchy che hanno tale proprietà.

11.5 Ultimi argomenti

Affronteremo ora il problema del “quasi sempre” o del “quasi ovunque” (detto anche “in generale” ma anche “non in generale ma in tanti punti”) e lo vedremo in due ambiti:

1. in ambito topologico,
2. in ambito della teoria della misura.

Nel secondo ambito dato uno spazio metrico X si considerano oggetti del tipo $A \subset X$ dotati di una misura $\mu(A)$. Si dice che una proprietà P è vera quasi sempre se vale sempre tranne al più in un insieme A di misura nulla ovvero tale che $\mu(A) = 0$. Se X è metrico (o di misura) e prendo $Y \subset X$ ho che se $A = X \setminus Y$ allora $\mu(A) = 0$.

Tale definizione va abbastanza bene se non che entra in conflitto con una proprietà analoga definita in ambito topologico. In tale ambito, dato uno spazio topologico X e un suo sottoinsieme $Y \subset X$ una proprietà P vera su Y è detta essere “generica”. Vediamo alcuni esempi:

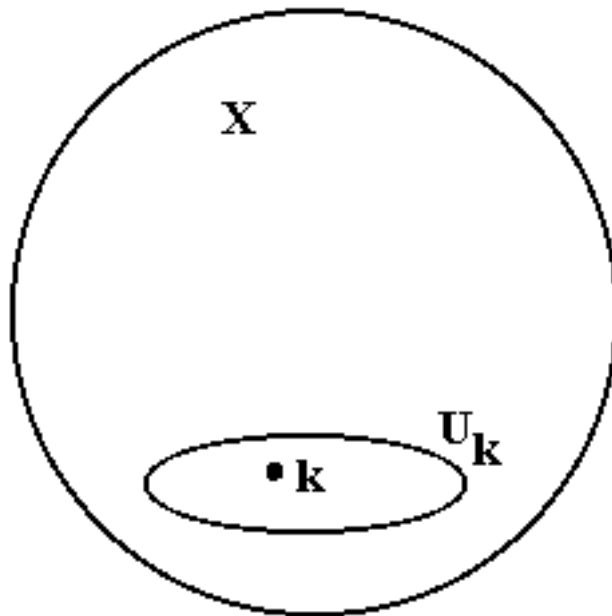


Figura 59: Spazi topologici e spazi metrici (dettagli nel testo)

1. con riferimento alla figura 59, se considero $Y = U_k$ denso in X avrei infiniti punti in cui vale la proprietà P : se considero $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ho che $\mathbb{Q}$ sarebbe generico pur essendo strutturalmente più povero di $\mathbb{R}$;

2. con riferimento alla figura 60, considero $Y \subset X$ e una proprietà P “generica” di X ; se Y è un sottoinsieme denso e aperto di X allora P “generica” anche di Y ovvero vale in y e in tutti i punti dell’intorno (come esempio considero l’insieme degli irrazionali che è non numerabile e denso di $\mathbb{R}$ ma non è un insieme aperto).

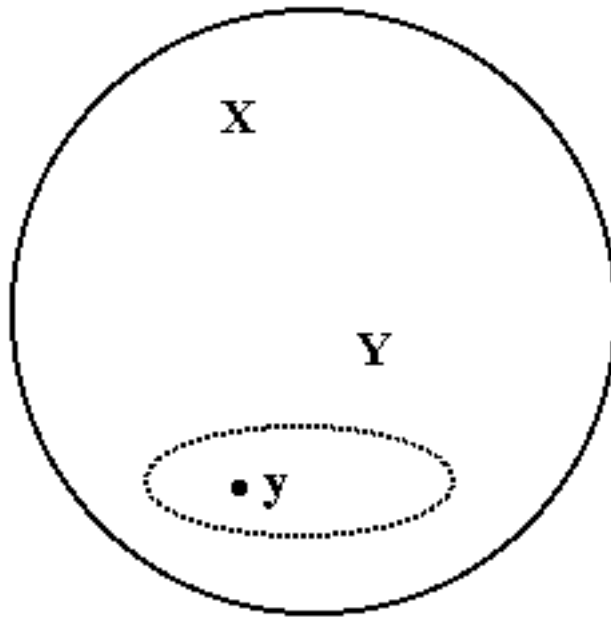


Figura 60: *Spazi topologici e spazi metrici (dettagli nel testo)*

Dai casi suddetti ho che una proprietà P vera su $\mathbb{Q}$ non è generica nel caso di spazi metrici mentre è vera e generica nel caso dell’insieme dei numeri irrazionali. Si ha una soluzione di compromesso di tipo topologico.

Proposizione 11.2 *Una proprietà P è detta essere generica se è soddisfatta su:*

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad (220)$$

dove gli insiemi A_n sono insiemi aperti densi.

I numeri irrazionali godono della proprietà stabilita dalla Proposizione 11.2 dato che se considero $\{q\} \subset \mathbb{Q}$ e ne prendo la chiusura come sottoinsieme degli irrazionali ho un insieme aperto e denso. L’insieme Y definito dalla (220) è detto **insieme residuale**.

Dato uno spazio topologico X lo si dice di **Baire di seconda specie o categoria** se i suoi sottoinsiemi aperti sono “cicciuti” ovvero dato $A \subset X$ aperto A è “ciccuto” se non lo posso scrivere come:

$$A = \cup_{i=1}^n B_i \quad (221)$$

dove gli insiemi B_i contengono pochi punti ovvero sono “magri” per cui si ha:

$$A \neq \cup_{i=1}^n B_i \quad (222)$$

Definizione 11.9 Un insieme B_i si dice **magro** se $\text{int} B_i = \emptyset$.

Esempio 11.14 È facile vedere che $\mathbb{Q}$ non è magro mentre lo è $\{\frac{1}{n}\}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 11.6 Gli spazi metrici completi sono spazi di Baire di seconda specie (o seconda categoria). Dato uno spazio topologico X di Baire di seconda specie i suoi oggetti residuali sono gli insiemi Y tali che:

1. Y è non numerabile,
2. $\bar{Y} = X$.

Nota 11.20 Si ha:

1. l'intersezione di due insiemi residuali è un insieme residuale;
2. il complementare di un insieme residuale non lo è.

Nota 11.21 Se A è un insieme aperto e denso (ovvero è tale che $\bar{A} = A$ e cioè $D(A) \subset A$) allora $\mathcal{C}A$ è un insieme chiuso privo di punti interni (perchè se li avesse A non sarebbe denso). Se ora considero gli insiemi A_n aperti e densi posso definire:

$$Y = \cap_n A_n \quad (223)$$

da cui:

$$Y^C = \cup_n A_n^C \quad (224)$$

in cui gli insiemi A_n^C sono chiusi e senza punti interi, ovvero sono magri, in modo che Y^C sia l'unione contabile di insiemi magri.

Se un insieme è residuale allora non lo posso scrivere come unione contabile di insiemi magri mentre il suo complementare lo posso scrivere come unione contabile di insiemi magri. Si ha quindi che:

1. generico associato a residuale (concetto topologico) e

2. generico associato alla misura (concetto degli spazi metrici)

sono in conflitto.

Esempio 11.15 Se considero $[0, 1] \subset \mathbb{Q}$ e prendo $q_i \in [0, 1]$ posso definire gli intorno $I(q_i, (\frac{1}{n})^i)$ in modo da poter definire gli insiemi:

$$A_n = \cup_{i=1}^{\infty} I(q_i, (\frac{1}{n})^i) \quad (225)$$

che sono aperti, perchè intersezione numerabile di insiemi aperti, e densi, perchè formati da insiemi di razionali e, pertanto, densi. Ognuno degli intorno, per n fissato, $I(q_i, (\frac{1}{n})^i)$ ha una misura pari a $\frac{2}{n^i}$ per cui si ha:

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{n^i} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^i} = \frac{2}{n} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{n-1} \quad (226)$$

Se n è grande A_n è denso ma lascia al di fuori un bel po' di roba. Si noti che gli A_n sono aperti e densi e i loro complementari sono chiusi e non densi. Se $n = 2001$ $\mu(A_n) = 0.001$ per cui la frazione di 0.999 punti (ovvero il 99,9%) di punti sono al di fuori di A_n . L'insieme:

$$Y = \cap_n A_n \quad (227)$$

si dice insieme residuale perchè è definito su uno spazio metrico completo quale $[0, 1]$. Comunque prendo n ho:

$$\mu(Y) < \frac{2}{n-1} = \mu(A) \quad (228)$$

per cui $\mu(Y) = 0$: Y è topologicamente ricco ma ha misura nulla.

A Appendice

La presente Appendice si compone di un certo numero di sezioni: alcune di contenuto teorico (estratte da [VCV67], [Lan83] e [ST80]) e alcune di contenuto più “pratico” contenenti esercizi svolti sia tratti da [Lip65] sia forniti dal Professor Gori nel corso delle lezioni.

A.1 Spazi topologici, da [Lan83]

Si introducono i concetti di **insieme aperto** e **insieme chiuso** e di **topologia** su tali insiemi. Dato un insieme X generico, una **topologia su** X (indicata con $\mathcal{T}(X)$ o anche con $\tau(X)$ o, semplicemente, τ) è data da una collezione di sottoinsiemi di X , detti **insiemi aperti**, che gode delle seguenti proprietà:

1. $\emptyset$ e X sono insiemi aperti;
2. una intersezione finita di insiemi aperti è un insieme aperto;
3. una unione anche infinita di insiemi aperti è un insieme aperto.

Esempi di topologie $\mathcal{T}(X)$ sono i seguenti:

1. $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, X\}$ detta **topologia indiscreta**;
2. la **topologia discreta** ovvero quella che contiene tutti i sottoinsiemi di X ;
3. se $X = \mathbb{R}$ un sottoinsieme U di X si dice **aperto** se $\forall x \in U \exists J \subset X$ aperto tale che $x \in J \subset U$, tale topologia viene detta **topologia ordinaria** su $\mathbb{R}$;
4. se definisco la funzione **norma** che ad ogni $x \in E$ (con E spazio vettoriale) associa il numero $|x| \in \mathbb{R}$ in modo che:
 - (a) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ sse $x = 0$;
 - (b) dati $c \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ $|cx| = |c| |x|$, dove $|c|$ rappresenta il modulo (valore assoluto) di c ,
 - (c) dati $x, y \in E$ si ha $|x + y| \leq |x| + |y|$;

posso definire le **sfere aperte** $B_r(v)$ in E di centro $v \in E$ e raggio $r > 0$ come gli insiemi di tutti gli $x \in E$ tali che $|x - v| < r$. In questo modo un insieme U di E è aperto se per ogni suo punto esiste una sfera aperta con centro in quel punto e contenuta in U . Si definisce

così una topologia, detta **topologia ordinaria** per lo spazio vettoriale con norma E .

Sugli spazi vettoriali normati (o con norma) come E si possono definire le successioni di Cauchy (vedi la Definizione 5.11).

Esempio A.1 *Si danno alcuni esempi di spazi vettoriali normati ([Lan83] pagine 18 e 19).*

1. **Norma del sup:** si abbia un insieme S e una funzione:

$$f : S \longrightarrow F \quad (229)$$

dove F è uno spazio vettoriale normato. La f sia limitata ovvero esiste una costante $C > 0$ tale che:

$$|f(x)| \leq C \quad (230)$$

$\forall x \in S$. Sotto queste ipotesi, indicando con **sup** il minore degli estremi superiori, si definisce:

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)| \quad (231)$$

Si ha che:

- (a) l'insieme delle funzioni limitate da S a F è uno spazio vettoriale,
- (b) $\|\cdot\|$ è una norma su tale spazio vettoriale ed è detta norma del sup.

2. **Norma L^1 :** se E è lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ e se $f \in E$ si definisce:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \quad (232)$$

come la norma L^1

Le norme suddette sono utilizzate nello studio della convergenza di successioni.

Esempio A.2 *Nel caso della norma del sup una successione di funzioni:*

$$\{f_n\} \quad (233)$$

è detta essere di Cauchy su S se per un dato $\varepsilon > 0$ esiste un intero N tale che per $n, m > N$ si ha:

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad (234)$$

mentre la si dice uniformemente convergente alla funzione f se per un dato $\varepsilon > 0$ esiste un intero N tale che per $n \geq N$ si ha:

$$\|f_n - f\| < \varepsilon \quad (235)$$

Nota A.1 (Spazio metrico) Si può generalizzare la nozione di sottoinsieme di uno spazio normato. Dato un insieme X si definisce una **funzione distanza** o **metrica** su X come la funzione:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (236)$$

ovvero:

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) \quad (237)$$

caratterizzata dalle seguenti proprietà (in cui $x, y, z \in X$):

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ sse $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un insieme con una metrica è detto **spazio metrico**.

Nota A.2 (Proprietà degli spazi metrici) Su uno spazio metrico si possono definire:

1. sfere aperte,
2. una topologia determinata dalla metrica.

In uno spazio metrico ogni insieme aperto è l'unione di sfere aperte.

Nota A.3 In uno spazio normato si può definire la distanza fra coppie di elementi x e y come:

$$d(x, y) = |x - y| \quad (238)$$

in modo da definire una metrica sullo spazio.

Definizione A.1 Se A e B sono sottoinsiemi di uno spazio vettoriale normato se ne definisce la distanza come:

$$d(A, B) = \inf |x - y| \quad (239)$$

$\forall x \in A$ e $\forall y \in B$.

Definizione A.2 Dato un insieme X su cui sono definite due topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ si ha che tali topologie sono uguali sse la condizione seguente risulta soddisfatta:

per ogni $x \in X$ ed ogni insieme aperto $U \in \mathcal{T}$ tale che $x \in U$ esiste un insieme aperto $U' \in \mathcal{T}'$ tale che $x \in U' \subset U$ e, viceversa, dato insieme aperto $U' \in \mathcal{T}'$ tale che $x \in U'$ esiste un insieme aperto $U \in \mathcal{T}$ tale che $x \in U \subset U'$.

Definizione A.3 (Distinzione fra palla (chiusa e aperta) e sfera)

Dato uno spazio vettoriale E si hanno le seguenti definizioni (in cui $v \in E$, $x \in E$ e $r \in \mathbb{R}_+$):

1. **la palla chiusa** di centro v e raggio r è l'insieme dei punti x tali che:

$$d(x, v) \leq r \quad (240)$$

2. **la palla aperta** di centro v e raggio r è l'insieme dei punti x tali che:

$$d(x, v) < r \quad (241)$$

3. **la sfera** di centro v e raggio r è l'insieme dei punti x tali che:

$$d(x, v) = r \quad (242)$$

In questo modo si ha che una **palla chiusa** è data dall'unione di una **palla aperta** e di una **sfera**. Nella presente Appendice si è cercato di seguire queste definizioni con possibili “defezioni” locali per cui, caso per caso, è bene tenere conto delle definizioni date localmente.

Nota A.4 Si possono definire **palle** e **sfere** negli spazi metrici allo stesso modo che in spazi vettoriale normati. Anche nel caso di uno spazio metrico X si può definire la nozione di **successione di Cauchy** in modo che X sia detto **completo** se ogni successione di Cauchy converge ovvero ha un limite in X .

Un insieme S con una **topologia** è detto essere uno **spazio topologico**. L'uso delle regole (o leggi o teoremi) di De Morgan ci permette di definire una topologia $\mathcal{C}$ utilizzando i complementi degli insiemi aperti, detti **insiemi chiusi**.

In un qualunque spazio topologico gli insiemi chiusi soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\emptyset$ e S sono in $\mathcal{C}$ ovvero sono insiemi chiusi;
2. se $C_i \in \mathcal{C}$ ($i = 1, \dots, n$) allora $\cup_{i=1}^n C_i \in \mathcal{C}$;
3. se $C_i \in \mathcal{C}$ ($i \in I$ con I insieme arbitrario di indici) allora $\cap_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}$.

Una collezione $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di un insieme X è detta definire una topologia su X mediante insiemi chiusi se i suoi elementi soddisfano le tre condizioni suddette. Una volta verificate tali condizioni si dice che un **insieme aperto** è il complemento di un insieme in $\mathcal{C}$.

Esempio A.3 ([Lan83]) Sia $X = \mathbb{R}^n$ e sia

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (243)$$

un polinomio di n variabili (con $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$). Se il punto $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ è tale che $f(a) = 0$ lo si dice uno **zero** della f .

Si definisce un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ come chiuso se esiste una famiglia $\{f_i\}_{i \in I}$ di polinomi a coefficienti reali in n variabili tale che S contiene esattamente gli zeri comuni a tutte le funzioni f_i ovvero S contiene tutti i punti $a \in \mathbb{R}^n$ tali che $\forall i, f_i(a) = 0$. Per ogni insieme chiuso S così fatto esiste un insieme finito di polinomi $f_1, \dots, f_r$ tale che S è definito dagli zeri di $\{f_1, \dots, f_r\}$.

In questo modo si è definita una topologia con insiemi chiusi detta **topologia di Zarinski** su $\mathbb{R}^n$. La si è definita su insiemi algebrici (ovvero su insiemi i cui elementi sono gli zeri di polinomi).

Sia ora X uno **spazio topologico** e sia $S \subset X$. Si danno le seguenti definizioni.

Definizione A.4 (Punto aderente) Un punto $x \in X$ è detto essere **aderente** a S se dato un insieme aperto U tale che $x \in U$ esiste qualche punto $s \in S$ tale che $s \in U$. Dalla definizione segue che ogni $s \in S$ è aderente a S .

Definizione A.5 (Punto di frontiera) Un punto $x \in X$ è detto essere **di frontiera** per S se ogni insieme aperto U tale che $x \in U$ contiene sia elementi di S sia elementi di S^C . Un punto aderente $x \notin S$ è un punto di frontiera per S .

Definizione A.6 (Punto interno) Un punto **interno** di S è un punto $s \in S$ che non appartiene alla frontiera di S .

Definizione A.7 (Interno) L'insieme $\text{int}(S)$ dei punti interni di S ne contiene tutti i punti interni ed è un insieme aperto.

Definizione A.8 (Insieme chiuso) Un sottoinsieme S di X si dice **chiuso** sse contiene tutti i suoi punti di frontiera.

Definizione A.9 (Chiusura) Dato $S \subset X$ la **chiusura** di S coincide con l'unione di S e dell'insieme dei suoi punti di frontiera. La chiusura di S (denotata con $\bar{S}$) è, pertanto, l'insieme dei punti aderenti di S . In più si ha:

1. $\bar{S}$ è un insieme chiuso,

2. $\bar{S}$ coincide con l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi che contengono S .

Definizione A.10 (Proprietà della chiusura) L'operatore chiusura gode delle seguenti proprietà (in cui S e T sono sottoinsiemi di X):

1. $\bar{\bar{S}} = \bar{S}$ (idempotenza);
2. $\bar{S} \cup \bar{T} = \overline{S \cup T}$;
3. $\bar{S} \cap \bar{T} \supset \overline{S \cap T}$.

Definizione A.11 (Insieme denso) Un sottoinsieme S di uno spazio topologico X è detto essere **denso** in X se si ha:

$$\bar{S} = X \quad (244)$$

ovvero se la sua chiusura coincide con X .

Definizione A.12 (Topologia indotta) Sia X uno spazio topologico e S un suo sottoinsieme. È possibile definire una topologia su S imponendo che un sottoinsieme V di S sia aperto in S se esiste un insieme aperto U in X tale che:

$$V = U \cap S \quad (245)$$

La topologia così definita su S la si dice **topologia indotta** e S con la topologia indotta lo si definisce un **sottospazio**.

Nota A.5 Un sottoinsieme $Y \subset S$ aperto in S (rispetto alla topologia indotta) può non esserlo in X .

Nota A.6 Se U è un sottoinsieme aperto di X allora un sottoinsieme di U è aperto in U (per la topologia indotta) sse è un insieme aperto in X . In modo duale se S è un insieme chiuso di X un suo (di S) sottoinsieme è chiuso in S sse è chiuso in X .

Nota A.7 Se P è una data proprietà di alcuni spazi topologici si dice che un sottoinsieme di uno di tali spazi gode della proprietà P se la verifica nel suo ruolo di sottospazio (ovvero se P vale nella topologia indotta).

Dato un insieme X , una topologia su X viene spesso definita mediante una base per gli insiemi aperti.

Definizione A.13 (Base di una topologia) Una **base** per gli insiemi aperti è una collezione $\mathcal{B}$ di insiemi aperti tale che ogni insieme aperto U può essere scritto come l'unione (anche infinita) di insiemi della base.

La seguente proposizione fornisce un criterio che ci permette di stabilire se una collezione di sottoinsiemi di X è una base per una topologia su X o no.

Proposizione A.1 Sia X un insieme e $\mathcal{B}$ un insieme di suoi sottoinsiemi tale che:

1. ogni elemento di X appartiene a qualche insieme in $\mathcal{B}$,
2. se $B, B' \in \mathcal{B}$ e $x \in B \cap B'$ allora esiste $B'' \in \mathcal{B}$ tale che:
 - (a) $x \in B''$,
 - (b) $B'' \subset B \cap B'$.

Se $\mathcal{B}$ soddisfa tali condizioni allora esiste una sola topologia i cui insiemi aperti sono unioni di insiemi in $\mathcal{B}$. Tale topologia è univocamente determinata ed esiste dal momento che si può definire un insieme come aperto se è una unione di elementi in $\mathcal{B}$.

Definizione A.14 (Spazio topologico separabile) Uno spazio topologico X si dice **separabile** se ha una base contabile ovvero se ha una base finita o denumerabile (e perciò che può essere messa in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali).

Esempio A.4 ([Lan83]) È facile vedere che:

1. $\mathbb{R}$ ha una base contabile,
2. $\mathbb{R}^n$ ha una base contabile,

per cui sono entrambi esempi di spazi topologici separabili. Nel caso di $\mathbb{R}$ come elementi della base si possono considerare gli intervalli aperti con:

1. raggio un numero $q_r \in \mathbb{Q}$,
2. centro un numero $q_c \in \mathbb{Q}$.

Definizione A.15 (Intorno) Un insieme aperto che contiene un punto x è detto un **intorno aperto** del punto. Come **intorno** di x si definisce un qualunque insieme che contiene un insieme aperto che, a sua volta, contiene x .

Definizione A.16 (Intorni in uno spazio vettoriale normato) *In uno spazio vettoriale normato si parla di ε -intorno di un punto x come la palla di raggio ε e centro x ovvero $B_x(\varepsilon)$.*

Definizione A.17 (Funzioni continue, prima definizione) *Si abbiano due spazi topologici X e Y . Una funzione:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (246)$$

*è detta essere **continua** se dato un insieme aperto in Y la sua immagine inversa in X è un insieme aperto ovvero se V è un insieme aperto di Y allora $f^{-1}(V)$ è un insieme aperto in X .*

Definizione A.18 (Funzioni continue, seconda definizione) *Si abbiano due spazi topologici X e Y . Una funzione:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (247)$$

*è detta essere **continua** se dato un insieme chiuso in Y la sua immagine inversa in X è un insieme chiuso ovvero se V è un insieme chiuso di Y allora $f^{-1}(V)$ è un insieme chiuso in X .*

Definizione A.19 (Funzioni continue, terza definizione) *Dati due spazi vettoriali normati E ed F , una funzione:*

$$f : E \longrightarrow F \quad (248)$$

è continua in $x_0 \in E$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad (249)$$

Nota A.8 *La funzione f è continua in E se è continua per ogni $x \in E$.*

Definizione A.20 (Funzioni continue, quarta definizione) *Dati due spazi topologici X e Y una funzione:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (250)$$

è detta essere continua in un punto $x \in X$ se, dato un intorno V di $f(x)$, esiste un intorno U di x tale che:

$$f(U) \subset V \quad (251)$$

Nota A.9 *La funzione f è continua in X sse è continua per ogni $x \in X$.*

Proposizione A.2 (Continuità per successioni) *Supponiamo che X sia uno spazio metrico oppure un sottoinsieme di uno spazio vettoriale normato e che E sia uno spazio vettoriale normato. La funzione:*

$$f : X \longrightarrow E \quad (252)$$

è continua sse data una successione qualunque in X , $\{x_n\}_n$, che converge a un punto $x \in X$ allora la successione $\{f(x_n)\}_n$ converge a $f(x)$.

Proposizione A.3 (Continuità e composizione) *La funzione composta di funzioni continue è continua. Si ha infatti che se:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (253)$$

e:

$$g : Y \longrightarrow Z \quad (254)$$

sono funzioni continue allora si ha che (per la continuità della g) se V è un aperto in Z allora $g^{-1}(V)$ è un aperto in Y e, quindi, (per la continuità della f) $f^{-1}(g^{-1}(V))$ è un aperto in X ovvero $(g \cdot f)^{-1}(V)$ è un aperto in X per cui $g \cdot f$ è una funzione continua.

Nota A.10 *Si noti che se la funzione:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (255)$$

fra due spazi topologici è continua e se $U \subset X$ è un insieme aperto non è detto che $f(U)$ sia un insieme aperto.

Il concetto di funzione continua ci consente di definire il concetto di **omeomorfismo** (detto anche **isomorfismo topologico**) fra due spazi topologici X e Y .

Definizione A.21 (Omeomorfismo) *Una funzione continua:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (256)$$

che ammette una inversa continua:

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X \quad (257)$$

*è un **omeomorfismo**. Una funzione f così fatta si dice **bicontinua**.*

Nota A.11 *La composizione di due omeomorfismi è un omeomorfismo.*

Nota A.12 *Una funzione*

1. *continua,*
2. *bigettiva (ovvero iniettiva e surgettiva)*

non è necessariamente un omeomorfismo dal momento che la funzione inversa non è necessariamente continua.

Si passa ora alla definizione dei concetti di **spazio prodotto** e di **topologia prodotto**. In quanto segue useremo i simboli $\prod$ e $\times$ indifferentemente per indicare il prodotto cartesiano di più insiemi. I casi in cui il simbolo $\prod$ è usato per indicare altri tipi di prodotto saranno chiari dal contesto.

Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici e sia:

$$X = \prod_{i \in I} X_i \quad (258)$$

il loro prodotto. Sullo spazio topologico prodotto X si può definire la topologia prodotto: si definisce che un insieme $U \subset X$ è aperto se per ogni $x \in U$ esiste un numero finito di indici $i_1, \dots, i_n$ cui corrispondono gli insiemi aperti $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ rispettivamente negli spazi topologici $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ tali che:

$$x \in U_{i_1} \times \dots \times U_{i_n} \times \prod_{i \neq i_k} X_i \subset U \quad (259)$$

La produttoria calcolata per $i \neq i_k$ è calcolata per tutti gli indici diversi da $i_1, \dots, i_n$. La topologia prodotto è quella topologia che ha come insiemi della sua base tutti gli insiemi del tipo:

$$U_{i_1} \times \dots \times U_{i_n} \times \prod_{i \neq i_k} X_i \quad (260)$$

La topologia prodotto è la sola topologia con il minor numero di insiemi aperti in X che fa sì che le funzioni proiezione:

$$\pi_i : X \longrightarrow X_i \quad (261)$$

siano continue. Se U_j è un insieme aperto in X_j si ha che l'insieme:

$$\pi_j^{-1}(U_j) = U_j \times \prod_{i \neq i_k} X_i \quad (262)$$

deve essere aperto se π_j è una funzione continua.

Nota A.13 Dati due spazi topologici X e Y e una funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (263)$$

si ha che:

1. se f mappa insiemi aperti su insiemi aperti si dice **aperta**,
2. se f mappa insiemi chiusi su insiemi chiusi si dice **chiusa**.

Una funzione continua può appartenere a nessuna di tali categorie.

Nota A.14 Dati due spazi topologici X e Y e una funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (264)$$

1. continua,
2. bigettiva,

allora una condizione **necessaria** e **sufficiente** perchè f sia un omeomorfismo è che f sia aperta.

Si passa ora alla definizione del concetto di insieme connesso e dei concetti ad esso collegati.

Definizione A.22 (Spazio topologico connesso) Uno spazio topologico X si dice **connesso** se non è possibile esprimerlo come unione di due insiemi aperti, disgiunti e non vuoti. In modo formale si ha che X è connesso se non esistono due insiemi aperti A_1 e A_2 tali che:

1. $A_1 \neq \emptyset$ e $A_2 \neq \emptyset$,
2. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
3. $A_1 \cup A_2 = X$.

Vediamo alcune proprietà di base degli insiemi connessi.

Proposizione A.4 Si abbiano due spazi topologici X e Y e una funzione continua:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (265)$$

Si ha che se X è connesso allora $f(X)$ è connesso.

Dimostrazione

Senza perdita di generalità si può supporre che sia:

$$Y = f(X) \quad (266)$$

Si fa la dimostrazione per assurdo negando la tesi per cui si suppone che Y sia non connesso. Si può pertanto scrivere:

$$Y = U \cup V \quad (267)$$

con U e V insiemi aperti, non vuoti e disgiunti. Utilizzando la f^{-1} si ha (dalle (266) e (267)):

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \quad (268)$$

in cui $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sono insiemi aperti, non vuoti e disgiunti per cui X sarebbe non connesso contro l'ipotesi. Si ha una contraddizione per cui la tesi che abbiamo negato è vera e quindi Y è connesso.

Proposizione A.5 Uno spazio topologico X è connesso sse ogni funzione f continua da X in uno spazio discreto che ha almeno due elementi è costante.

Dimostrazione

($\Rightarrow$)

Suppongo X connesso e suppongo che la funzione f sia continua da X a uno spazio discreto con almeno due elementi. Se f non è costante posso scrivere l'immagine di X come l'unione di due insiemi disgiunti e non vuoti e ciò contraddice quanto asserito dalla Proposizione A.4.

($\Leftarrow$)

Si nega la tesi e si suppone X non connesso. Si può pertanto scrivere:

$$X = U \cup V \quad (269)$$

con U e V insiemi aperti, non vuoti e disgiunti. Siano p e q i due elementi dello spazio discreto immagine di X mediante la f e supponiamo che $\{p, q\}$ sia caratterizzato dalla topologia discreta. Se si definisce la funzione

$$f : X \longrightarrow \{p, q\} \quad (270)$$

come

$$1. f(U) = \{p\}$$

$$2. f(V) = \{q\}$$

allora la f è continua e non costante contro l'ipotesi che lo sia per cui si ha una contraddizione e perciò X è connesso.

Nella dimostrazione della Proposizione A.5 si è preso uno spazio discreto con esattamente due elementi per caratterizzare un insieme connesso. Si enunciano qui di seguito alcune proposizioni (la prima delle quali fa uso di quanto visto nella Proposizione A.5) senza darne la dimostrazione (vedi al proposito [Lan83] capitolo 2.2).

Proposizione A.6 *Dati uno spazio topologico X e una famiglia di sottospazi connessi:*

$$\{S_i\}_{i \in I} \quad (271)$$

se i sottospazi hanno un punto in comune allora la loro unione è un insieme connesso.

La suddetta Proposizione ci consente di definire il concetto di **componente connessa** per un punto a in X come l'unione di tutti i sottospazi connessi di X che contengono a . Tale componente è certamente non vuota perchè l'insieme $\{a\}$ è connesso per definizione.

Proposizione A.7 *Dato uno spazio topologico X e un suo sottoinsieme connesso S si ha che la chiusura di S ($\bar{S}$) è un insieme connesso. Se si ha*

$$S \subset T \subset \bar{S} \quad (272)$$

allora T è connesso.

Proposizione A.8 *La componente connessa di un punto $a \in X$ con X spazio topologico è un insieme connesso.*

Si introduce a questo punto una diversa definizione di connettività per gli insiemi (la **connettività per archi**) e la si mette in relazione con la definizione già data in precedenti sezioni.

Definizione A.23 (Connettività per archi) *Dato uno spazio topologico X si dice che X è **connesso per archi** se dati due punti qualunque $x, y \in X$ esiste un cammino continuo a tratti da x a y . Un **cammino continuo a tratti** è una successione di funzioni continue $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ con ogni:*

$$\alpha_i : [a_i, b_i] \longrightarrow X \quad (273)$$

($i = 1, \dots, r$) continua e definita sull'intervallo chiuso $[a_i, b_i]$ in modo che:

$$\alpha_i(b_i) = \alpha_{i+1}(a_{i+1}) \quad (274)$$

Si dice che il cammino collega x a y se:

1. $\alpha_1(a_1) = x$,
2. $\alpha_r(b_r) = y$.

Nota A.15 *Se un cammino siffatto esiste lo si può sostituire con una funzione continua:*

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow X \quad (275)$$

definita in modo che sia:

$$1. \alpha(a) = x,$$

$$2. \alpha(b) = y.$$

Si noti che l'intervallo $[a, b]$ lo si può considerare coincidente con l'intervallo $[0, 1]$ dal momento che esiste una funzione quale la seguente:

$$f(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad (276)$$

(continua, iniettiva e surgettiva) che mappa il primo sul secondo.

Proposizione A.9 Qualunque intervallo di numeri reali (ovvero qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$) è connesso.

Proposizione A.10 Se uno spazio topologico X è connesso per archi allora è connesso.

Dimostrazione

Si suppone che X sia connesso per archi ma non sia connesso. Si può quindi scrivere:

$$X = U \cup V \quad (277)$$

con U e V insiemi aperti, disgiunti e non vuoti della topologia τ su X . Supponiamo che $x \in U$ e $y \in V$. Esiste una funzione continua:

$$\alpha : J \longrightarrow X \quad (278)$$

da un intervallo chiuso $J \subset \mathbb{R}$ a X che rappresenta un cammino che parte da x e finisce in y , essendo X connesso-per archi. Dal fatto che X non è connesso segue che $\alpha^{-1}(U)$ e $\alpha^{-1}(V)$ sono insiemi aperti, non vuoti e disgiunti la cui unione eguaglia J . In questo modo avrei che J è non connesso contro il fatto che ogni intervallo chiuso (sottoinsieme di $\mathbb{R}$) è connesso. Si ha una contraddizione che deriva dall'aver supposto X non connesso per cui X è connesso.

Nota A.16 Si noti che l'inverso della Proposizione A.10 è falso ovvero se un insieme è connesso non è detto che sia connesso per archi.

Teorema A.1 Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici connessi. Il prodotto (cartesiano):

$$X = \prod_{i \in I} X_i \quad (279)$$

è un insieme connesso.

Corollario A.1 *Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è connesso e lo stesso vale per il prodotto di un numero qualunque di intervalli.*

L'ultimo concetto che viene introdotto nella presente sezione è quello di **spazio topologico compatto**. Prima di introdurre tale concetto si dà la definizione del concetto di **ricoprimento** sul quale il primo si fonda.

Definizione A.24 (Ricoprimento) *Dato un insieme X e una famiglia di sottoinsiemi:*

$$\{S_a\}_{a \in A} \quad (280)$$

*si dice che tale famiglia è un **ricoprimento** di X se la sua unione è uguale a X . Se X è uno **spazio topologico** e:*

$$\{U_a\}_{a \in A} \quad (281)$$

*è un ricoprimento di X lo si dice un **ricoprimento aperto** se ogni insieme U_a è un insieme aperto. Se:*

$$\{S_a\}_{a \in A} \quad (282)$$

*è un ricoprimento di X , un **sottoricoprimento** lo si ottiene prendendo un sottoinsieme B dell'insieme degli indici A in modo da definire:*

$$\{S_b\}_{b \in B} \quad (283)$$

Un sottoricoprimento finito è del tipo $\{S_{a_1}, \dots, S_{a_n}\}$.

Definizione A.25 (Spazio topologico compatto, prima definizione)

*Dato uno spazio topologico X diremo che X è **compatto** se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.*

Nota A.17 *Si ha una definizione duale in termini di insiemi chiusi.*

Definizione A.26 *Dato uno spazio topologico X e una famiglia di suoi sottoinsiemi $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ diremo che vale la **proprietà dell'intersezione finita** se una qualunque intersezione finita:*

$$\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \quad (284)$$

è non vuota.

Definizione A.27 (Spazio topologico compatto, seconda definizione)

*Uno spazio topologico X è **compatto** sse data una famiglia di suoi sottoinsiemi $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ per i quali vale la **proprietà di intersezione finita** si ha:*

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset \quad (285)$$

Si enunciano qui di seguito alcuni teoremi relativi agli insiemi compatti senza darne le dimostrazioni (per le quali si rimanda a [Lan83] capitolo 2.3 o alle sezioni degli **Esercizi ed Esempi** qui di seguito).

Teorema A.2 *Dati due spazi topologici X e Y e una funzione continua:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (286)$$

si ha che l'immagine (mediante la f) di un insieme compatto è un insieme compatto.

Teorema A.3 *Un sottospazio chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto.*

Si danno, a questo punto, alcune definizioni relative al concetto di separazione e funzionali a quanto si stà discutendo. per una trattazione più esauriente si rimanda alle sezioni successive.

Definizione A.28 (Spazio di Hausdorff o T_2) *Uno spazio topologico X è detto essere di Hausdorff (o di tipo T_2) se dati $x, y \in X$ con $x \neq y$ esistono due insiemi aperti disgiunti U e V tali che:*

1. $x \in V$,
2. $y \in U$.

Se uno spazio topologico X è di tipo T_1 allora i punti $x \in X$ sono insiemi chiusi. In uno spazio topologico di Hausdorff posso separare punti distinti con insiemi aperti disgiunti.

Teorema A.4 *Un sottospazio compatto di uno spazio topologico di Hausdorff è chiuso.*

Definizione A.29 (Spazio di normale o T_4) *Uno spazio topologico X è detto essere normale (o di tipo T_4) se è di Hausdorff e se dati due insiemi chiusi disgiunti qualunque A e B esistono due insiemi U e V :*

1. aperti,
2. disgiunti,

tali che $A \subset U$ e $B \subset V$. In uno spazio topologico di tipo T_4 posso separare insiemi chiusi disgiunti con insiemi aperti disgiunti.

Teorema A.5 (T_2 e compattezza implicano T_4) *Dato uno spazio topologico X se X è:*

1. *compatto,*
2. *di Hausdorff (ovvero di tipo T_2)*

allora X è normale (ovvero di tipo T_4).

In effetti se A e B sono sottoinsiemi disgiunti e compatti di uno spazio di Hausdorff esistono due insiemi aperti e disgiunti U e V tali che $A \subset U$ e $B \subset V$.

Dato uno spazio topologico X se è di Hausdorff (ovvero di tipo T_2) allora posso separare punti distinti con insiemi aperti mentre se è normale (ovvero di tipo T_4) posso separare insiemi chiusi disgiunti con insiemi aperti disgiunti. Le proprietà di essere di Hausdorff o normale sono dette, pertanto, proprietà di separazione.

Nota A.18 *Dato uno spazio topologico X si ha:*

1. *se X è di Hausdorff ogni suo sottospazio è di Hausdorff,*
2. *se X è normale lo stesso non vale necessariamente per ogni suo sottospazio.*

Definizione A.30 (Compattezza per successioni) *Dato uno spazio topologico X diremo che X è **compatto per successioni** se gode della proprietà di Weierstrass-Bolzano ovvero se ogni successione $\{x_n\}_n$ di elementi in X ha un punto di accumulazione (per la definizione di tale concetto vedi, ad esempio, la Definizione 7.8) in X .*

Proposizione A.11 *Se uno spazio topologico X ha una base contabile allora i concetti di compattezza e di compattezza per successioni sono equivalenti ovvero X è compatto sse è compatto per successioni.*

La proposizione che segue rilascia la condizione che X abbia una base contabile e stabilisce una implicazione solo in una direzione.

Proposizione A.12 *Se uno spazio topologico X è compatto allora è compatto per successioni.*

L'implicazione inversa è stabilita dal seguente teorema e vale sotto alcune condizioni piuttosto generali.

Teorema A.6 *Supponiamo S sia il sottospazio di uno spazio metrico o di uno spazio vettoriale normato X . Si hanno le seguenti condizioni:*

1. *S è compatto sse S è compatto per successioni,*
2. *S è compatto sse S è completo e, dato $r > 0$, esiste un numero finito di palle aperte di raggio r che ricopre S (ovvero S è limitato).*

Si ricorda che un insieme S si dice completo se ogni successione di Cauchy di punti di S converge ad un elemento di S .

Definizione A.31 *Un sottoinsieme S di uno spazio metrico o di uno spazio vettoriale normato si dice **totalmente limitato** se può essere coperto da un numero finito di palle aperte di raggio dato $r > 0$.*

Definizione A.32 *Un sottoinsieme S di uno spazio topologico X si dice **relativamente compatto** se la sua chiusura è un insieme compatto.*

La seguente proposizione fornisce un criterio per la relativa compattezza di un insieme.

Proposizione A.13 *Dato un sottoinsieme S di uno spazio metrico o di uno spazio vettoriale normato, se per $r > 0$ dato esiste un ricoprimento finito di S con palle di raggio r allora si dice che S è relativamente compatto.*

Nota A.19 *Con riferimento al Teorema A.6 si fa notare che un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ gode della proprietà di Weierstrass-Bolzano per cui è compatto. Tale proprietà viene “ereditata” da ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ dal momento che risulta essere un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto.*

Si ha che vale anche l'inverso dal momento che un insieme compatto è chiuso e deve essere limitato. Se non lo fosse sarebbe possibile trovare una successione infinita che tende all'infinito e ed è priva di punti di accumulazione la definizione di insieme chiuso.

Nota A.20 *Si può dimostrare la compattezza di un intervallo chiuso direttamente dall'assioma del minimo estremo superiore.*

Si enunciano qui di seguito alcune proposizioni relative agli insiemi compatti per le cui dimostrazioni si rinvia a [Lan83] capitolo 3.3.

Proposizione A.14 *Si abbia un insieme compatto A e una funzione continua:*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad (287)$$

Si ha che la f ammette un massimo ovvero che esiste $c \in A$ tale che:

$$f(c) \geq f(x) \quad (288)$$

$\forall x \in A$.

Definizione A.33 (Uniforme continuità) *Dati un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale normato, uno spazio vettoriale normato F e una funzione continua:*

$$f : A \longrightarrow F \quad (289)$$

*si dice che la f è **uniformemente continua** su A se dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in A$ si ha:*

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (290)$$

Proposizione A.15 *Sia A un sottoinsieme compatto di uno spazio vettoriale normato e sia F uno spazio vettoriale normato. Se la funzione:*

$$f : A \longrightarrow F \quad (291)$$

è continua allora è uniformemente continua.

Nota A.21 *Sia A contenuto in un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale normato. Se la f è definita su S e continua su A dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $y \in S$ si ha:*

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (292)$$

La definizione di **uniforme continuità** vale anche in spazi metrici in cui si sostituisce $d(x, y)$ a $|x - y|$. Nella Nota A.21 si è introdotta la nozione di **uniforme relativa continuità** dato che la si riferisce a S .

A questo punto si introduce il concetto di **prodotto di spazi** in modo da dire che il **prodotto di spazi compatti è compatto**. Si hanno due casi. Il primo, in cui la dimostrazione è più semplice, è quello in cui si possono usare le successioni e si prende un prodotto finito di spazi. In questo caso se si hanno due spazi vettoriali normati E ed F con due sottoinsiemi compatti $S \subset E$ e $T \subset F$ si può considerare la successione $\{z_n\}$ in $S \times T$ e porre:

$$z_n = (x_n, y_n) \quad (293)$$

dove

1. $x_n \in E$,
2. $y_n \in F$.

Essendo S e T compatti lo sono per successioni per cui si può trovare una sottosuccessione $\{x_{n_i}\}$ convergente ad $a \in S$ e quindi una sottosuccessione $\{y_{n_{i_k}}\}$ convergente a $b \in F$. Si ha, quindi, la successione $\{z_{n_{i_k}}\}$ convergente ad (a, b) in modo che $S \times T$ sia compatto per successioni. L'idea di base è quella di eseguire delle proiezioni sulle coordinate e, dalla convergenza in termini di coordinate, ottenere la convergenza nello spazio prodotto (dato che, nel caso presente, si ha equivalenza fra la compattezza e la compattezza per successioni). Nel caso di un prodotto infinito si ricorre al seguente teorema.

Teorema A.7 (Teorema di Tychonoff) *Data una famiglia di spazi compatti:*

$$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A} \quad (294)$$

il prodotto:

$$X = \prod_{\alpha \in A} \quad (295)$$

(dove A è un insieme qualunque di indici) è uno spazio (prodotto) compatto.

Il Teorema di Tychonoff presenta i seguenti corollari.

Corollario A.2 *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto sse è:*

1. **chiuso**,
2. **limitato**.

Corollario A.3 *Tutte le norme su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti.*

Nota A.22 *Utilizzando le coordinate si ha che il Corollario A.3 si applica anche ad uno spazio vettoriale finito dimensionale. In più si ha:*

1. *un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo è completo,*
2. *un sottoinsieme completo di uno spazio metrico è chiuso.*

Si conclude che un sottospazio finito dimensionale di uno spazio vettoriale normato è completo e perciò chiuso.

Definizione A.34 (Compattezza locale) *Uno spazio X è detto essere localmente compatto se ogni punto ha un intorno compatto.*

Esempio A.5 *Si ha:*

1. $\mathbb{R}^n$ è localmente compatto,
2. ogni spazio vettoriale finito dimensionale è localmente compatto,
3. uno spazio vettoriale normato è localmente compatto sse la palla unitaria chiusa è compatta.

Corollario A.4 (F. Riesz) *Uno spazio vettoriale normato è localmente compatto sse è finito dimensionale.*

Nota A.23 *Si abbia uno spazio X di Hausdorff (o di tipo T_2) localmente compatto. Lo si può trasformare in uno **spazio compatto** aggiungendo ad esso un punto, detto punto all'infinito, nel modo che segue. Si prende $p \notin X$ e si definisce:*

$$X' = X \cup \{p\} \quad (296)$$

Si definisce una base di insiemi aperti su X' inserendo nella base tutti i sottoinsiemi di X che sono aperti in X (per la topologia relativa) e i complementi in X' degli insiemi che sono compatti in X . La si dice compattificazione di punto singolo per X .

Dato uno spazio topologico normale X (vedi la Definizione A.28) si passa ora vedere brevemente come sia possibile separare due insiemi chiusi disgiunti per mezzo di una funzione continua. Si riportano qui di seguito alcuni risultati senza la relativa dimostrazione (per le quali vedi [Lan83] capitolo 3.4) rimandando alle sezioni che seguono per maggiori dettagli.

Proposizione A.16 *Dato uno spazio topologico normale (o T_4) X e dato un suo sottoinsieme chiuso:*

$$A \subset X \quad (297)$$

contenuto in un insieme aperto U ovvero:

$$A \subset U \quad (298)$$

allora esiste un insieme aperto U_1 la cui chiusura $\bar{U}_1$ soddisfa la seguente relazione:

$$A \subset U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U \quad (299)$$

Teorema A.8 (Lemma di Urysohn) *Dato uno spazio topologico normale (o T_4) X si abbiano due sottoinsiemi A e B :*

1. chiusi,

2. *disgiunti.*

Da tali premesse si ha che esiste una funzione:

$$f : X \longrightarrow [0, 1] \quad (300)$$

tale che:

1. $f(A) = 0$,
2. $f(B) = 1$.

Dal momento che uno spazio topologico:

1. di Hausdorff (ovvero di tipo T_2),
2. compatto,

è normale (ovvero di tipo T_4) si può applicare il Lemma di Urysohn. Tale Lemma ha il seguente Corollario che ne rappresenta una variante.

Corollario A.5 *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e sia K un sottoinsieme compatto. Esiste una funzione continua g su X che:*

1. *g assume valore 1 su K ,*
2. *g assume valore 0 su K^C .*

Al proposito si ha il seguente Teorema di estensione di Tietze.

Teorema A.9 *Sia A un sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico normale X e sia f una funzione continua a valori reali su A ovvero sia:*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad (301)$$

allora esiste una funzione continua f^ su X la cui restrizione su A coincide con f . Se f assume valori in $[0, 1]$ allora si può scegliere f^* in modo che assuma anch'essa valori in $[0, 1]$.*

Nota A.24 *La restrizione all'intervallo $[0, 1]$ non è necessaria e il teorema si estende facilmente ad ogni altro intervallo chiuso e limitato mappandolo sull'intervallo $[0, 1]$ con una trasformazione lineare che è un omeomorfismo (continua, iniettiva e surgettiva con l'inversa continua).*

A.2 Esempi ed Esercizi 1, da [Lip65], capitoli 5, 6, 7, 8 e 9

A.2.1 Spazi topologici: prime definizioni e caratterizzazione dei punti

Questa sezione si apre con un certo numero di esercizi ed esempi centrati sul concetto di spazio topologico e sulle definizioni principali (punti di accumulazione; insiemi chiusi e chiusura di insiemi; interno, esterno e frontiera; intorni e concetti collegati).

Esempio A.6 *Dato l'insieme:*

$$X = \{a, b, c, d, e\} \quad (302)$$

si ha che:

1.

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\} \quad (303)$$

non è una topologia su X dal momento che $\{a, b\} \cup \{a, c\} \notin \tau_1$ per cui risulta violata una delle regole di definizione delle topologie su un insieme.

2.

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\} \quad (304)$$

non è una topologia su X dal momento che $\{a, b, c\} \cap \{a, b, d\} \notin \tau_1$ per cui risulta violata una delle regole di definizione delle topologie su un insieme.

3.

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\} \quad (305)$$

è una topologia su X dal momento che soddisfa tutte le proprietà che caratterizzano una topologia su un insieme X .

Si noti che non si è specificato il tipo di insiemi (aperti o chiusi) contenuti in τ_1 e che essendo X a cardinalità finita le proprietà che definiscono una topologia su di esso in termini di insiemi chiusi o aperti coincidono. Se si impone che gli insiemi in τ_1 (nell'ultimo caso, l'unico fra quelli presentati che costituisce una topologia) sono insiemi aperti i corrispondenti insiemi chiusi sono:

$$\tau_{1c} = \{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, e\}, \{e\}\} \quad (306)$$

che soddisfano le proprietà di una topologia su un insieme X come definito in questo esempio.

Esercizio A.1 *Supponiamo che τ contenga i seguenti insiemi: $\mathbb{R}$, $\emptyset$ e tutti gli intervalli aperti del tipo:*

$$A_q = (q, \infty) \quad (307)$$

con $q \in \mathbb{Q}$. Dire se τ è o no una topologia su $\mathbb{R}$.

Soluzione

Per dimostrare che τ non è una topologia è sufficiente dimostrare che una delle proprietà che definiscono una topologia su un insieme risulta violata. Si considera:

$$A = \cup_q \{A_q : q \in \mathbb{Q}, q > \sqrt{2}\} = (\sqrt{2}, \infty) \quad (308)$$

A è l'unione di infiniti elementi di τ ma non appartiene a τ dal momento che $\sqrt{2}$ è un irrazionale e non appartiene a $\mathbb{Q}$. La proprietà dell'unione viene violata (vedi la Nota) per cui τ non è una topologia.

Nota

In questo caso la topologia è definita su insiemi aperti e si sfrutta il fatto che viene violata la proprietà che l'unione di un numero qualunque di insiemi contenuti in τ deve appartenere a τ .

Esercizio A.2 *Dato un insieme X si consideri:*

$$\tau = \{X, \emptyset, A, B\} \quad (309)$$

con A e B sottoinsiemi propri non vuoti di X . Si dica sotto quali condizioni su A e B τ è una topologia su X .

Soluzione

Le condizioni su A e B riguardano la loro unione o la loro intersezione. Nel caso si usi l'unione si hanno tre casi (dal momento che A e B sono entrambi non vuoti per cui è $A \cup B \neq \emptyset$).

1. *$A \cup B$ deve appartenere a τ per cui il primo caso è che sia $A \cup B = X$. In questo caso A e B sono una partizione di τ e quindi $A \cap B = \emptyset$.*
2. *$A \cup B$ deve appartenere a τ per cui si hanno le altre due possibilità ovvero:*

$$(a) \ A \cup B = A \text{ per cui } B \subset A,$$

$$(b) \ A \cup B = B \text{ per cui } A \subset B$$

in entrambi i casi uno degli insiemi è un sottoinsieme dell'altro e la topologia è detta essere totalmente ordinata per inclusione in modo che sia:

$$\emptyset \subset A \subset B \subset X \quad (310)$$

oppure:

$$\emptyset \subset B \subset A \subset X \quad (311)$$

Nel caso si impongano condizioni sulla intersezione si hanno i casi seguenti:

1. $A \cap B = \emptyset$ per cui A e B sono una partizione di X in modo che sia $A \cup B = X$;
2. $A \cap B \neq \emptyset$ e quindi i due soli casi possibili perchè $A \cap B$ stia in X sono:
 - (a) $A \cap B = A$,
 - (b) $A \cap B = B$.

In entrambi i casi ci si riconduce ad uno dei casi esaminati lavorando sulla unione.

Esempio A.7 Se si ha $X = \{a, b, c\}$ e si vogliono le topologie su τ contenenti quattro elementi si deve tenere presente che due dei quattro elementi sono “fissati” sulla base della definizione di topologia su un insieme e sono:

1. $\emptyset$,
2. X ,

per cui ne restano due “liberi”. Si hanno due modi di procedere:

1. definire due insiemi A e B come nell'esercizio A.2 in modo che siano una partizione di X per cui le topologie possibili sono:
 - (a) $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$
 - (b) $\{X, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}$
 - (c) $\{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}\}$

in questo caso, comunque si prendono coppie di insiemi, la loro intersezione vale $\emptyset$ e la loro unione vale X ;

2. definire la topologia τ su X in modo che i suoi elementi siano totalmente ordinati per inclusione. In questo caso si hanno topologie quali le seguenti (non se ne dà l'elenco completo):

- (a) $\{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$
- (b) $\{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$

e altre simili.

Esempio A.8 *Si abbia una funzione:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (312)$$

da un insieme $X \neq \emptyset$ allo spazio topologico $(Y, \mathcal{U})$. Se si definisce l'insieme delle immagini inverse di insiemi aperti in Y ovvero:

$$\tau = \{f^{-1}[G] : G \in \mathcal{U}\} \quad (313)$$

si ha che τ è una topologia su X . Per dimostrarlo si deve dimostrare che X e $\emptyset$ stanno in τ e lo stesso dicasi per l'unione di un numero qualunque di insiemi aperti e l'intersezione di due insiemi aperti. Si procede per casi. Siccome $\mathcal{U}$ è una topologia su Y si ha che $Y \in \mathcal{U}$ e $\emptyset \in \mathcal{U}$. Si ha quindi:

1. $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ per cui $\emptyset \in \tau$,
2. $f^{-1}[Y] = X$ per cui $X \in \tau$.

Si considera la famiglia di insiemi $\{A_i\}_i$ con $A_i \in \tau$. Per come ho definito τ esiste sicuramente $G_i \in \mathcal{U}$ tale che:

$$f^{-1}[G_i] = A_i \quad (314)$$

Dal momento che:

$$\cup_i A_i = \cup_i f^{-1}[G_i] = f^{-1}[\cup_i G_i] \quad (315)$$

e poichè $\cup_i G_i \in \mathcal{U}$ (essendo $\mathcal{U}$ una topologia) si ha che $\cup_i A_i \in \tau$.

Se ora si considerano A_1 e A_2 in τ dalla definizione di τ so che esistono G_1 e G_2 in $\mathcal{U}$ tali che:

1. $A_1 = f^{-1}[G_1]$
2. $A_2 = f^{-1}[G_2]$

per cui si ha:

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}[G_1] \cap f^{-1}[G_2] = f^{-1}[G_1 \cap G_2] \quad (316)$$

Essendo $\mathcal{U}$ una topologia si ha $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{U}$ per cui $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Si è dimostrato che τ soddisfa le proprietà che deve soddisfare una topologia e, pertanto, τ è una topologia su X .

Esercizio A.3 *Supponiamo di avere un sottoinsieme A di uno spazio topologico X . Se ogni punto $p \in A$ appartiene ad un insieme aperto G_p contenuto in A allora A è aperto.*

Soluzione

So che ogni $p \in A$ è tale che $p \in G_p \subset A$ per cui:

$$\cup_p \{G_p : p \in A\} = \cup_p \{p \in A\} = A \quad (317)$$

ovvero A è scrivibile come unione di un numero qualunque di insiemi aperti per cui (dalla definizione di topologia su insiemi aperti) è un insieme aperto.

Nota

Si considera su X una topologia di insiemi aperti per cui si sfrutta il fatto che l'unione di un numero qualunque di insiemi aperti è un insieme aperto. La condizione:

$$p \in G_p \subset A \quad (318)$$

ci assicura che per ogni punto $p \in A$ il relativo intorno aperto è un sottoinsieme di A per cui non si va mai “fuori” da A .

Esercizio A.4 Sia τ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contiene $\mathbb{R}$, $\emptyset$ e tutti gli intervalli aperti del tipo:

$$E_a = (a, \infty) \quad (319)$$

con $a \in \mathbb{R}$. Si ha che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

Soluzione

Dal momento che $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono in τ si deve dimostrare che l'unione di un numero qualunque di insiemi aperti è un insieme aperto e lo stesso vale per l'intersezione di due insiemi aperti.

Vediamo il caso dell'unione.

Considero la sottoclasse $\mathcal{A}$ di $\tau \setminus \{X, \emptyset\}$ definita come:

$$\mathcal{A} = \{E_i : i \in I\} \quad (320)$$

con I insieme di numeri reali (ovvero $I \subset \mathbb{R}$). Si vuole dimostrare che $\cup_{i \in I} E_i \in \tau$.

Si hanno due casi:

1. I è inferiormente illimitato per cui $\inf(I) = -\infty$ e quindi $\cup_{i \in I} E_i = \mathbb{R}$,
2. I è inferiormente limitato per cui $\inf(I) = i_0$ e quindi $\cup_{i \in I} E_i = (i_0, \infty) = E_{i_0}$

In entrambi i casi $\cup_{i \in I} E_i \in \tau$.

Vediamo il caso dell'intersezione.

Si può procedere in due modi:

1. sfruttando l'ordinamento totale per inclusione (vedi la **Nota**),

2. sfruttando il fatto che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ (senza perdita di generalità) si ha $E_a \cap E_b = E_b \in \tau$.

Nota

Nel caso di una topologia su insiemi aperti è sufficiente dimostrare che l'intersezione di due insiemi è un insieme aperto per dimostrare che lo è anche l'intersezione di un numero finito di insiemi. Negli esercizi e negli esempi sfrutteremo spesso questa equivalenza.

In questo caso si sfrutta anche il fatto seguente:

se gli insiemi di τ (sottoinsiemi di X) sono totalmente ordinati per inclusione insiemistica allora l'intersezione di due sottoinsiemi qualunque di τ appartiene a τ .

Supponiamo di avere A e B in τ . Dall'ordinamento totale si hanno due casi:

1. $A \subset B$ per cui $A \cap B = A \in \tau$,
2. $B \subset A$ per cui $A \cap B = B \in \tau$

da cui la tesi. Dal momento che si parla di ordinamento totale il simbolo $\subset$ è da intendersi come $\subseteq$ ovvero non come inclusione stretta.

Esempio A.9 Supponiamo di avere la famiglia τ dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che contiene $\mathbb{N}$, $\emptyset$ e tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ del tipo:

$$E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} \quad (321)$$

con $n \in \mathbb{N}$. Si può dimostrare che τ è una topologia su $\mathbb{N}$. Per farlo si considera che $\mathbb{N}$ e $\emptyset$ sono in τ per cui si devono dimostrare le due proprietà dell'unione e dell'intersezione. Per la seconda si sfrutta il fatto che gli insiemi E_n sono totalmente ordinati rispetto all'inclusione in modo che l'intersezione di due insiemi di τ appartiene a τ . Per la prima si considera la famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi in $\tau \setminus \{X, \emptyset\}$ del tipo:

$$\mathcal{A} = \{E_n : n \in I\} \quad (322)$$

con $I \subset \mathbb{N}$. Per definizione I ha un elemento minimo n_0 (essendo $\mathbb{N}$ inferiormente limitato) e pertanto si ha:

$$\cup \{E_n\}_{n \in I} = E_{n_0} \in \tau \quad (323)$$

per cui la proprietà relativa all'unione è verificata e, quindi, τ è una topologia su $\mathbb{N}$.

Dati gli insiemi E_n prima definiti e un insieme $A = \{4, 13, 28, 37\}$ se ne

vogliono i punti di accumulazione. Per determinare i punti p di accumulazione per A si vogliono gli insiemi aperti la cui intersezione con A contiene elementi diversi da p . Nel nostro caso se si considera $p \leq 36$ si ha che $A \cap E_p$ contiene punti di A diversi da 37 mentre se $p > 36$ ciò non accade. Da ciò discende che il derivato di A (ovvero l'insieme dei punti di accumulazione per A) è dato dall'insieme:

$$\{1, 2, 3, \dots, 36\} \quad (324)$$

Si vogliono ora gli insiemi $E \subset \mathbb{N}$ tali che il derivato di E coincide con $\mathbb{N}$. Si hanno due casi.

1. E è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ (ad esempio $E = \{n = 2k : k \in \mathbb{N}\}$) quindi è superiormente illimitato per cui ogni insieme aperto E_n che contiene un qualunque $p \in \mathbb{N}$ contiene punti di E diversi da p . Si ha che l'insieme dei punti di accumulazione di E (ovvero il suo derivato) coincide con $\mathbb{N}$.
2. E è un insieme finito di $\mathbb{N}$ per cui è superiormente limitato ovvero esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $E_{n_0+1} \cap E = \emptyset$ in modo che $n_0 + 1$ non sia un punto di accumulazione per E . Dalla arbitrarietà di n_0 segue che il derivato di E non coincide con $\mathbb{N}$.

Esempio A.10 Sia dato uno spazio topologico (X, τ) e un suo sottoinsieme A . Si vogliono delle condizioni per le quali un punto $p \in X$ non è un punto di accumulazione per A .

La definizione di punto di accumulazione dice che p è punto di accumulazione per A se ogni insieme aperto che contiene p contiene punti di A diversi da p ovvero se $G \in \tau$ e $p \in G$ si ha:

$$(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset \quad (325)$$

Perchè p non sia un punto di accumulazione per A si deve negare tale condizione per cui si deve trovare $G \in \tau$ tale che:

$$(G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset \quad (326)$$

Si hanno due casi.

1. $G \cap A = \emptyset$ per cui se da G tolgo p l'intersezione rimane vuota,
2. $G \cap A = \{p\}$ per cui se da G tolgo p l'intersezione risulta vuota.

Tali casi si possono condensare nella seguente relazione:

$$G \cap A \subset \{p\} \quad (327)$$

che rappresenta la condizione sotto la quale $p \in X$ non è un punto di accumulazione per A posto $p \in G$.

Se la topologia su X è la topologia discreta il derivato di qualunque sottoinsieme A è l'insieme vuoto. Nel caso della topologia discreta ogni sottoinsieme di τ è un insieme aperto (ovvero appartiene a τ) per cui $\forall p \in X \ G = \{p\}$ è un sottoinsieme aperto di X . Si ha quindi $p \in G$ e

$$G \cap A = \{p\} \cap A \subset \{p\} \quad (328)$$

per quanto visto in precedenza. Si ha quindi che p non è punto di accumulazione per A e questo per ogni p in X per cui il derivato di A è l'insieme vuoto.

Nota

Il derivato di un insieme A (ovvero l'insieme dei suoi punti di accumulazione) lo si indica con $D(A)$.

Esercizio A.5 *Si consideri l'insieme:*

$$X = \{a, b, c, d, e\} \quad (329)$$

e la topologia su X :

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\} \quad (330)$$

Si vogliono i derivati dei seguenti insiemi:

1. $A = \{c, d, e\}$
2. $B = \{b\}$

Soluzione

Nel caso di $A = \{c, d, e\}$ si devono trovare sottoinsiemi di τ la cui intersezione con A contenga altri punti oltre al punto $p \in X$ che si considera e ciò deve valere per tutti i sottoinsiemi per cui basta trovarne uno che viola la condizione perchè il punto p non sia di accumulazione. Se considero a ho che $\{a, b\} \in \tau$ ma $\{a, b\} \cap A = \emptyset$ per cui a non è di accumulazione per A e lo stesso vale per b considerando lo stesso sottoinsieme. Per e si può considerare $\{a, b, e\}$ in modo che sia $\{a, b, e\} \cap A = \{e\}$ per cui e non può essere punto di accumulazione per A .

Se considero c ho che i sottoinsiemi che lo contengono sono $\{a, c, d\}$ e

$\{a, b, c, d\}$ la cui intersezione con A è diversa sia da $\emptyset$ sia da $\{c\}$ per cui c è punto di accumulazione per A . In modo simile si ragiona per d considerando i sottoinsiemi $\{a, c, d\}$ e $\{a, b, c, d\}$. Si ha quindi che:

$$D(A) = \{c, d\} \quad (331)$$

Nel caso di $B = \{b\}$ i sottoinsiemi $\{a\}$, $\{a, b\}$ e $\{a, c, d\}$ sono tali da avere con B o intersezione vuota oppure uguale a $\{b\}$ per cui a, b, c, d non sono punti di accumulazione per B . Considero ora e e i soli sottoinsiemi di τ che lo contengono ovvero X e $\{a, b, e\}$. Poichè $\{a, b, e\} \cap B = \{b\}$ e $X \cap B = \{b\}$ distinto da $\{e\}$ ho che e è punto di accumulazione per B per cui:

$$D(B) = \{e\} \quad (332)$$

Esercizio A.6 *Si abbiano due insiemi A e B tali che $A \subset B$. Si dimostri che $D(A) \subset D(B)$.*

Soluzione

Dalla definizione di punto di accumulazione si ha che $p \in D(A)$ se per ogni insieme aperto G che contiene il punto p vale la condizione seguente:

$$(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset \quad (333)$$

Dalla $A \subset B$ si ha:

$$(G \setminus \{p\}) \cap B \supset (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset \quad (334)$$

per cui se $p \in D(A)$ allora $p \in D(B)$ da cui la tesi.

Esempio A.11 *Si abbia un insieme su cui sono definite due topologie τ_1 e τ_2 tali che $\tau_1 \subset \tau_2$ (ovvero ogni sottoinsieme aperto di X in τ_1 è un sottoinsieme aperto di X in τ_2) e si abbia un sottoinsieme qualunque A di X . Si ha:*

1. ogni punto di accumulazione per A in τ_2 lo è anche per τ_1 ,
2. esistono casi in cui un punto di accumulazione per A in τ_1 non lo è per τ_2 .

Per quanto riguarda il primo punto si supponga di avere un punto p di accumulazione per A nella topologia τ_2 . Ciò significa che per ogni insieme aperto $G \in \tau_2$ con $p \in G$ si ha:

$$(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset \quad (335)$$

Sappiamo però che $\tau_1 \subset \tau_2$ in modo che per ogni insieme aperto $G \in \tau_1$ con $p \in G$ si ha:

$$(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset \quad (336)$$

per cui p è punto di accumulazione per A anche in τ_1 .

Per il secondo punto un esempio è il seguente. Si considerino su $\mathbb{R}$ le seguenti topologie:

1. la topologia su $\mathbb{R}$ in cui gli insiemi aperti sono gli insiemi aperti di numeri reali detta topologia usuale $\mathcal{U}$,
2. la topologia discreta $\mathcal{D}$ su $\mathbb{R}$.

Si ha che $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ dal momento che $\mathbb{R}$ contiene tutti i possibili sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. In questo caso $\mathcal{U}$ gioca il ruolo di τ_1 e $\mathcal{D}$ di τ_2 . Si è visto che nel caso di un spazio topologico con la topologia discreta ogni suo sottoinsieme ha derivato nullo. Se prendo:

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\} \quad (337)$$

allora 0 non è punto di accumulazione per A in $\mathcal{D}$ (ovvero per τ_2) ma lo è rispetto alla topologia usuale $\mathcal{U}$ (ovvero τ_1) su $\mathbb{R}$.

Esercizio A.7 Dato uno spazio topologico (X, τ) e due sottoinsiemi A e B si dimostri che:

$$D(A \cup B) = D(A) \cup D(B) \quad (338)$$

Soluzione

Usando una tecnica classica si dimostra la (338) dimostrando una doppia inclusione ovvero dimostrando che:

1. $D(A) \cup D(B) \subset D(A \cup B)$
2. $D(A \cup B) \subset D(A) \cup D(B)$

Per dimostrare la prima inclusione si fa riferimento all'esercizio A.6. Si ha che:

$$A \subset A \cup B \implies D(A) \subset D(A \cup B) \quad (339)$$

$$B \subset A \cup B \implies D(B) \subset D(A \cup B) \quad (340)$$

per cui:

$$D(A) \cup D(B) \subset D(A \cup B) \quad (341)$$

Si deve ora dimostrare che vale la $D(A \cup B) \subset D(A) \cup D(B)$. Si sfrutta il fatto che si deve dimostrare che se $p \in D(A \cup B)$ allora $p \in D(A) \cup D(B)$ per cui, negando l'implicazione, si ha che si deve dimostrare:

$$p \notin D(A) \cup D(B) \implies p \notin D(A \cup B) \quad (342)$$

Suppongo che sia $p \notin D(A) \cup D(B)$ ovvero p non è di accumulazione nè per A nè per B per cui esistono in τ due insiemi aperti G e H tali che:

$$p \in G \text{ \& } G \cap A \subset \{p\} \quad (343)$$

$$p \in H \text{ \& } H \cap B \subset \{p\} \quad (344)$$

Dalla definizione di τ ho che $G \cap H \in \tau$ mentre per come si è preso p si ha che $p \in G \cap H$ e, sfruttando proprietà di base dell'unione e dell'intersezione di insiemi, si ha:

$$(G \cap H) \cap (A \cup B) = (G \cap H \cap A) \cup (G \cap H \cap B) \subset (G \cap A) \cup (H \cap B) \subset \{p\} \cup \{p\} = \{p\} \quad (345)$$

In questo modo si ha:

$$(G \cap H) \cap (A \cup B) \subset \{p\} \quad (346)$$

per cui $p \notin D(A \cup B)$ e quindi la tesi ovvero $D(A \cup B) \subset D(A) \cup D(B)$.

Esempio A.12 Supponiamo di avere l'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ su cui è definita la seguente topologia:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\} \quad (347)$$

Supponendo che gli insiemi contenuti in τ siano insiemi aperti i corrispondenti insiemi chiusi (ottenuti mediante operazioni di complementazione) sono i seguenti:

$$\tau = \{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, e\}, \{e\}, \{c, d\}\} \quad (348)$$

Dato un sottoinsieme A di uno spazio topologico X la **chiusura** di A ($\bar{A}$, [Lip65] pag. 68) è data dalla intersezione di tutti gli insiemi chiusi della topologia che contengono A (i soprainsiemi di A). Da tale definizione segue che:

1. la chiusura di $\{a\}$ è data da X (il solo soprainsieme chiuso di $\{a\}$ è X),
2. la chiusura di $\{b\}$ è data dalla intersezione di X , $\{b, c, d, e\}$ e $\{b, e\}$ per cui è $\{b, e\}$,
3. la chiusura di $\{c, e\}$ è data dalla intersezione di X , $\{b, c, d, e\}$ e $\{c, d, e\}$ per cui è $\{c, d, e\}$.

Si vede facilmente che la chiusura di un insieme è il più piccolo insieme chiuso della topologia che contiene l'insieme dato.

*Un sottoinsieme A si dice **denso** in X sse la sua chiusura coincide con X ovvero sse $\bar{A} = X$ ([Lip65] pag. 69). Da tale definizione e dall'analisi svolta per la chiusura si ha che l'unico insieme denso far quelli esaminati è $\{a\}$.*

Esempio A.13 *Si considera l'insieme dei naturali $\mathbb{N}$ e la topologia τ su $\mathbb{N}$ che consiste in:*

1. $\emptyset$,
2. i sottoinsiemi del tipo $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$

con $n \in \mathbb{N}$. Si ha una topologia perchè:

1. $\mathbb{N} = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$;
2. $\cup_{n \in I} E_n \in \tau$ dal momento che $I \subset \mathbb{N}$ ha un elemento minimo n_0 per cui l'unione coincide con E_{n_0} che appartiene a τ per definizione;
3. comunque prendo $m, n \in \mathbb{N}$ con $n < m$ (senza perdita di generalità) si ha $E_n \cap E_m = E_m \in \tau$.

La topologia τ per come definita è sugli insiemi aperti. Volendo i sottoinsiemi chiusi di $(\mathbb{N}, \tau)$ si ha che questi sono i complementari dei precedenti ovvero:

1. $\mathbb{N}$,
2. $\emptyset$,
3. $E_n^C = \{1, \dots, n-1\}$ per $n \geq 2$ (per $n = 1$ si ha $\emptyset$).

e definiscono la topologia τ_C dei sottoinsiemi chiusi.

Volendo la chiusura dell'insieme:

$$\{7, 24, 47, 85\} \tag{349}$$

si ha che la chiusura di un insieme, per definizione (nel caso di insiemi totalmente ordinati per inclusione), è il più piccolo soprainsieme chiuso tale che l'intersezione di tutti i soprainsiemi contenga l'insieme. Nel nostro caso la chiusura è pertanto l'insieme chiuso:

$$\{1, 2, 3, \dots, 84, 85\} \tag{350}$$

Volendo i sottoinsiemi A di $\mathbb{N}$ che sono densi in $\mathbb{N}$ si hanno due casi:

1. A infinito o illimitato per cui la sua chiusura coincide con $\mathbb{N}$ ovvero A è denso in $\mathbb{N}$,
2. A è finito per cui la sua chiusura (che è il più piccolo soprainsieme chiuso che contiene A) non coincide con $\mathbb{N}$ e perciò A non è denso in $\mathbb{N}$.

Esempio A.14 Su $\mathbb{R}$ si abbia la topologia τ caratterizzata da:

1. $\mathbb{R}$,
2. $\emptyset$,
3. gli intervalli aperti infiniti del tipo $E_a = (a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$.

I sottoinsiemi chiusi corrispondenti sono i seguenti:

1. $\emptyset$,
2. $\mathbb{R}$,
3. $E_a^C = (-\infty, a]$

e costituiscono la topologia τ_C definita sugli insiemi infiniti chiusi di $\mathbb{R}$.

Passando alla chiusura (indicata con una sovralineatura) si hanno i casi seguenti (con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$):

1. $\overline{(a, b]} = (-\infty, b]$
2. $\overline{[a, b)} = (-\infty, b]$
3. $\overline{\{7, 24, 47, 85\}} = (-\infty, 85]$

Nota

La chiusura dipende dalla topologia degli insiemi chiusi che si definisce (o come primitiva o come derivata per complementazione da una topologia di insiemi aperti) su X .

Esempio A.15 Si abbia uno spazio topologico X con la **topologia discreta** τ_D . Dalla definizione di topologia discreta segue che ogni $A \subset X$ è un sottoinsieme di τ_D . Dato un insieme A questo è aperto perchè appartiene a τ_D ed è chiuso perchè è il complemento di un qualche insieme in τ_D . A è contemporaneamente aperto e chiuso per cui la chiusura di A , per definizione, coincide con A ed è:

$$\bar{A} = A \quad (351)$$

Dalla considerazione precedente e dalla definizione di insieme denso in X (un insieme $A \subset X$ si dice denso in X sse $\bar{A} = X$) si ha che l'unico insieme denso in X è X .

Se su X si ha la **topologia indiscreta** τ_I i cui soli sottoinsiemi sono $X, \emptyset$ si ha:

1. i sottoinsiemi chiusi sono i complementi dei sottoinsiemi in τ_I e perciò sono $\emptyset, X$,
2. la chiusura di $\emptyset$ è $\emptyset$ (infatti $\emptyset \cap X = \emptyset$) e di X è X (infatti $X \cap X = X$),
3. dato $A \neq \emptyset$ con $A \subset X$ siccome il solo soprainsieme chiuso di A che lo contiene è X si ha che ogni $A \neq \emptyset$ con $A \subset X$ è denso in X .

Se si prende $A \subset X$ si ha che la chiusura di A è data dall'intersezione di tutti soprainsieme chiusi di A e coincide con il più piccolo di questi.

Esercizio A.8 *Si dimostri che un sottoinsieme A di uno spazio topologico X è chiuso sse contiene tutti i suoi punti di accumulazione ovvero sse $D(A) \subset A$.*

Soluzione

La dimostrazione la si fa in due passi.

($\implies$)

Suppongo A chiuso e dimostro che $D(A) \subset A$. Sia A chiuso e si consideri un punto $p \notin A$ ovvero $p \in A^C$. L'insieme A^C , complemento di un insieme chiuso, è un insieme aperto. Siccome $A^C \cap A = \emptyset$, p non è punto di accumulazione per A (altrimenti avrei $A^C \cap A \neq \emptyset$) per cui i punti di accumulazione di A (se esistono) sono contenuti in A e quindi $D(A) \subset A$. Si è dimostrato che i punti di accumulazione per A non stanno in A^C per cui, se ne esistono, devono essere in A da cui la tesi.

($\impliedby$)

Si suppone ora che sia $D(A) \subset A$ e si dimostra che A^C è aperto e perciò A è chiuso.

Si considera un punto $p \in A^C$ (ovvero $p \notin A$). Siccome $A^C \cap A = \emptyset$ (per definizione di complemento) ho che $p \notin D(A)$ per cui (negando la definizione di punto di accumulazione) si ha che esiste un insieme aperto G tale che:

1. $p \in G$,
2. $(G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$.

Dal momento che $p \notin A$ si ha $G \cap A = (G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$ per cui $G \subset A^C$ pertanto A^C è un insieme aperto (essendo p un punto qualunque si ha che ogni

punto di A^C è un punto interno) e quindi A è chiuso. In modo più dettagliato, si è visto che $p \in G \subset A^C$ per cui si può scrivere $A^C = \cup_{p \in A^C} G$ da cui A^C risulta essere aperto in quanto unione qualunque di suoi sottoinsiemi aperti.

Esercizio A.9 *Si dimostri che se F è un soprainsieme chiuso di un insieme qualunque A si ha $D(A) \subset F$.*

Soluzione

Dal momento che $A \subset F$ ho che $D(A) \subset D(F)$. Dall'esercizio precedente ho che essendo F chiuso è $D(F) \subset F$. Si ha quindi:

$$D(A) \subset D(F) \subset F \quad (352)$$

da cui la tesi (transitività dell'inclusione).

Nota

In questo esercizio si fa uso di risultati ricavati in precedenti esempi/esercizi e facilmente rintracciabili.

Esercizio A.10 *Si dimostri che dato un insieme qualunque A si ha che $A \cup D(A)$ è un insieme chiuso.*

Soluzione

Si procede dimostrando che $(A \cup D(A))^C$ è aperto. Per fare ciò si considera un punto generico $p \in (A \cup D(A))^C$. Per come si prende p si ha che:

1. $p \notin A$,
2. $p \notin D(A)$.

Dalla seconda condizione si ha che (negando la definizione di punto di accumulazione) esiste un insieme aperto G tale che $p \in G$ e $G \cap A \subset \{p\}$. Applicando ora la prima condizione si ha che $G \cap A = \emptyset$ (dato che $p \in G$ e $p \notin A$ ho che $p \notin G \cap A$). Si considera ora un punto qualunque $g \in G$ e si sfrutta il fatto che $G \cap A = \emptyset$ per dire che $g \notin D(A)$ per cui $G \cap D(A) = \emptyset$. Dalle relazioni così ricavate si ha:

$$G \cap (A \cup D(A)) = (G \cap A) \cup (G \cap D(A)) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \quad (353)$$

ovvero l'insieme aperto G è contenuto in $(A \cup D(A))^C$ ovvero il punto p è un punto interno di $(A \cup D(A))^C$ che risulta così essere un insieme aperto (per l'arbitrarietà di p si ha che tutti i punti di $(A \cup D(A))^C$ sono punti interni per cui l'insieme è aperto) e quindi $A \cup D(A)$ è un insieme chiuso.

Esercizio A.11 *Dato un insieme qualunque A si dimostri che vale la seguente relazione:*

$$\bar{A} = A \cup D(A) \quad (354)$$

ovvero la chiusura di un insieme coincide con l'unione dell'insieme e dell'insieme dei suoi punti di accumulazione.

Soluzione

Si dimostra l'uguaglianza mediante la doppia inclusione ovvero si dimostrano le due inclusioni seguenti:

$$1. A \cup D(A) \subset \bar{A},$$

$$2. \bar{A} \subset A \cup D(A).$$

In merito al primo punto si ha che per definizione di chiusura di un insieme (la chiusura di un insieme è l'intersezione di tutti i soprainsiemi chiusi che contengono l'insieme) si ha:

$$A \subset \bar{A} \quad (355)$$

e $\bar{A}$ è un insieme chiuso. Sfruttando il fatto che se $A \subset B$ allora $D(A) \subset D(B)$ e che un insieme A è chiuso sse contiene il suo derivato (ovvero sse $D(A) \subset A$) si ha:

$$D(A) \subset D(\bar{A}) \subset A \subset \bar{A} \quad (356)$$

ovvero:

$$D(A) \subset D(\bar{A}) \subset \bar{A} \quad (357)$$

Dal fatto che $A \subset \bar{A}$ e dalla conclusione precedente segue che:

$$A \cup D(A) \subset \bar{A} \quad (358)$$

In merito al secondo punto si ha che $A \cup D(A)$ è un insieme chiuso che contiene A in modo che sia:

$$A \subset \bar{A} \subset A \cup D(A) \quad (359)$$

da cui la tesi. L'ultima inclusione discende dal fatto che la chiusura di un insieme è il più piccolo soprainsieme chiuso che lo contiene.

Nota A.25 In molti degli esempi e/o esercizi si sfrutta la seguente proprietà della unione di insiemi:

$$A \subset B \text{ \& } A' \subset B' \implies A \cup A' \subset B \cup B' \quad (360)$$

Esercizio A.12 Si abbia il seguente insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ su cui è definita la seguente topologia:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\} \quad (361)$$

Si vogliono:

1. i punti interni di $A = \{a, b, c\}$,
2. i punti esterni di A ,
3. i punti di frontiera di A .

Soluzione (vedi la Nota)

Considero i vari punti di A :

1. $a \in \{a, b\} \subset A$ e $\{a, b\} \in \tau$ per cui $a \in \text{int}(A)$,
2. $b \in \{a, b\} \subset A$ e $\{a, b\} \in \tau$ per cui $b \in \text{int}(A)$,
3. c non soddisfa la condizione per cui $c \notin \text{int}(A)$ (avrei infatti che $c \in \{a, c, d\}$ e $\{a, b, c, d\}$ ma nessuno di tali due insiemi è contenuto in A).

In definitiva si ha che $\text{int}(A) = \{a, b\}$.

Per determinare gli elementi di $\text{ext}(A)$ considero $A^C = \{d, e\}$ e cerco di determinare $\text{int}(A^C)$. Si vede facilmente che nè d nè e sono contenuti in un insieme aperto contenuto in A^C per cui $\text{int}(A^C) = \emptyset$ e perciò $\text{ext}(A) = \emptyset$. In merito ai punti di frontiera di A si ha che questi coincidono con i punti che non sono nè interni nè esterni ad A per cui è $b(A) = \{c, d, e\}$.

Nota

Si richiamano le definizioni:

1. un punto $p \in A$ si dice **interno** per A se esiste un insieme aperto $G \in \tau$ tale che $p \in G \subset A$,
2. un punto p si dice **esterno** ad A se è un punto interno del complementare di A ovvero di A^C ,
3. un punto p si dice di **frontiera** per A se non è nè interno nè esterno.

Si definiscono, quindi, interno di A ($\text{int}(A)$ o anche A^0 o $\dot{A}$) l'insieme dei punti interni, esterno di A ($\text{ext}(A)$) l'insieme dei punti esterni e frontiera di A ($b(A)$) l'insieme dei punti di frontiera.

Esercizio A.13 Dato un insieme A si dimostri quanto segue:

1. l'interno di A è l'unione di tutti i sottoinsiemi aperti di A ,
2. l'interno di A (A^0) è un insieme aperto,
3. l'interno di A è il più grande sottoinsieme aperto di A ovvero se G è un sottoinsieme aperto qualunque di A si ha:

$$G \subset A^0 \subset A \quad (362)$$

4. *l'insieme A è aperto sse $A = A^0$*

Soluzione

Vediamo la dimostrazione dei singoli punti.

Per il primo punto se con $\{G_i\}_i$ si indica la famiglia dei sottoinsiemi aperti di A (ovvero i G_i sono sottoinsiemi aperti di A) si deve dimostrare che si ha:

$$A^0 = \cup_i G_i \quad (363)$$

Per dimostrare tale uguaglianza si dimostra la doppia inclusione ovvero:

$$1. A^0 \subset \cup_i G_i$$

$$2. A^0 \supset \cup_i G_i$$

Si considera $x \in A^0$ per cui x appartiene ad un sottoinsieme aperto di A . Esiste pertanto un indice i_0 tale che $x \in G_{i_0}$ ovvero $x \in \cup_i G_i$ per cui $A^0 \subset \cup_i G_i$.

Vediamo l'inclusione inversa. Suppongo di avere $y \in \cup_i G_i$. Esiste un indice i_0 tale che $y \in G_{i_0}$ per cui $y \in A^0$ e pertanto $\cup_i G_i \subset A^0$. Avendo provato la doppia inclusione risulta dimostrata l'uguaglianza $A^0 = \cup_i G_i$.

Da tale uguaglianza discende immediatamente il punto 2. dal momento che l'unione di un numero qualunque di insiemi aperti è un insieme aperto per definizione.

Passiamo al punto 3. Si ricorda che i G_i sono i sottoinsiemi aperti di A . Se G è un sottoinsieme aperto di A ho che $G \in \{G_i\}_i$ in modo che sia (per quanto visto al punto 1.):

$$G \subset \cup_i G_i = A^0 \subset A \quad (364)$$

da cui la tesi.

In merito al quarto punto si ha che la dimostrazione viene fatta in due passi

$$1. A \text{ aperto} \Rightarrow A = A^0,$$

$$2. A = A^0 \Rightarrow A \text{ aperto}.$$

La seconda implicazione si dimostra immediatamente notando che A^0 è un insieme aperto in quanto unione di insiemi aperti, come visto ai punti numero 1. e 2. Per la prima implicazione si noti che se A è un insieme aperto allora, sfruttando il fatto che $A^0 = \cup_i G_i$ e quanto visto al punto 3. (prendendo $G = A$), si ha

$$A \subset A^0 \subset A \quad (365)$$

da cui $A = A^0$ ovvero la tesi.

Nota

Si è usata la notazione A^0 per denotare l'insieme dei punti interni di A ovvero $\text{int}(A)$. Si è sfruttata la proprietà generale degli insiemi per la quale se $x \in G_{i_0}$ allora $x \in \cup_i G_i$ e se $x \in \cup_i G_i$ allora x appartiene almeno ad uno degli elementi dell'unione ovvero esiste un indice i_0 tale che $x \in G_{i_0}$.

Esempio A.16 Dato uno spazio topologico X con la topologia indiscreta e dato un sottoinsieme proprio e non vuoto A di X si vogliono:

1. $\text{int}(A)$,
2. $\text{ext}(A)$,
3. $b(A)$.

Si sa che su X si ha la topologia indiscreta ovvero quella in cui i soli insiemi aperti sono $\emptyset$ e X . Si ricorda che l'interno di A è l'unione di tutti i sottoinsiemi aperti di A che appartengono alla topologia. Essendo $A \neq \emptyset$ e $A \neq X$ per definizione, l'unico sottoinsieme aperto di A è $\emptyset$ per cui $\text{int}(A) = \emptyset$.

In modo analogo (per il calcolo di $\text{ext}(A)$ calcolo $\text{int}(A^C)$) l'unico sottoinsieme di A^C è $\emptyset$ per cui $\text{int}(A^C) = \text{ext}(A) = \emptyset$. Infine dalla definizione di frontiera (un punto è di frontiera se non è nè interno nè esterno) si ha $B(A) = X$.

Esempio A.17 Sia dato $\mathbb{R}$ con la topologia τ caratterizzata dai seguenti insiemi:

1. $\mathbb{R}$,
2. $\emptyset$,
3. gli intervalli aperti infiniti del tipo $E_a = (a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Dato l'intervallo $A = [7, \infty)$ si vogliono:

1. $\text{int}(A)$,
2. $\text{ext}(A)$,
3. $b(A)$.

Dalla definizione di interno di un insieme qualunque si ha che A^0 coincide con il più grosso insieme aperto (della topologia) contenuto in A per cui $A^0 = (7, \infty)$. Per l'esterno si ha che $\text{ext}(A) = \text{int}(A^C)$ con $A^C = (-\infty, 7)$ ma tale insieme non contiene nessun insieme aperto del tipo E_a a parte $\emptyset$ per cui $\text{ext}(A) = \text{int}(A^C) = \emptyset$. Dalla definizione di punti di frontiera come di punti che non sono nè interni nè esterni si ha che $b(A) = (-\infty, 7]$.

Esempio A.18 *Per dimostrare che dato un insieme A vale la seguente uguaglianza:*

$$\bar{A} = \text{int}(A) \cup b(A) \quad (366)$$

(ovvero la chiusura di un insieme coincide con l'unione (disgiunta) dell'interno e della frontiera) si procede come segue.

L'insieme A appartiene ad un insieme X per cui si può scrivere:

$$X = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup b(A) \quad (367)$$

ovvero:

$$\text{ext}(A) = (\text{int}(A) \cup b(A))^C \quad (368)$$

in cui le unioni sono disgiunte (ciò discende dalle definizioni dei vari insiemi coinvolti). Per dimostrare la tesi basta dimostrare che si ha:

$$\bar{A}^C = \text{ext}(A) = (\text{int}(A) \cup b(A))^C \quad (369)$$

(si ottiene la tesi complementando m.a m. dal momento che se è $A^C = B^C$ allora è $A = B$). La dimostrazione (dal momento che si deve dimostrare l'uguaglianza di due insiemi) la si fa dimostrando una doppia inclusione ovvero dimostrando che si ha:

1. $\text{ext}(A) \subset (\bar{A})^C$,
2. $\text{ext}(A) \supset (\bar{A})^C$.

Vediamo la prima inclusione. Si prende un punto generico $p \in \text{ext}(A)$ per cui (dalla definizione di esterno) esiste un insieme aperto G tale che:

$$p \in G \subset A^C \quad (370)$$

e quindi:

$$G \cap A = \emptyset \quad (371)$$

Da ciò discende che p non è un punto di accumulazione (o limite) per A per cui si ha:

1. $p \notin A'$
2. $p \notin A$

(con A' si indica il derivato di A ovvero l'insieme dei suoi punti di accumulazione) e pertanto

$$p \notin A' \cup A = \bar{A} \quad (372)$$

ovvero $p \in \bar{A}^C$. Da tutto ciò segue che:

$$p \in \text{ext}(A) \Rightarrow p \in \bar{A}^C \quad (373)$$

ovvero $\text{ext}(A) \subset \bar{A}^C$.

Si deve ora dimostrare la seconda inclusione. Per fare ciò si considera $p \in (\bar{A})^C = (A \cup A')^C$. Da ciò discende che:

1. $p \notin A$,
2. $p \notin A'$

Il punto p arbitrariamente scelto non è di accumulazione per A (perchè non appartiene al suo derivato) per cui esiste un insieme aperto G tale che $p \in G$ e:

$$(G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset \quad (374)$$

(se così non fosse p sarebbe di accumulazione per A per cui avrei $p \in A'$). Il punto p , inoltre, non appartiene ad A per cui è $G \cap A = \emptyset$ da cui $p \in G \subset A^C$. Si ha quindi che $p \in (\bar{A})^C \Rightarrow p \in \text{ext}(A)$ (se un punto non appartiene ad un insieme è ad esso esterno) da cui la tesi (ovvero $\text{ext}(A) \supset (\bar{A})^C$).

Esercizio A.14 Dato l'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topologia:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\} \quad (375)$$

si vogliono gli intorni dei punti e e c .

Soluzione

L'intorno di un punto è qualunque soprainsieme di un insieme aperto che lo contiene.

Nel caso di **e** gli insiemi aperti che lo contengono sono:

1. $\{a, b, e\}$ con soprainsiemi $\{a, b, e\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, d, e\}$ e X ;
2. X con soprainsieme X .

Nel caso di **c** gli insiemi aperti che lo contengono sono:

1. $\{a, c, d\}$ con soprainsiemi $\{a, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, c, d, e\}$ e X ;
2. $\{a, b, c, d\}$ con soprainsiemi $\{a, b, c, d\}$ e X ;
3. X con soprainsieme X .

Nota

Si ricorda la definizione. Dato uno spazio topologico X e un suo punto p si ha che un sottoinsieme N di X è un intorno di p sse N è un soprainsieme di un insieme aperto G (e pertanto di un elemento della topologia su X) che contiene p . Devono valere le seguenti relazioni:

$$p \in G \subset N \subset X \quad (376)$$

con $G \in \tau$ e con τ che è una topologia su X . Se su X si ha la topologia indiscreta $\tau_I = \{\emptyset, X\}$ si ha che X è il solo insieme aperto contenente un punto p e il suo unico soprainsieme è X stesso che è, pertanto, il solo intorno di un punto $p \in X$.

Esempio A.19 Vediamo alcune proprietà degli intorni.

1. Dati due intorni N e M di un punto p la loro intersezione $N \cap M$ è ancora un intorno di p : dal fatto che N e M sono intorni di p discende che esistono due insiemi aperti G ed H tali che:

$$p \in G \subset N \quad (377)$$

$$p \in H \subset M \quad (378)$$

per cui $p \in G \cap H \subset N \cap M$ e $G \cap H$ è un insieme aperto (perchè intersezione di due insiemi aperti) ovvero $N \cap M$ è un intorno di p .

2. Ogni soprainsieme M di un intorno N di un punto p è un intorno di p : dal fatto che N è un intorno di p segue che esiste un insieme aperto G tale che $p \in G \subset N$ ma $N \subset M$ per cui si ha $p \in G \subset M$ da cui M è un intorno di p .

3. Un insieme G è aperto sse è un intorno di ogni suo punto. Si procede in due passi.

(a) G aperto $\Rightarrow G$ è un intorno di ogni suo punto: se G è aperto allora ogni $p \in G$ appartiene all'insieme aperto G contenuto in G per cui G è intorno di ogni suo punto (si usa G in tutti i ruoli richiesti e lo si può fare perchè G è aperto e contiene sè stesso);

(b) G è un intorno di ogni suo punto $\Rightarrow G$ aperto: se G è un intorno di ogni suo punto allora, dalla definizione di intorno, per ogni $p \in G$ esiste un insieme aperto G_p tale che:

$$p \in G_p \subset G \quad (379)$$

Si ha quindi $G = \cup_{p \in G} G_p$ per cui G è aperto perchè unione di un numero qualunque di insiemi aperti.

Esempio A.20 Dato $\mathbb{R}$ con la topologia usuale (la topologia usuale su $\mathbb{R}$ è la topologia degli intervalli aperti su $\mathbb{R}$) se si considera il punto 0 si ha:

1. $0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ per cui $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ è un intorno di 0 essendo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ un insieme aperto;
2. $(-1, 0]$ non è un intorno di 0 perchè comunque prendo un insieme aperto G che contiene 0 questo contiene punti che non appartengono a $(-1, 0]$;
3. $(0, 1]$ non contiene lo 0 per cui non può essere un suo intorno.

Esercizio A.15 Sia dato l'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topologia:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\} \quad (380)$$

si vogliono gli elementi della topologia relativa τ_A definita su $A = \{a, c, e\}$.

Soluzione

Si cercano le intersezioni fra A e gli elementi di τ (vedi la **Nota**). Si ha:

1. $X \cap A = A$,
2. $\emptyset \cap A = \emptyset$,
3. $\{a\} \cap A = \{a\} \cap \{a, c, e\} = \{a\}$,
4. $\{a, b\} \cap A = \{a\}$
5. $\{a, c, d\} \cap A = \{a, c\}$
6. $\{a, b, c, d\} \cap A = \{a, c\}$
7. $\{a, b, e\} \cap A = \{a, e\}$

per cui si ha

$$\tau_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\} \quad (381)$$

Si fa notare che $\{a, e\}$ non è un insieme aperto in X (ovvero non appartiene a τ) ma lo è in A (ovvero appartiene a τ_A). È facile verificare che gli insiemi così ricavati soddisfano le proprietà di una topologia su un insieme.

Nota

Si ricorda la definizione. Dato uno spazio topologico (X, τ) e un suo sottoinsieme non vuoto A la classe τ_A di tutte le intersezioni di A con elementi di τ rappresenta una topologia su A e la si dice **topologia relativa su A** : un sottoinsieme H di A è un insieme aperto di τ_A sse esiste un sottoinsieme aperto G di X in τ tale che:

$$H = G \cap A \quad (382)$$

Esempio A.21 Si abbia lo spazio topologico (X, τ) e un sottoinsieme aperto A di τ e supponiamo di avere un sottoinsieme Y di X tale che:

$$A \subset Y \subset X \quad (383)$$

Dimostrare che A è un insieme aperto anche nella topologia relativa τ_Y . Per dimostrarlo si riprende la definizione di topologia relativa:

$$\tau_Y = \{Y \cap G : G \in \tau\} \quad (384)$$

Dal momento che:

$$1. A \in \tau$$

$$2. A \subset Y$$

si ha che:

$$A = A \cap Y \quad (385)$$

per cui $A \in \tau_Y$.

Esempio A.22 Si considerino $\mathbb{R}$ con la topologia usuale e l'intervallo $I = [0, 1]$. Si vuole sapere se i seguenti sottoinsiemi di I sono elementi della topologia relativa τ_I :

$$1. (\frac{1}{2}, 1],$$

$$2. (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}),$$

$$3. (0, \frac{1}{2}].$$

Per verificarlo, caso per caso, si deve trovare un insieme aperto in $\mathbb{R}$ la cui intersezione con I sia l'insieme che si stà esaminando.

1. per $(\frac{1}{2}, 1]$ si ha che lo si può vedere come $I \cap (\frac{1}{2}, 3)$ dove $(\frac{1}{2}, 3)$ è un insieme aperto in $\mathbb{R}$ per cui $(\frac{1}{2}, 1] \in \tau_I$ ovvero è un insieme aperto nella topologia relativa;

2. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ è aperto in $\mathbb{R}$ ed è un sottoinsieme di I per cui, per quanto visto nell'esempio precedente, è un insieme aperto nella topologia relativa;

3. nel caso di $(0, \frac{1}{2}]$ si ha che non lo si può determinare come l'intersezione di I e un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$ (da tale intersezione sarebbe escluso il punto $\frac{1}{2}$) per cui tale insieme non è un insieme aperto nella topologia relativa. Nel caso di $(\frac{1}{2}, 1]$ il problema non si pone perchè il punto di frontiera 1 di tale insieme lo è anche per I .

A.2.2 Spazi topologici: basi e sottobasi

Dopo aver esaminato, con esercizi ed esempi, i concetti introduttivi, nella presente sezione si passa ad una breve serie di esercizi ed esempi relativi ai concetti di:

1. base,
2. sottobase

di uno spazio topologico (X, τ) .

Dato lo spazio topologico (X, τ) una classe di sottoinsiemi aperti di X , $\mathcal{B} \subset \tau$, si dice una **base** per la topologia τ sse è verificata una delle seguenti condizioni, una equivalente all'altra:

1. si può scrivere ogni insieme aperto $G \in \tau$ come unione di elementi della base $\mathcal{B}$,
2. per ogni punto p che appartiene ad un insieme aperto G esiste un elemento della base cui appartiene il punto ovvero esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $p \in B \subset G$.

Esercizio A.16 *Si dimostri l'equivalenza delle due definizioni di base $\mathcal{B}$ di uno spazio topologico ovvero:*

1. *ogni $G \in \tau$ è l'unione di elementi della base $\mathcal{B}$,*
2. *comunque si prende $p \in G$ con G insieme aperto esiste $B_p \in \mathcal{B}$ tale che $p \in B_p \subset G$.*

Soluzione

Si dimostra che la prima definizione implica la seconda e viceversa da cui discende la loro equivalenza.

Se ho $G = \cup_i B_i$ con $i B_i \in \mathcal{B}$ so che per ogni punto $p \in G$ ho che $p \in \cup_i B_i$ per cui p appartiene ad almeno un elemento dell'unione ovvero esiste un indice i_0 tale che $p \in B_{i_0}$ per cui ho $p \in B_{i_0} \subset G$. In questo modo si è dimostrato che la prima definizione implica la seconda.

Per dimostrare che la seconda implica la prima si procede come segue. Se per ogni $p \in G$ (dove G è un insieme aperto) esiste un insieme $B_p \in \mathcal{B}$ tale che:

$$p \in B_p \subset G \quad (386)$$

posso scrivere:

$$G = \cup_{p \in G} B_p \quad (387)$$

da cui discende che G è dato dalla unione di elementi della base $\mathcal{B}$.

Esempio A.23 Dato $\mathbb{R}^2$ si voglia determinare se le seguenti classi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

1. la classe dei triangoli equilateri aperti,
2. la classe dei quadrati aperti con la base parallela all'asse delle ascisse

sono o no basi per la topologia usuale su $\mathbb{R}^2$.

La risposta è affermativa in entrambi i casi. Si sfrutta la proprietà in base alla quale sia i triangoli equilateri sia i quadrati sono inscritti in circonferenze. Se G è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ si può prendere $p \in G$. Esiste un disco aperto D_p di centro il punto p tale che:

$$p \in D_p \subset G \quad (388)$$

e tale che al suo interno si può inscrivere sia un quadrato sia un triangolo equilatero. Entrambe le classi (dei triangoli equilateri e dei quadrati) soddisfano la seconda definizione di base di una topologia da cui la tesi.

Esempio A.24 Dato uno spazio topologico (X, τ) sia $\mathcal{B}$ una base per la topologia τ su X e sia $\mathcal{B}^*$ una classe di insiemi aperti che contiene $\mathcal{B}$ ovvero si abbia:

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^* \subset \tau \quad (389)$$

Si dimostri che anche $\mathcal{B}^*$ è una base per τ .

Si considera un insieme aperto $G \subset X$. Dal momento che $\mathcal{B}$ è una base per τ si può scrivere:

$$G = \cup_i B_i \quad (390)$$

con $B_i \in \mathcal{B}$. Poichè $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$ si ha che $B_i \in \mathcal{B}^*$ per cui G è scrivibile come l'unione di elementi di $\mathcal{B}^*$ ovvero anche $\mathcal{B}^*$ è una base per τ .

Esempio A.25 Si abbia uno spazio topologico con la topologia discreta (X, τ_D) e sia $\mathcal{B}$ la classe di tutti i sottoinsiemi singoletto di X ovvero sia:

$$\mathcal{B} = \{\{p\} : p \in X\} \quad (391)$$

Si dimostri che ogni classe $\mathcal{B}^*$ di sottoinsiemi di X è una base per X sse è una superclasse di $\mathcal{B}$.

La dimostrazione viene fatta in due parti:

1. $\mathcal{B}^*$ è una base $\Rightarrow \mathcal{B}^*$ è una superclasse di $\mathcal{B}$,
2. $\mathcal{B}^*$ è una superclasse di $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}^*$ è una base.

Si parte dal primo punto. Sia $\mathcal{B}^*$ una base per τ . Dal momento che ogni singoletto $\{p\}$ è un insieme aperto in una topologia discreta si ha che $\{p\}$ deve essere scrivibile come unione di elementi di $\mathcal{B}^*$. Un singoletto può, tuttavia, essere solo l'unione di sé stesso con $\emptyset$ per cui $\{p\}$ deve stare in $\mathcal{B}^*$ e, pertanto, deve essere $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$.

In merito al secondo punto si ricorre a quanto visto nell'esempio precedente: essendo $\mathcal{B}$ una base ed essendo $\mathcal{B}^*$ la classe dei soprainsiemi di $\mathcal{B}$ si ha che anche $\mathcal{B}^*$ è una base per la topologia τ .

Esercizio A.17 *Si abbia un sottoinsieme non vuoto X e sia $\mathcal{B}$ una classe di suoi sottoinsiemi. Si ha che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X sse sono verificate le seguenti proprietà:*

1. $X = \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$,
2. *comunque si prendono B e $B^* \in \mathcal{B}$ si ha che $B \cap B^*$ è l'unione di membri di $\mathcal{B}$ ovvero se $p \in B \cap B^*$ allora esiste $B_p \in \mathcal{B}$ tale che $p \in B_p \subset B \cap B^*$.*

Soluzione

La dimostrazione avviene in due passi: si dimostra che se $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X allora sono verificate le proprietà suddette e poi che se sono verificate tali proprietà allora $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X .

1. Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X . La topologia τ contiene X per definizione per cui X è un insieme aperto ed è, quindi, l'unione di insiemi di $\mathcal{B}$ da cui discende che X è l'unione di tutti i membri di $\mathcal{B}$ ovvero vale la $X = \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$.
Se si considerano B e $B^* \in \mathcal{B}$ si ha che tali insiemi sono aperti per cui la loro intersezione è un insieme aperto: da ciò discende che, essendo $\mathcal{B}$ una base per τ , posso esprimere tale intersezione come unione di elementi della base da cui la tesi.
2. Supponiamo ora siano verificate le proprietà suddette e verifichiamo che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia τ . Per dimostrarlo è più semplice supporre che τ sia la classe di tutti i sottoinsiemi di X che sono unioni di elementi di $\mathcal{B}$ per poi dimostrare che soddisfa le proprietà che caratterizzano una topologia. Si osservi che $\mathcal{B}$ risulta essere una base per la topologia τ . Per dimostrare che τ è una topologia su X si deve dimostrare, pertanto, che contiene X , $\emptyset$, unioni qualunque di insiemi di τ e intersezioni di coppie qualunque di elementi di τ .

(a) per la prima proprietà $X = \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ per cui $X \in \tau$;

- (b) dato che $\emptyset \in \mathcal{B}$ si ha $\emptyset = \{\cup B : B \in \emptyset\}$ per cui $\emptyset \in \tau$;
- (c) supponiamo ora di avere una classe di elementi di τ $\{G_i\}_i$. Per definizione di τ ognuno degli insiemi G_i è l'unione di elementi di $\mathcal{B}$ per cui anche $\cup_i G_i$ è l'unione di elementi di $\mathcal{B}$ ed appartiene a τ ;
- (d) supponiamo ora di avere due insiemi G ed H elementi di τ e di voler dimostrare che $G \cap H \in \tau$. Dalla definizione di τ segue che esistono due sottoclassi di $\mathcal{B}$ tali che si possa scrivere:
- i. $G = \cup_i B_i$ con $B_i \in \mathcal{B}$ e $i \in I$ con I insieme di indici qualunque,
 - ii. $H = \cup_j B_j$ con $B_j \in \mathcal{B}$ e $j \in J$ con J insieme di indici qualunque.

Si ha quindi

$$G \cap H = (\cup_i B_i) \cap (\cup_j B_j) = \cup \{B_i \cap B_j : i \in I, j \in J\} \quad (392)$$

ma $B_i \cap B_j$ è dato dall'unione di elementi di $\mathcal{B}$ e lo stesso vale per $G \cap H$ che, pertanto, appartiene a τ

Si è così dimostrato che τ è una topologia su X con base $\mathcal{B}$.

Esempio A.26 Dato un insieme X su di esso si abbiano due topologie:

1. τ con base $\mathcal{B}$,
2. τ^* con base $\mathcal{B}^*$.

Se ogni $B \in \mathcal{B}$ è dato dall'unione di elementi di $\mathcal{B}^*$ si ha che la topologia τ è più grossolana della topologia τ^* ovvero si ha $\tau \subset \tau^*$.

Per dimostrarlo si prende un insieme aperto G della topologia τ . Dalla definizione di base si può scrivere

$$G = \cup_i B_i \quad (393)$$

con $B_i \in \mathcal{B}$. Dall'ipotesi i B_i sono scrivibili come l'unione di elementi della base $\mathcal{B}^*$ (insiemi aperti della topologia τ^*) per cui lo stesso vale per G che risulta essere un insieme aperto della topologia τ^* da cui la tesi (ovvero $\tau \subset \tau^*$).

Esercizio A.18 Si dimostri che la topologia usuale $\mathcal{U}$ su $\mathbb{R}$ è più grossolana della topologia del limite superiore τ su $\mathbb{R}$ che ha come base la classe degli intervalli del tipo $(a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Si sfrutta il risultato dell'esempio precedente e il fatto che un intervallo aperto è scrivibile come l'unione di intervalli del tipo aperto-chiuso (o semiaperto, ad esempio $(a, b]$ è un intervallo di tale tipo):

$$(a, b) = \cup_{n \in \mathbb{N}} (a, b - \frac{1}{n}] \quad (394)$$

Dal momento che gli intervalli aperti sono una base per la topologia $\mathcal{U}$ mentre gli intervalli semiaperti sono una base per la topologia τ dall'esempio precedente si ha:

$$\mathcal{U} \subset \tau \quad (395)$$

ovvero ogni insieme aperto della topologia $\mathcal{U}$ è un insieme aperto della topologia τ .

Nota

La topologia usuale su $\mathbb{R}$ è quella degli intervalli aperti, finiti o infiniti. Date due topologie τ_1 e τ_2 se τ_1 è una sottoclasse di τ_2 (ovvero $\tau_1 \subset \tau_2$) la si dice più grossolana di τ_2 mentre τ_2 viene detta più fine di τ_1 .

Esempio A.27 Si considera $\mathbb{R}$ con la topologia τ dell'esercizio precedente in cui una base è data da intervalli del tipo $(a, b]$ per cui gli intervalli di tale tipo sono insiemi aperti per tale topologia.

Si hanno i casi seguenti:

1. $(4, \infty) = \cup_{n=1}^{\infty} (4, 4+n]$ per cui $(4, \infty)$ è un insieme aperto perchè unione numerabile di insiemi aperti;
2. $(-\infty, 2] = \cup_{n=0}^{\infty} (-n, 2]$ per cui $(-\infty, 2]$ è un insieme aperto perchè unione numerabile di insiemi aperti;
3. in modo analogo si dimostra che (a, ∞) è un insieme aperto;
4. in modo analogo si dimostra che $(-\infty, b]$ è un insieme aperto;
5. $(a, b]$ è un insieme chiuso dal momento che $(a, b]^C$ è un insieme aperto in quanto scrivibile come unione di insiemi che sono aperti (per i punti precedenti) ovvero come

$$(a, b]^C = (-\infty, a] \cup (b, \infty) \quad (396)$$

Si noti che $(a, b]$ appartiene alla base della topologia τ per cui è anche un insieme aperto.

Esercizio A.19 *Si abbia l'insieme:*

$$X = \{a, b, c, d, e\} \quad (397)$$

e sia:

$$\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\} \quad (398)$$

Si vuole la topologia su X generata da $\mathcal{A}$.

Soluzione *Si procede in due passi (vedi la Nota):*

1. *si definisce la base $\mathcal{B}$ per la topologia τ su X ;*
2. *si definiscono gli elementi della topologia come unioni di elementi della base.*

Le intersezioni di elementi di $\mathcal{A}$ sono:

1. *gli elementi di $\mathcal{A}$ intersezioni con sè stessi;*
2. $\emptyset$;
3. X ;
4. $\{c\}, \{d\}$.

Tali elementi sono gli insiemi che formano una base per una topologia τ su X . Una volta calcolati gli insiemi della base, dagli insiemi della base si ricavano facilmente (tramite operazioni di unione) gli elementi della topologia che risulta essere:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c, d\}, \{c, d, e\}\} \quad (399)$$

Nota

*Dato un insieme non vuoto X e una classe di suoi sottoinsiemi $\mathcal{A}$ questa può non essere una base per una topologia su X ma **genera sempre una topologia su X** dal momento che le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{A}$ sono gli elementi della base $\mathcal{B}$ della topologia cercata e che dalle unioni degli elementi della base si ottiene la topologia. Si noti che X appartiene alla base $\mathcal{B}$ dal momento che lo si ottiene come intersezione vuota di elementi di $\mathcal{A}$.*

Esempio A.28 *Si consideri $\mathbb{R}$ con la classe $\mathcal{A}$ degli intervalli chiusi di ampiezza unitaria del tipo $[a, a + 1]$ oppure $[a - 1, a]$. Si vuole la topologia τ generata su $\mathbb{R}$ da tale classe.*

Supponiamo di prendere un elemento qualunque $p \in \mathbb{R}$. Gli intervalli $[p, p + 1]$ e $[p - 1, p]$ sono contenuti in $\mathcal{A}$ in modo che:

$$\{p\} = [p, p + 1] \cap [p - 1, p] \quad (400)$$

sia un elemento della base per la topologia τ cercata: si ha pertanto che i singoletti sono elementi della base (ovvero sono insiemi aperti della topologia) per cui la topologia τ è la topologia discreta su $\mathbb{R}$.

Esempio A.29 Si abbia l'insieme:

$$X = \{a, b, c, d, e\} \quad (401)$$

su cui si ha la topologia discreta τ_D . Si vuole una sottobase $\mathcal{S}$ di tale topologia che non contiene singoletti.

Per trovarla si ricorda che una base $\mathcal{B}$ per τ_D deve contenere i singoletti di X per cui una sottobase $\mathcal{S}$ deve contenere insiemi le cui intersezioni diano i singoletti di X ma (requisito dell'esercizio) non siano essi stessi singoletti. La soluzione prevede che gli elementi della sottobase $\mathcal{S}$ cercata siano insiemi composti da coppie di elementi di X in modo che sia:

$$\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, e\}\} \quad (402)$$

Si vede facilmente come i singoletti siano ottenibili come intersezioni di coppie di elementi della sottobase. Ad esempio si ha:

$$\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\} \quad (403)$$

Nota

Dato uno spazio topologico (X, τ) una sottobase $\mathcal{S}$ è una classe di sottoinsiemi aperti di X (per cui $\mathcal{S} \subset \tau$) sse intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ sono una base per τ .

Esercizio A.20 Si abbia una sottobase $\mathcal{S}$ per una topologia τ su un insieme X e si abbia $A \subset X$. Si dimostri che:

$$\mathcal{S}_A = \{A \cap S : S \in \mathcal{S}\} \quad (404)$$

è una sottobase per la topologia relativa τ_A su A .

Soluzione

Per definizione di topologia relativa, se H è un elemento qualunque della topologia τ_A su A allora esiste $G \in \tau$ ($G \subset X$) tale che $H = A \cap G$. Per ipotesi $\mathcal{S}$ è una sottobase di τ per cui (se S_{i_j} sono alcuni degli elementi di tale sottobase) si ha:

$$G = \cup_i (\cap_j S_{i_j}) \quad (405)$$

cioè G è esprimibile come l'unione di elementi della base che a loro volta sono intersezioni di elementi della sottobase. Da tutto ciò discende che:

$$H = A \cap G = A \cap (\cup_j (\cap_i S_{i_j})) = \cup_i (A \cap S_{i_j}) \quad (406)$$

in cui $A \cap S_{i_j}$ sono elementi della sottobase $\mathcal{S}_A$ per cui H è l'unione di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}_A$ e quindi $\mathcal{S}_A$ è una sottobase per la topologia relativa τ_A .

Nota

Sia A un sottoinsieme non vuoto dello spazio topologico (X, τ) per topologia relativa ad A si definisce la classe degli insiemi H tali che:

$$H = G \cap A \quad (407)$$

con G elemento di τ . Operativamente si prende l'insieme $A \subset X$ che ci interessa e, presi gli aperti di τ , si calcolano gli aperti di τ_A facendone le intersezioni con A .

Esempio A.30 Dato un insieme X con due topologie τ e τ^* se $\mathcal{S}$ è una sottobase per entrambe le topologie allora queste coincidono ovvero sono tali che $\tau = \tau^*$.

L'uguaglianza fra le due topologie viene dimostrata in due passi ovvero dimostrando che valgono le seguenti inclusioni:

1. $\tau \subset \tau^*$,
2. $\tau \supset \tau^*$.

Supponiamo di prendere $G \in \tau$. Essendo $\mathcal{S}$ una sottobase per τ si ha $G = \cup_i (\cap_j S_{i_j})$ in cui $S_{i_j} \in \mathcal{S}$. Dal momento che $\mathcal{S}$ è una sottobase anche per τ^* (ovvero $\mathcal{S} \subset \tau^*$) si ha che $S_{i_j} \in \tau^*$. Poichè τ^* è una topologia si ha che $\cap_j S_{i_j} \in \tau^*$ per cui $G \in \tau^*$ da cui $\tau \subset \tau^*$. Scambiando fra di loro i ruoli di τ e τ^* si dimostra in modo analogo l'altra inclusione da cui la tesi.

A.2.3 Spazi topologici: funzioni continue fra spazi topologici

A questo punto si passa ad alcuni esercizi ed esempi relativi alle funzioni continue fra spazi topologici (X, τ) e (Y, τ^*) esaminando i concetti di vicinanza arbitraria, continuità in un punto, continuità per successioni in un punto, funzioni aperte e chiuse, spazi omeomorfi e topologie indotte da funzioni.

Esercizio A.21 Sia:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (408)$$

la funzione costante (ovvero $\forall x \in X \ f(x) = p \in Y$). Si dimostri che f è continua rispetto a qualunque topologia τ su X e τ^* su Y .

Soluzione

Date le topologie τ e τ^* si deve dimostrare che se $H \in \tau^*$ allora $f^{-1}(H) \in \tau$. Si consideri $H \in \tau^*$, dalla definizione della f segue banalmente che si ha:

$$f^{-1}(H) = \begin{cases} X & \text{se } p \in H \\ \emptyset & \text{se } p \notin H \end{cases} \quad (409)$$

Dal momento che sia X sia $\emptyset$ sono insiemi aperti di τ (qualunque essa sia) e sono controimmagini di un insieme aperto H di τ^* si ha che la funzione f è continua.

Nota

Si è usata la definizione di continuità che afferma che una funzione f fra due spazi topologici X e Y è continua sse l'immagine inversa di ogni insieme aperto nella topologia su Y è un insieme aperto nella topologia su X .

Esempio A.31 Sulla base dell'esercizio precedente si vede facilmente come la funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (410)$$

se su Y si ha la topologia indiscreta $\tau_I = \{\emptyset, Y\}$ sia continua quale che sia la topologia τ che si ha su X .

Si deve dimostrare, infatti, che l'immagine inversa di ogni sottoinsieme aperto di Y in τ_I è un sottoinsieme aperto di X in τ ma gli unici insiemi contenuti in τ_I sono Y e $\emptyset$ per i quali si ha:

1. $f^{-1}(Y) = X$
2. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

che appartengono ad una qualunque topologia τ (per definizione di topologia). Segue immediatamente la continuità della f .

Esempio A.32 Supponiamo di avere una funzione fra due spazi topologici:

$$f : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2) \quad (411)$$

che non sia continua per le topologie τ_1 e τ_2 . Si dimostri che se si considerano le topologie:

1. su X τ_1^* più grossolana di τ_1 ovvero $\tau_1^* \subset \tau_1$;
2. su Y τ_2^* più fine di τ_2 ovvero $\tau_2 \subset \tau_2^*$

allora f continua a non essere continua rispetto alle nuove topologie.

La dimostrazione viene fatta partendo dal fatto che f non è continua se si considerano le topologie τ_1 e τ_2 per cui esiste un insieme aperto $G \in \tau_2$ tale che $f^{-1}(G) \notin \tau_1$ (la si ottiene negando la condizione di continuità per immagini inverse). Con le nuove topologie si sa che $\tau_1^ \subset \tau_1$ e $\tau_2 \subset \tau_2^*$ per cui:*

$$G \in \tau_2 \implies G \in \tau_2^* \quad (412)$$

$$f^{-1}(G) \notin \tau_1 \implies f^{-1}(G) \notin \tau_1^* \quad (413)$$

ovvero:

$$G \in \tau_2^* \implies f^{-1}(G) \notin \tau_1^* \quad (414)$$

per cui la f non è continua rispetto alle nuove topologie.

Nota

Si è sfruttato il fatto che se si ha $A \subset B$ e $x \in A$ allora $x \in B$ e se $x \notin B$ allora $x \notin A$.

Esempio A.33 *Sia data la funzione identità:*

$$id : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau^*) \quad (415)$$

Si dimostri che la funzione id è continua sse la topologia τ è più fine della topologia τ^ ovvero sse si ha $\tau^* \subset \tau$.*

Dalla definizione, la funzione id è continua sse:

$$G \in \tau^* \implies id^{-1}(G) \in \tau \quad (416)$$

ma $id^{-1}(G) = G$ per cui si ha la continuità sse:

$$G \in \tau^* \implies G \in \tau \quad (417)$$

ovvero sse:

$$\tau^* \subset \tau \quad (418)$$

da cui la tesi.

Nota

Si noti che data la funzione id la id^{-1} è anch'essa una funzione identità.

Nota A.26 *Data la funzione:*

$$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^*) \quad (419)$$

fra due spazi topologici e una sottobase $\mathcal{S}$ della topologia τ^ su Y si ha che la f è continua sse l'inverso di ogni elemento di $\mathcal{S}$ è un insieme aperto di τ ovvero sse comunque si prende $S \in \mathcal{S}$ si ha $f^{-1}(S) \in \tau$.*

Esempio A.34 Sia X uno spazio topologico e sia f una funzione:

$$f : X \longrightarrow [0, 1] \quad (420)$$

Si dimostri che se $f^{-1}((a, 1])$ e $f^{-1}([0, b))$ (per ogni $0 < a, b < 1$) sono sottoinsiemi aperti di X allora f è continua.

Si ricorda che:

$$1. (a, 1]$$

$$2. [0, b)$$

sono una sottobase $\mathcal{S}$ dell'intervallo unitario $I = [0, 1]$ per cui, per quanto osservato nella Nota A.26, si ha che la funzione f è continua.

Esercizio A.22 Si abbiano le funzioni continue:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (421)$$

$$g : Y \longrightarrow Z \quad (422)$$

Si dimostri che la funzione composta:

$$g \cdot f : X \longrightarrow Z \quad (423)$$

è una funzione continua.

Soluzione

Si considera l'insieme $G \in Z$. Essendo la g continua si ha che $g^{-1}(G)$ è un insieme aperto di Y per cui, sfruttando ora la continuità della f , si ha che $f^{-1}(g^{-1}(G))$ è un insieme aperto di X da cui la continuità della funzione composta dal momento che si ha:

$$(g \cdot f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G)) \quad (424)$$

Nota

Di nuovo si sfrutta la definizione di continuità per immagini inverse di insiemi aperti.

Esempio A.35 Si abbia un insieme di topologie $\{\tau_i\}_i$ su un insieme X e una funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (425)$$

continua rispetto a ognuna delle τ_i . Si dimostri che la f è continua rispetto alla topologia $\tau = \cap_i \tau_i$.

Sia G un sottoinsieme aperto di Y . Essendo f continua si ha che $f^{-1}(G)$ appartiene a tutte le topologie su X ovvero a tutte le topologie τ_i e quindi anche alla loro intersezione da cui la tesi (ovvero la f è continua rispetto alla topologia τ).

Esercizio A.23 *Si dimostri che una funzione:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (426)$$

è continua sse l'immagine inversa di ogni sottoinsieme chiuso di Y è un insieme chiuso di X .

Soluzione

Si procede in due passi, come usuale in questi casi:

1. *f continua $\Rightarrow$ l'immagine inversa di ogni sottoinsieme chiuso di Y è un insieme chiuso di X ,*
2. *se l'immagine inversa di ogni sottoinsieme chiuso di Y è un insieme chiuso di $X \Rightarrow f$ continua.*

Vediamo il primo punto.

Sia f continua e sia F un sottoinsieme chiuso di Y . F^C è un sottoinsieme aperto di Y mentre $f^{-1}(F^C)$ è un sottoinsieme aperto di X (essendo f continua). Ma $f^{-1}(F^C) = (f^{-1}(F))^C$ per cui $f^{-1}(F)$ è un insieme chiuso.

Vediamo il secondo punto.

Si abbia F sottoinsieme chiuso in Y e per ipotesi sia $f^{-1}(F)$ chiuso in X . Si prenda ora G aperto in Y per cui G^C è un sottoinsieme chiuso in Y e quindi $f^{-1}(G^C) = (f^{-1}(G))^C$ è un sottoinsieme chiuso in X . In base a quanto visto si ha che $f^{-1}(G)$ è un sottoinsieme aperto in X da cui si ha la continuità della f in quanto l'immagine inversa di un insieme aperto risulta essere un insieme aperto.

Nota

Si ha una definizione di continuità duale a quella per insiemi aperti.

Esercizio A.24 *Data la funzione fra spazi topologici:*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (427)$$

e dato un sottoinsieme qualunque A di X si dimostri che f è continua sse si ha:

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad (428)$$

Soluzione

Si deve dimostrare che:

1. *f continua $\Rightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$,*
2. *$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f$ continua .*

Vediamo il primo punto.

Si sa che f è continua e in più (usando il fatto che un insieme è contenuto nella sua chiusura) che:

$$f(A) \subseteq \overline{f(A)} \quad (429)$$

per cui (usando la (429)):

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \quad (430)$$

L'insieme $\overline{f(A)}$ è chiuso per definizione per cui lo è $f^{-1}(\overline{f(A)})$ (dalla definizione di continuità per immagini inverse di insiemi chiusi). Dal momento che la chiusura di un insieme è il più piccolo insieme chiuso che lo contiene si ha:

$$A \subseteq \bar{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \quad (431)$$

per cui (applicando la f a tutti gli elementi della catena di disuguaglianze):

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} = f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \quad (432)$$

Vediamo il secondo punto.

Si suppone che sia $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ per ogni $A \subset X$. Sia ora F un sottoinsieme chiuso di Y tale che:

$$A = f^{-1}(F) \quad (433)$$

Si vuole dimostrare che anche A è chiuso (e quindi la f è continua dal momento che l'immagine inversa di un insieme chiuso qualunque è un insieme chiuso) ovvero che:

$$\bar{A} = A \quad (434)$$

(le due condizioni sono equivalenti). Dalle definizioni poste (e dal fatto che F è un insieme chiuso) si ha:

$$f(\bar{A}) = f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} = \bar{F} = F \quad (435)$$

ovvero, applicando la f^{-1} a tutti gli elementi della catena di disuguaglianze precedente:

$$\bar{A} \subseteq f^{-1}(F) = A \quad (436)$$

(l'ultima uguaglianza discende dalla definizione di A) per cui:

$$\bar{A} \subseteq A \quad (437)$$

Dalla definizione di chiusura (vedi la Nota) si ha:

$$A \subseteq \bar{A} \quad (438)$$

per cui si è dimostrato che $A = \bar{A}$ e quindi A è un insieme chiuso e perciò la f è continua.

Nota

Si è fatto uso della definizione di chiusura di un insieme e di proprietà generali delle funzioni continue e no. Per la chiusura di un insieme A si ha (fra l'altro):

1. $\bar{A} = A \cup D(A)$,
2. $\bar{A} = \bigcap_i F_i$ dove gli F_i sono insiemi chiusi che contengono A .

Esempio A.36 Data la funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (439)$$

e un punto $p \in X$ si vogliono le condizioni per le quali la f non è continua in p .

Dalla definizione (vedi la **Nota**) si ha che la f non è continua in $p \in X$ se esiste almeno un insieme aperto in Y cui appartiene $f(p)$ e la cui immagine inversa è un insieme aperto $G \subset X$ che non contiene p . Come definire tale insieme dipende dagli spazi topologici X e Y e dalla forma della f .

Nota

Si ricorda la definizione di continuità in un punto. La funzione $f : X \longrightarrow Y$ è continua in $p \in X$ sse l'immagine inversa $f^{-1}(H)$ di ogni insieme aperto $H \subset Y$ che contiene $f(p)$ è un insieme aperto $G \subset X$ che contiene p .

Esempio A.37 Si abbia il seguente insieme $X = \{a, b, c, d\}$ con la topologia:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\} \quad (440)$$

Se la $f : X \longrightarrow X$ è definita dalle seguenti coppie:

$$(a, b), (b, d), (c, b), (d, c) \quad (441)$$

si dimostri che:

1. f non è continua in c ,
2. f è continua in d .

Vediamo il primo punto. In questo caso si vuole dimostrare la non continuità per cui si cerca un insieme che crei dei problemi.

Si ha $f(c) = b \in \{a, b\}$ con $\{a, b\} \subset X$ e $\{a, b\} \in \tau$. Si ha inoltre $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, c\}$. Da ciò discende la non continuità perchè non si ha

un insieme aperto nella topologia che contenga c e sia contenuto in $\{a, c\}$ (che non appartiene alla topologia).

Vediamo il secondo punto.

In questo caso $f(d) = c$. Il punto c è contenuto in X e in $\{b, c, d\}$ di τ e si ha:

1. $f^{-1}(X) = X$,
2. $f^{-1}(\{b, c, d\}) = X$

ovvero le immagini inverse di insiemi che contengono $f(d) = c$ sono insiemi aperti di τ su X che contengono d e quindi la f è continua.

Nota

Nel primo punto $\{a, b\}$ gioca il ruolo di H della nota precedente e $\{a, c\}$ gioca il ruolo di G . Per il secondo punto X gioca il ruolo di H mentre per G si hanno sia X sia $\{b, c, d\}$ ed entrambi contengono d .

Esempio A.38 Si abbia uno spazio topologico X per il quale i singoletti del tipo $\{p\}$ sono insiemi aperti. Si dimostri che comunque si prenda uno spazio topologico Y e una funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (442)$$

si ha che la f è continua in $p \in X$.

Si suppone di avere un qualunque insieme $H \subset Y$ tale che $f(p) \in H$. Per dimostrare la continuità della f si deve trovare un insieme aperto $G \subset X$ tale che:

1. $p \in G$,
2. $G = f^{-1}(H)$.

Dal momento che si ha $f(p) \in H$ per costruzione si ha anche $p \in f^{-1}(H)$. Se sfrutto il fatto che i singoletti sono insiemi aperti della topologia τ su X ho immediatamente che $\{p\} \subset f^{-1}(H)$. Se pongo $\{p\} = G$ i due punti suddetti sono banalmente soddisfatti per cui la f è continua in p .

Esercizio A.25 Si abbiano due spazi topologici X e Y . Data la funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (443)$$

si dimostri che f è continua sse è continua in ogni punto $p \in X$.

Soluzione

Si deve dimostrare che:

1. f continua $\Rightarrow f$ continua in ogni punto $p \in X$,
2. f continua in ogni punto $p \in X \Rightarrow f$ continua.

Vediamo il primo punto.

Se f è continua so che per ogni insieme aperto $H \subset Y$ si ha che $f^{-1}(H) \subset X$ è un insieme aperto. Se prendo $f(p) \in H$ ho che $p \in f^{-1}(H)$ per cui, dalla definizione di continuità in un punto, ho che la f è continua in ogni p (data l'arbitrarietà della scelta).

Vediamo il secondo punto.

So che f è continua in ogni $p \in X$ per cui prendo un insieme aperto $H \subset Y$ di cui considero l'immagine inversa $f^{-1}(H)$. Se riesco a dimostrare che tale immagine inversa è un insieme aperto ho dimostrato che la f è continua.

Considero $p \in f^{-1}(H)$ qualunque per il quale esiste un insieme aperto $G_p \subset X$ tale che:

$$p \in G_p \subset f^{-1}(H) \quad (444)$$

per cui posso scrivere:

$$f^{-1}(H) = \cup_{p \in f^{-1}(H)} G_p \quad (445)$$

ovvero $f^{-1}(H)$ è un insieme aperto perchè unione di un numero qualunque di insiemi aperti da cui la tesi.

Nota

Si ricorda che uno spazio topologico è la coppia formata da un insieme e da una topologia sull'insieme e che la topologia può essere specificata sia in termini di insiemi aperti sia in termini di insiemi chiusi.

Esercizio A.26 Si abbiano due spazi topologici X e Y . Data la funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (446)$$

si dimostri che se f è continua in $p \in X$ allora è continua in termini di successioni in p ovvero:

$$a_n \longrightarrow p \Rightarrow f(a_n) \longrightarrow f(p) \quad (447)$$

Soluzione

Si deve dimostrare (vedi la **Nota**) che ogni intorno N di $f(p)$ contiene quasi tutti i termini della successione $f(a_n)$. Si considera un intorno N di $f(p)$ (ovvero un insieme aperto che contiene tutti gli insiemi aperti che contengono $f(p)$). Per ipotesi la f è continua in p per cui $M = f^{-1}(N)$ è un intorno di p .

Se la successione a_n converge a p (per ipotesi) allora M contiene tutti i termini della successione a partire da un indice n_0 in poi. Se $a_n \in M$ allora $f(a_n) \in f(M) = f(f^{-1}(N)) = N$ per cui a partire dall'indice n_0 $f(a_n) \in N$ e la successione converge a $f(p)$ da cui la tesi (ovvero la f è continua in termini di successioni in p).

Nota

Si ricorda la definizione di continuità per successioni. Una funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (448)$$

si dice continua per successioni in p sse per ogni successione $\{a_n\}$ in X che converge a p in X la successione $\{f(a_n)\}$ in Y converge a $f(p)$ in Y . Una successione $\{a_n\}$ converge ad un punto se ogni insieme aperto contenente il punto contiene tutti i termini della successione a partire da un indice n_0 in poi.

Esempio A.39 Si danno alcuni esempi di funzioni:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (449)$$

1. $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: la f è continua dato che:

$$(a) \quad f^{-1}(1) = \mathbb{R}$$

$$(b) \quad f^{-1}(k) = \emptyset \text{ se } k \neq 1$$

Dato che i singoletti sono insiemi chiusi in $\mathbb{R}$ e dato che comunque si prenda $A \subset \mathbb{R}$ si ha $f(A) = \{1\}$ la f è una funzione chiusa. Con argomenti simili si dimostra che non è aperta.

2. $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: considero un insieme aperto $A = (-1, 1)$ e ne calcolo l'immagine che è $f(A) = [0, 1)$ che non è un insieme aperto (il punto 0 non è interno) per cui f non è una funzione aperta. Dato che se prendo $[a, b]$ qualunque la sua immagine è un insieme chiuso ho che la f è una funzione chiusa.

3. dati due intervalli in $\mathbb{R}$, $I = [0, 1]$ e $A = [a, b]$ poichè la funzione:

$$f : I \longrightarrow A \quad (450)$$

definita come:

$$f(x) = (b - a)x + a \quad (451)$$

è bigettiva e continua con la sua inversa si ha che tali intervalli sono omeomorfi.

Nota

Si richiamano alcune definizioni:

1. Una funzione continua è tale che l'immagine inversa di un insieme aperto sia un insieme aperto e l'immagine inversa di un insieme chiuso sia un insieme chiuso;
2. una funzione si dice **aperta** se l'immagine di ogni insieme aperto è un insieme aperto;
3. una funzione si dice **chiusa** se l'immagine di ogni insieme chiuso è un insieme chiuso;
4. due spazi topologici X e Y sono detti omeomorfi se esiste una funzione bigettiva f fra i due e se sia f sia la sua inversa f^{-1} sono funzioni continue.

Esercizio A.27 Dato un intervallo qualunque $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ si dimostri che è connesso come sottospazio di $\mathbb{R}$.

Soluzione

Si esegue una dimostrazione per assurdo ovvero si suppone che A sia sconnesso per cui (vedi la **Nota**) esistono due insiemi aperti disgiunti G ed H in $\mathbb{R}$ tali che $A = G \cup H$. Da tali premesse si ha:

1. $A \cap G \neq \emptyset$,
2. $A \cap H \neq \emptyset$.

tali che $(A \cap G) \cup (A \cap H) = A$. Si definisce ora una funzione:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad (452)$$

tale che:

1. $f(x) = 1$ se $x \in A \cap G$,
2. $f(x) = 0$ se $x \in A \cap H$.

La f così definita è continua dal momento che preso un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ si ha che la sua controimmagine può essere solo A o $\emptyset$ o $A \cap G$ o $A \cap H$ e comunque un insieme aperto. Dato che la f è continua si applica il teorema del valore intermedio per cui esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = 1/2$ ma ciò è impossibile (per come ho definito la f) per cui si ha una contraddizione: cade l'ipotesi fatta che A sia sconnesso e perciò si è dimostrato che è connesso.

Nota

Definizione di spazio topologico connesso. Uno spazio topologico X si dice **connesso** se non lo si può scrivere come l'unione di due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti ovvero se non si può scrivere $X = G \cup H$ con:

1. $G \neq \emptyset$,
2. $H \neq \emptyset$,
3. $G \cap H = \emptyset$.

Il teorema del valore intermedio (detto anche teorema di Weierstrass) dice che se si ha una funzione continua f su un intervallo chiuso $[a, b]$ la funzione assume tutti i valori compresi fra $f(a)$ e $f(b)$.

A.2.4 Spazi metrici e normati. Primo e secondo contabile

La sezione si chiude con due serie di esercizi ed esempi, entrambe molto brevi:

1. la prima relativa agli spazi metrici e agli spazi normati;
2. la seconda relativa ai concetti di primo e secondo contabile e di spazio separabile.

Si ricorda che una **metrica** è una funzione distanza definita su coppie ordinate di elementi di uno spazio topologico X ed è caratterizzata da un certo numero di assiomi. Dopo aver introdotto il concetto di funzione distanza si può parlare:

1. di distanza fra un punto e un insieme non vuoto,
2. di distanza fra due insiemi non vuoti,
3. di diametro di un insieme non vuoto,
4. di sfere aperte,
5. di topologie metriche e di spazi metrici con le relative proprietà,
6. di equivalenza fra metriche,
7. di convergenza e continuità in spazi metrici,
8. di spazi normati,

e di altri concetti per i quali si rimanda sia alla parte delle lezioni (o alla sezione A.3) sia ai testi citati nei *Riferimenti bibliografici*, con particolare riferimento a [Lip65].

In merito alla **proprietà di contabilità** si hanno due assiomi che permettono di definire uno spazio topologico X :

1. come primo contabile,
2. come secondo contabile

mentre uno spazio topologico X è detto essere separabile se contiene un sottoinsieme denso e contabile ovvero X è separabile sse contiene un sottoinsieme A tale che $\bar{A} = X$. Si può dimostrare che ogni spazio topologico secondo contabile è separabile. Si hanno, infatti, le seguenti implicazioni (X è uno spazio topologico):

1. X secondo contabile $\Rightarrow X$ primo contabile;
2. X secondo contabile $\Rightarrow X$ separabile.

Esercizio A.28 *Si dimostri che la cosiddetta metrica banale su un insieme X è una metrica ovvero che (dati a e b in X) la funzione:*

$$d(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \neq b \\ 0 & \text{se } a = b \end{cases} \quad (453)$$

soddisfa gli assiomi che definiscono una metrica (vedi la Nota).

Soluzione

La dimostrazione viene fatta verificando che, applicando la definizione, nessuno degli assiomi risulta violato.

Considero $a, b, c \in X$, dalla definizione di metrica banale ho:

1. $d(a, b) = 1$ o $d(a, b) = 0$ per cui $d(a, b) \geq 0$, inoltre $d(a, a) = 0$ e quindi il primo assioma è soddisfatto;
2. se ora $a \neq b$ si ha $d(a, b) = 1 = d(b, a)$, se, invece, si ha $a = b$ si ha $d(a, b) = 0 = d(b, a)$ e quindi anche il secondo assioma è soddisfatto;
3. supponiamo di avere a, b, c distinti in modo che sia $d(a, b) = 1$, $d(a, c) = 1$ e $d(b, c) = 1$ si ha

$$d(a, c) = 1 \leq 1 + 1 = d(a, b) + d(b, c) \quad (454)$$

e anche il terzo assioma è soddisfatto;

4. se ora $a \neq b$ si ha $d(a, b) = 1$ per cui $d(a, b) > 0$ e anche il quarto assioma è soddisfatto.

Nota

Una metrica è caratterizzata dai seguenti assiomi (d indica la funzione distanza e $a, b, c \in X$):

1. $d(a, b) \geq 0$ e $d(a, a) = 0$,
2. $d(a, b) = d(b, a)$,
3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$,
4. se $a \neq b$ allora $d(a, b) > 0$.

Si noti che tale insieme non è un insieme minimale di assiomi, dato che alcuni sono ridondanti, ma la cosa non interessa in questo contesto.

Esempio A.40 Si abbiano $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ tali che $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ e si dimostri che la sfera aperta di centro p e raggio δ_1 ($S(p, \delta_1)$) è un sottoinsieme della sfera aperta di centro p e raggio δ_2 .

Si deve dimostrare una inclusione fra insiemi per cui si prende un punto nel primo insieme e si dimostra che appartiene anche al secondo. Se $x \in S(p, \delta_1)$ allora $d(x, p) < \delta_1 \leq \delta_2$ (per definizione) per cui $x \in S(p, \delta_2)$ da cui la tesi.

Nota

Una sfera aperta di centro il punto p e raggio δ ($S(p, \delta)$) è l'insieme dei punti che distano da p per meno di δ .

Esempio A.41 Date due sfere aperte S e T aventi lo stesso centro si dimostri che una è sottoinsieme dell'altra.

Sia p il centro comune e siano le sfere:

1. $S = S(p, \delta_1)$,
2. $T = T(p, \delta_2)$.

Essendo δ_1 e δ_2 elementi di $\mathbb{R}$ sono possibili solo i due casi seguenti:

1. $\delta_1 \leq \delta_2$
2. $\delta_2 \leq \delta_1$

Nel primo caso si ha $S \subseteq T$ mentre nel secondo caso si ha $T \subseteq S$ da cui la tesi.

Esercizio A.29 *Sia X uno spazio metrico e sia $\mathcal{D}_p$ la classe delle sfere aperte di centro il punto $p \in X$. Si dimostri che $\mathcal{D}_p$ è una base per X .*

Soluzione

Sia G un sottoinsieme aperto di X tale che $p \in G$. Dal momento che le sfere aperte in X formano una base per la topologia metrica esiste una sfera aperta S tale che $p \in S \subset G$ in più esiste una sfera aperta $S_p \in \mathcal{D}_p$ (con centro in p) tale che $p \in S_p \subseteq S \subseteq G$ per cui $\mathcal{D}_p$ è una base locale in p .

Nota

Dato un insieme non vuoto X con una metrica d la topologia τ su X generata dalla classe delle sfere aperte su X si dice **topologia metrica** e l'insieme X con la topologia τ è detto **spazio metrico** ed è indicato come (X, d) .

Nella dimostrazione si è usato un lemma che viene riportato qui di seguito.

Lemma

Sia S una sfera aperta di centro p e raggio δ allora per ogni punto $q \in S$ esiste una sfera aperta T con centro in q e tutta contenuta in S . Usando diagrammi tipo quelli di Venn è facile visualizzare la cosa.

Esempio A.42 *Dato uno spazio metrico X e un punto $p \in X$. Si definisca la classe numerabile delle sfere di centro p e raggio $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathcal{Z} = \{S(p, 1/n) : n \in \mathbb{N}\} \quad (455)$$

Si dimostri che $\mathcal{Z}$ è una base locale in p .

Supponiamo di avere un insieme aperto $G \subset X$ tale che $p \in G_p$. Dall'esempio precedente segue che si ha una sfera aperta $S(p, \delta)$ tale che $p \in S(p, \delta) \subset G$. Dal momento che si ha $\delta > 0$ esiste un valore n_0 tale che:

$$\frac{1}{n_0} < \delta \quad (456)$$

in modo che sia:

$$p \in S(p, 1/n_0) \subset S(p, \delta) \quad (457)$$

con $S(p, 1/n_0) \in \mathcal{Z}$ per cui $\mathcal{Z}$ è una base in p (vedi anche l'esempio precedente e la **Nota**).

Nota

Dato uno spazio topologico X e un punto qualunque p , una classe di insiemi aperti che contengono p si dice **base locale in p** sse per ogni insieme aperto G che contiene p esiste un elemento G_p della classe tale che $p \in G_p \subset G$.

Esempio A.43 *Dato uno spazio metrico X e un suo sottoinsieme A si dimostri che la chiusura $\bar{A}$ di tale insieme è l'insieme dei punti la cui distanza*

dall'insieme A è nulla.

Si deve dimostrare che si ha:

$$\bar{A} = \{x : d(x, A) = 0\} \quad (458)$$

(vedi la **Nota**) per cui si deve dimostrare una doppia inclusione ovvero:

1. $\bar{A} \subset \{x : d(x, A) = 0\}$,
2. $\bar{A} \supset \{x : d(x, A) = 0\}$.

Vediamo il primo punto.

Si nega la tesi per cui si suppone di avere un punto p tale che $d(p, A) = \varepsilon > 0$. In questo modo esiste una sfera aperta $S(p, \varepsilon/2)$ che non contiene punti di A per cui $p \in A^C$ e, in più, p non può essere punto di accumulazione per A (perchè se lo fosse non potrei trovare una tale sfera) ovvero $p \notin \bar{A}$. Si è dimostrato che se $d(p, A) = \varepsilon > 0$ allora $p \notin \bar{A}$ per cui se $p \in \bar{A}$ allora $d(p, A) = 0$ da cui $\bar{A} \subset \{x : d(x, A) = 0\}$.

Vediamo il secondo punto.

Sia $p \in \{x : d(x, A) = 0\}$ per cui $d(p, A) = 0$. Ogni sfera aperta con centro p e raggio $\delta > 0$ contiene almeno un altro punto di A e lo stesso vale per ogni insieme aperto che contiene p . Da ciò discende che o $p \in A$ oppure p è un punto di accumulazione per A per cui $p \in \bar{A}$.

Nota

Si richiamano due definizioni di distanza:

1. la distanza da un punto $p \in X$ a un insieme non vuoto $A \subset X$ è definita da $d(p, A) = \inf\{d(p, a) : a \in A\}$;
2. la distanza fra due insiemi non vuoti A e B di X è definita da $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Si ricorda che:

$$\bar{A} = A \cup D(A) \quad (459)$$

Si ricorda, infine, che, dati due insiemi A e B , per dimostrare che $A \subset B$ si dimostra che se $a \in A$ allora $a \in B$.

Esempio A.44 Supponiamo di avere uno spazio topologico X su cui sono definite due metriche d ed e tali che: per ogni sfera aperta, nella metrica d , S_d con centro in $p \in X$ esiste una sfera aperta, nella metrica e , S_e di nuovo con centro in $p \in X$ tale che $S_e \subseteq S_d$. Si dimostri che si ha:

$$\tau_d \subset \tau_e \quad (460)$$

Dato che si deve dimostrare una inclusione fra insiemi si procede in modo “classico” prendendo un elemento del primo insieme e dimostrando che questo appartiene anche al secondo.

Si consideri un insieme aperto $G \in \tau_d$, lo scopo è dimostrare che $G \in \tau_e$. Supponiamo di prendere un punto generico $p \in G$. Dal momento che G è aperto in d esiste una sfera aperta S_d con centro in p tale che $p \in S_d \subset G$. Per ipotesi so che comunque prendo S_d esiste S_e (sfera aperta in e) tale che $S_e \subseteq S_d$ (tutte le sfere hanno centro in p). In questo modo ho:

$$p \in S_e(p) \subset S_d \subset G \quad (461)$$

Da tale catena di appartenenze e inclusioni segue che $G = \cup_{p \in G} S_e(p)$ per cui G è l'unione di sfere aperte in e ovvero è un insieme aperto di e da cui la tesi.

Nota

Date due topologie τ_1 e τ_2 su $X \neq \emptyset$ se ogni sottoinsieme aperto di X nella topologia τ_1 è un sottoinsieme aperto di X nella topologia τ_2 (ovvero $\tau_1 \subset \tau_2$) si dice che la topologia τ_1 è più grossolana o più piccola di τ_2 . In modo simmetrico si dice che τ_2 è più fine o più grande di τ_1 .

Esercizio A.30 *Dato uno spazio topologico primo contabile (X, τ) si dimostri che ogni suo sottospazio (Y, τ_Y) (in cui $Y \subset X$) è primo contabile.*

Soluzione

Si considera un punto $p \in Y$. Per ipotesi, dato che $Y \subset X$, si ha $p \in X$. Si sfrutta il fatto che (X, τ) è primo contabile. In base a tale ipotesi esiste una base contabile della topologia τ ovvero esiste la classe $\mathcal{B}_p = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ di insiemi aperti che contengono p . Dal momento che $Y \cap B_n$ sono insiemi contenuti in Y e ne rappresentano una base locale in p per la topologia τ_Y e dal momento che la classe $\mathcal{B}^ = \{Y \cap B_n : n \in \mathbb{N}\}$ è contabile si ha che vale la proprietà richiamata nella **Nota** da cui la tesi.*

Nota

Uno spazio topologico (X, τ) è detto essere primo contabile se soddisfa il primo assioma di contabilità ovvero se per ogni punto $p \in X$ esiste una classe contabile $\mathcal{B}_p$ di insiemi aperti che contengono p tale che ogni insieme aperto G che contiene p contiene anche membri di $\mathcal{B}_p$.

Esercizio A.31 *Supponiamo di avere uno spazio topologico (X, τ) , un punto $p \in X$ e una base locale nel punto $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, \dots\}$ in cui G_i sono insiemi aperti della topologia. Si dimostri che:*

1. *esiste una base locale annidata in p ;*

2. se l'insieme X soddisfa il primo assioma di contabilità (vedi la Nota all'esercizio precedente) allora esiste una base locale annidata in ogni punto $p \in X$.

Soluzione

Dovendo dimostrare due proprietà si procede in due passi. Vediamo il punto 1.

Supponiamo di porre, in successione:

1. $B_1 = G_1$,
2. $B_2 = G_1 \cap G_2$,
3. $B_n = G_1 \cap G_2 \cdots \cap G_n \dots$,

In questo modo si ha:

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \quad (462)$$

e, in più, ogni insieme aperto B_k contiene il punto p dal momento che $p \in G_i \forall i$. Da ciò discende che se G è un insieme aperto che contiene il punto p allora esiste un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$B_{n_0} \subset G_{n_0} \subset G \quad (463)$$

per cui la base $\{B_1, B_2, \dots\}$ è una base locale annidata in p .

Vediamo il punto 2.

Se X soddisfa il primo assioma di contabilità e si ha un punto $p \in X$ allora esiste una base locale contabile in p e, dal punto precedente, esiste una base locale annidata in p .

Nota

Si richiama la definizione di **base locale**.

Siano dati uno spazio topologico (X, τ) e un punto qualunque $p \in X$. Una classe di insiemi aperti $\mathcal{B}_p$ che contengono il punto p si dice essere una **base locale** in p sse per ogni insieme aperto che contiene p esiste un elemento della base ovvero esiste $B_p \in \mathcal{B}_p$ tale che vale la seguente proprietà:

$$p \in B_p \subset G \quad (464)$$

Si richiama la definizione di **base annidata locale**.

Una base si dice **annidata** se:

1. gli elementi della base $\mathcal{B}_p$ possono essere indicati con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ovvero si ha:

$$\mathcal{B}_p = \{B_i : i \in I : I \subset \mathbb{N}\} \quad (465)$$

2. i sottoinsiemi di $\mathcal{B}_p$ sono totalmente ordinati per inclusione in modo che sia:

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \dots \quad (466)$$

Esempio A.45 Dato uno spazio topologico (X, τ) e un punto $p \in X$, si consideri una base annidata locale in p $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \dots\}$. Se si ha la successione:

$$\{a_i\}_{i \in I} \quad (467)$$

($I \subset \mathbb{N}$ insieme qualunque di indici) tale che:

$$a_i \in B_i \quad \forall i \in I \quad (468)$$

si dimostri che tale successione converge a p .

Si prende un insieme aperto G tale che $p \in G$. Dal momento che $\mathcal{B}$ è una base locale annidata in p si ha che esiste un indice $n_0 \in I$ tale che $B_{n_0} \subset G$. Dal momento che la base è annidata si ha che gli insiemi di indice $n > n_0$ sono contenuti uno nel successivo e tutti in G . Dato che si ha $a_n \in B_n \subset B_{n_0} \subset G$ si ha che:

$$a_n \longrightarrow p \quad (469)$$

da cui la tesi.

Nota

Si ricorda che gli insiemi B_i di una base annidata locale sono totalmente ordinati per inclusione (ovvero si ha $B_1 \supset B_2 \supset \dots$) e tutti hanno come centro il punto p .

Esempio A.46 Si dimostri che il piano $\mathbb{R}^2$ con la topologia usuale soddisfa il secondo assioma di contabilità.

Si considera la base $\mathcal{B}$ delle sfere aperte in $\mathbb{R}^2$ che hanno:

1. il raggio $\delta \in \mathbb{Q}$,

2. il centro $p \in \mathbb{Q}^2$

Si ha che $\mathcal{B}$ è un insieme contabile ed è una base per la topologia usuale su $\mathbb{R}^2$ ovvero $\mathbb{R}^2$ è uno spazio secondo contabile (vedi la **Nota** qui di seguito).

Nota

Si richiamano alcune definizioni.

Dato uno spazio topologico (X, τ) lo si dice **secondo contabile** se soddisfa il seguente assioma (detto **secondo assioma di contabilità**): uno spazio topologico (X, τ) è secondo contabile se esiste una base contabile $\mathcal{B}$ per la topologia τ su X .

Nel caso del piano $\mathbb{R}^2$ la **topologia usuale** è data dall'insieme di tutti gli insiemi aperti nel piano. Come insiemi aperti di solito si considerano le sfere aperte di centro $p \in \mathbb{R}^2$ e raggio $\delta > 0$.

Esempio A.47 Dato uno spazio topologico (X, τ) secondo contabile si dimostri che ogni suo sottospazio è secondo contabile.

Dato lo spazio X secondo contabile se ne consideri la base contabile $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sia ora Y un sottospazio di X . Sappiamo che:

$$\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (470)$$

è una base per Y ed è contabile per costruzione da cui la tesi (dal momento che la base trovata per Y soddisfa il secondo assioma di contabilità).

Esempio A.48 Dato un insieme qualunque X si definisca su di esso la topologia **cofinita**. Si dimostri che lo spazio topologico (X, τ) è separabile ovvero contiene un sottoinsieme contabile e denso.

Si hanno due casi:

1. X contabile;
2. X non contabile.

Nel primo caso X è un sottoinsieme della topologia su X , contabile e denso ovvero soddisfa la definizione (vedi la **Nota**) per cui si ha la tesi.

Nel secondo caso X contiene un sottoinsieme contabile non finito A (ovvero A è numerabile). Siccome la topologia τ contiene insiemi finiti e X si ha che deve essere $\bar{A} = X$. Si è posto A contabile da cui la tesi.

Nota

Si richiamano alcune definizioni:

1. dato un insieme X la classe che contiene $\emptyset$ e i sottoinsiemi di X i cui complementi sono insiemi finiti forma una topologia su X che viene detta **topologia cofinita** o **topologia** T_1 ;
2. un insieme $A \subset X$ si dice **denso** in X sse la sua chiusura coincide con X ovvero sse $\bar{A} = X$;
3. uno spazio topologico X si dice **separabile** se soddisfa il seguente assioma: X è separabile se contiene un sottoinsieme contabile denso;
4. un insieme X si dice **numerabile** sse è equivalente a $\mathbb{N}$ (ovvero se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$);
5. un insieme X è detto contabile sse

- (a) è finito (ovvero contiene un numero finito di elementi);
- (b) è denumerabile.

Esempio A.49 Dato uno spazio topologico (X, τ) , dove τ è la topologia **discreta**, si dimostri che X è separabile sse X è contabile. Si deve dimostrare una equivalenza fra i due concetti di **separabilità** e di **contabilità**. Dalla definizione data nella **Nota** segue che il solo sottoinsieme denso di X è X stesso per cui X contiene un sottoinsieme denso contabile sse è contabile ovvero X è separabile (e perchè lo sia deve contenere un sottoinsieme denso contabile) sse X è contabile.

Nota

Una topologia τ su X si dice **discreta** se contiene come suoi elementi tutti i possibili sottoinsiemi di X . In una topologia discreta tutti i sottoinsiemi sono allo stesso tempo aperti (perchè appartengono alla topologia) e chiusi (perchè sono il complemento di un insieme della topologia).

A.3 Richiami di topologia degli insiemi, da [ST80]

Per prima cosa si introduce il concetto di **spazio metrico** come composto da un insieme S e da una funzione:

$$\rho : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad (471)$$

definita in modo che, comunque considero $s_1, s_2, s_3 \in S$, sia:

1. $\rho(s_1, s_2) \geq 0$ e $\rho(s_1, s_2) = 0$ sse $s_1 = s_2$,
2. $\rho(s_1, s_2) = \rho(s_2, s_1)$
3. $\rho(s_1, s_3) \leq \rho(s_1, s_2) + \rho(s_2, s_3)$

La terza proprietà è nota come **diseguaglianza triangolare**, la seconda definisce la ρ come simmetrica. La funzione ρ si dice **distanza** e definisce una metrica su S in modo che S più la metrica sia uno **spazio metrico**⁵.

La funzione distanza ρ consente di definire insiemi di punti di S detti sfere di centro un punto $s_0 \in S$ e raggio un numero reale a denotati con $B_{s_0}(a)$. Si ha:

$$B_{s_0}(a) = \{s \in S \mid \rho(s, s_0) < a\} \quad (472)$$

che hanno un ruolo rilevante nelle varie topologie definite su S .

⁵A rigore si tratta di una **palla aperta** (vedi la Definizione A.3). Si fa notare che la presente definizione entra in conflitto con quelle date nella Definizione A.3, conflitto separabile limitato dal fatto che il contenuto della presente sezione si basa sulla definizione data nella equazione (472).

Esempio A.50 (Caso $S = \mathbb{R}^2$) Se $S = \mathbb{R}^2$ si possono definire le seguenti metriche (con $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$ punti di S):

1. $\rho_1(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
2. $\rho_2(p_1, p_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$
3. $\rho_3(p_1, p_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

Le sfere $B_{s_0}(a)$ definite mediante tali funzioni distanza sono illustrate in figura 8 nel caso in cui sia:

1. $s_0 = (0, 0)$
2. $a = 1$.

Nota A.27 Le metriche definite nell'esempio A.50 danno all'insieme $S = \mathbb{R}^2$ tre diverse strutture come spazio metrico sebbene per certe proprietà le tre metriche siano equivalenti. Si raccolgono, pertanto, le proprietà essenziali di uno spazio metrico in modo da definire una struttura più astratta nota come **struttura topologica**.

Definizione A.35 (Spazio topologico) Uno **spazio topologico** è composto da:

1. un insieme S ,
2. una famiglia $\mathcal{U}$ (denotata di solito come τ) di sottoinsiemi di S ovvero un sottoinsieme di 2^S che soddisfa le seguenti proprietà:
 - (a) $\emptyset$ e S sono elementi di $\mathcal{U}$;
 - (b) $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}$ se $U_i \in \mathcal{U}$ per $i = 1, \dots, n$;
 - (c) $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}$ se $U_i \in \mathcal{U}$ per $i \in I$, $I \subset \mathbb{N}$ insieme arbitrario di indici.

Gli insiemi contenuti in $\mathcal{U}$ sono gli **insiemi aperti** dello spazio topologico S .

Definizione A.36 (Insiemi chiusi) Dato uno spazio topologico $(S, \mathcal{U})$ un insieme $A \subset S$ si dice **chiuso** se è il complemento di un insieme aperto ovvero se il suo complemento è un insieme aperto ovvero se $A^C \in \mathcal{U}$.

Nota A.28 Si passa dalla definizione di spazio topologico con insiemi aperti $(S, \mathcal{U})$ alla definizione del concetto di insieme chiuso alla caratterizzazione di uno spazio topologico mediante insiemi chiusi usando i complementi delle condizioni stabilite nella Definizione A.35.

Definizione A.37 (Spazio topologico con insiemi chiusi) *In analogia a quanto fatto nella Definizione A.35 si può asserire che la famiglia degli insiemi chiusi $\mathcal{C}$ soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $\emptyset$ e S sono elementi di $\mathcal{C}$;
2. $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}$ se $A_i \in \mathcal{C}$ per $i = 1, \dots, n$;
3. $\cap_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}$ se $A_i \in \mathcal{C}$ per $i \in I$, $I \subset \mathbb{N}$ insieme arbitrario di indici.

Nota A.29 *Dato che con operazioni di complementazione si può passare dalle condizioni della Definizione A.35 a quelle della Definizione A.37 e viceversa si ha che una topologia può essere descritta sia mediante una famiglia di insiemi aperti sia mediante la corrispondente famiglia di insiemi chiusi.*

Dato uno spazio topologico $(S, \mathcal{U})$ e un insieme $A \subset S$ si danno le seguenti definizioni.

1. Un punto $s \in S$ si dice di **accumulazione** per A se comunque si prende un insieme $U \in \mathcal{U}$ con $s \in U$ vale la seguente condizione:

$$(U \setminus \{s\}) \cap A \neq \emptyset \quad (473)$$

ovvero un qualunque insieme che contiene s contiene punti di A distinti da s .

2. Dato un insieme $A \subset S$ l'insieme dei punti di accumulazione per A lo si dice **derivato di A** e lo si indica con $D(A)$.
3. Dato un insieme $A \subset S$ si definisce **chiusura** di A e la si indica con $\bar{A}$ l'insieme

$$\bar{A} = A \cup D(A) \quad (474)$$

dove

$$D(A) = \{s \in S : s \text{ punto di accumulazione per } A\} \quad (475)$$

Da tali definizioni discendono i seguenti Teoremi.

Nota A.30 *Vediamo, prima, che relazione ci può essere fra le operazioni di chiusura e complementazione. Dato un insieme A si i due casi seguenti.*

1. A chiuso per cui, vedi il Teorema A.11, $\bar{A} = A$ e quindi:

$$(a) \quad (\bar{A})^C = A^C \text{ è un insieme aperto;}$$

(b) $\overline{(A^C)}$ è un insieme chiuso.

Si ha che, se A è chiuso, $\overline{(A^C)} \neq (\bar{A})^C$. In modo simile si ha l'altro caso.

2. A aperto per cui:

(a) $(\bar{A})^C$ è un insieme aperto, essendo $\bar{A}$ un insieme chiuso;

(b) $\overline{(A^C)}$ è un insieme chiuso.

Di nuovo si ha che, se A è aperto, $\overline{(A^C)} \neq (\bar{A})^C$.

Teorema A.10 La chiusura $\bar{A}$ di un insieme $A \subset S$ è un insieme chiuso.

Dimostrazione

Senza fare nessuna ipotesi sull'insieme A si deve dimostrare che $\bar{A}^C = (\bar{A})^C$ è un insieme aperto. Per fare ciò si deve dimostrare che comunque prendo $s \in \bar{A}^C$ esiste un insieme aperto U_s tale che $s \in U_s \subset \bar{A}^C$. Se ciò accade tutti i punti di $\bar{A}^C$ sono interni per cui $\bar{A}^C$ è un insieme aperto (e quindi $\bar{A}$ è un insieme chiuso). Se comunque prendo $s \in U_s$ ho:

$$\bar{A}^C \subset \cup_{s \in \bar{A}^C} U_s \quad (476)$$

mentre:

$$U_s \subset \bar{A}^C \Rightarrow \cup_{s \in \bar{A}^C} U_s \subset \bar{A}^C \quad (477)$$

allora ho:

$$\cup_{s \in \bar{A}^C} U_s = \bar{A}^C \quad (478)$$

per cui $\bar{A}^C$ essendo unione di insiemi aperti è un insieme aperto.

Preso s qualunque tale che $s \in \bar{A}^C$ per definizione di chiusura e di complemento⁶ ho che s non è un punto di accumulazione per A per cui esiste un insieme aperto U_s tale che $s \in U_s$ ma:

$$(U_s \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset \quad (479)$$

(perchè se così non fosse s sarebbe un punto di accumulazione per A). Dato che $s \in \bar{A}^C$ ho che $s \notin \bar{A}$ e quindi $s \notin A$ per cui $U_s \cap A = \emptyset$. Dato che ogni s è contenuto in un aperto U_s tale che $U_s \cap A = \emptyset$ si ha che U_s non contiene alcun punto di accumulazione per A per cui

$$U_s \cap \bar{A} = \emptyset \quad (480)$$

e quindi $U_s \subset \bar{A}^C$.

⁶Se $s \in \bar{A}^C$ allora $s \notin \bar{A}$ e, dalla (474), ho sia $s \notin A$ sia $s \notin D(A)$.

Teorema A.11 *Un insieme $A \subset S$ è un insieme chiuso sse $A = \bar{A}$.*

Dimostrazione

Si ha una doppia implicazione espressa dalla A chiuso $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ per cui la dimostrazione avviene in due passi.

1) A chiuso $\Rightarrow A = \bar{A}$

Se A è chiuso allora A^C è un insieme aperto per cui se considero $s \notin A$ ho che $s \in A^C$ e quindi A^C è un insieme aperto che contiene s e tale che:

$$(A^C \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset \quad (481)$$

ovvero s non è un punto di accumulazione per A . Dalla genericità di s si ha che A^C non contiene punti di accumulazione per A per cui questi sono tutti in A ovvero $D(A) \subset A$ per cui dalla definizione di chiusura (474) si ha $\bar{A} = A$.

2) $A = \bar{A} \Rightarrow A$ chiuso

Se $A = \bar{A}$, per il teorema precedente, $\bar{A}$ risulta essere un insieme chiuso per cui lo è anche A .

Dato un insieme S con l'insieme dei suoi sottoinsiemi 2^S su cui è definita una topologia, si vuole definire il concetto di **base per la topologia** come quell'elemento $\mathcal{B} \in 2^S$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$,
2. $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = S$ ovvero posso creare S con gli elementi della base,
3. se B_1 e B_2 sono elementi della base $\mathcal{B}$ posso creare la loro intersezione con un sottoinsieme degli elementi di $\mathcal{B}$ ovvero posso scrivere

$$B_1 \cap B_2 = \cup_{B \in \tilde{\mathcal{B}}} B \quad (482)$$

dove $\tilde{\mathcal{B}}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{B}$.

Dalla definizione della base $\mathcal{B}$ per una topologia su S seguono i seguenti teoremi dei quali non si dà la dimostrazione (al proposito vedi [ST80] pagina 17 e seguenti).

Teorema A.12 *Sia S un insieme su cui è definita una topologia caratterizzata da una base $\mathcal{B}$. Se definisco*

$$\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{U \in 2^S : U = \cup_{B_i \in \tilde{\mathcal{B}}} B_i\} \quad (483)$$

si ha che $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ è la topologia su S generata da $\mathcal{B}$.

Teorema A.13 *Dato uno spazio metrico (S, ρ) se si definisce l'insieme delle sfere $B_s(a)$ di centro il punto $s \in S$ e raggio $a \in \mathbb{R}_+$ ovvero*

$$\mathcal{B} = \{B_s(a) \mid s \in S \text{ e } a \in \mathbb{R}_+\} \quad (484)$$

si ha che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su S .

Corollario A.6 *Uno spazio metrico (S, ρ) ha la struttura di uno spazio topologico i cui insiemi aperti sono unioni di un numero qualunque di sfere.*

Dal concetto di **base per una topologia** deriva il concetto di **equivalenza fra basi**. Al proposito si ha il seguente Teorema per la cui dimostrazione si rimanda a [ST80] pagina 19.

Teorema A.14 *Dato un insieme S e date due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ per una topologia su S si ha che tali basi sono equivalenti sse sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

1. *comunque prendo $s \in S$ e $B_1 \in \mathcal{B}_1$ purchè $s \in B_1$ esiste $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tale che $s \in B_2 \subset B_1$;*
2. *comunque prendo $s \in S$ e $B_2 \in \mathcal{B}_2$ purchè $s \in B_2$ esiste $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tale che $s \in B_1 \subset B_2$;*

Le condizioni del Teorema A.14 consentono di dimostrare l'equivalenza fra due basi con una doppia inclusione fra famiglie di insiemi.

Come Corollario di tale Teorema si ha che le metriche ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 definite nell'Esempio A.50 danno luogo alla stessa topologia sul piano $\mathbb{R}^2$. Tale Corollario non può essere esteso a metriche qualunque nello spazio o su $\mathbb{R}$ perchè è possibile concepire metriche che lo violano. Un esempio (da [ST80] pagina 19) è il seguente.

Esempio A.51 *Dato $\mathbb{R}$ e dati $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ si possono definire le seguenti metriche:*

1.

$$\rho_1(r_1, r_2) = |r_1 - r_2| \quad (485)$$

2.

$$\rho_2(r_1, r_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_1 = r_2 \\ 1 & \text{se } r_1 \neq r_2 \end{cases} \quad (486)$$

La metrica ρ_1 definisce una topologia su $\mathbb{R}$ i cui insiemi aperti sono gli insiemi aperti generati da intervalli aperti in $\mathbb{R}$. Infatti dalla $|r_1 - r_2| < \varepsilon$ si ha:

$$r_2 - \varepsilon < r_1 < r_2 + \varepsilon \quad (487)$$

La metrica ρ_2 , invece, definisce una topologia su $\mathbb{R}$ i cui insiemi aperti sono tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Usando ρ_2 posso, infatti, definire una sfera di centro il punto $r \in \mathbb{R}$ e raggio $1/2$ come

$$B_r(1/2) = \{q \in \mathbb{R} : \rho_2(q, r) < 1/2\} = \{r\} \quad (488)$$

$\forall r \in \mathbb{R}$ ovvero i punti di $\mathbb{R}$ sono insiemi aperti per cui sottoinsiemi qualunque di $\mathbb{R}$, in quanto unioni di punti (e quindi di insiemi aperti), sono insiemi aperti. Nel caso della ρ_2 gli elementi della base $\mathcal{B}_2$ sono i singoletti che non possono contenere intervalli aperti, come richiesto dal Teorema A.14.

Esempio A.52 Dato un insieme S se l'insieme degli insiemi aperti $\mathcal{U}$ di uno spazio topologico $(S, \mathcal{U})$ coincide con l'insieme dei sottoinsiemi di S ovvero se è:

$$\mathcal{U} = 2^S \quad (489)$$

si dice che S è caratterizzato dalla **topologia discreta**.

Teorema A.15 Dato uno spazio topologico $(S, \mathcal{U})$ si considera un insieme $A \subset S$. Si può definire una nuova topologia in cui gli insiemi aperti sono ottenuti come:

$$A \cap U \quad (490)$$

con $U \in \mathcal{U}$. In questo modo si definisce:

$$\mathcal{U}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{U}\} \quad (491)$$

come la **topologia relativa su A** .

[Dimostrazione]

La dimostrazione mira a verificare che per $\mathcal{U}_A$ sono soddisfatte le proprietà degli spazi topologici su insiemi aperti dato che $(S, \mathcal{U})$ è uno spazio topologico (su insiemi aperti) e perciò si ha:

1. $\emptyset \in \mathcal{U}$,
2. $S \in \mathcal{U}$,
3. se $U_i \in \mathcal{U}$ allora $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}$,

4. se $U_i \in \mathcal{U}$ allora $\cup_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \mathcal{U}$ dove $\mathcal{I}$ è un insieme qualunque di indici.

Dalla (491) e dalle condizioni su $\mathcal{U}$, si ha facilmente:

1. $A \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{U}_A$,
2. $A \cap S = A \in \mathcal{U}_A$,
3. $\cap_i (A \cap U_i) = A \cap (\cap_i U_i) \in \mathcal{U}_A$ dato che $\cap_i U_i \in \mathcal{U}$ se $U_i \in \mathcal{U}$,
4. $\cup_i (A \cap U_i) = A \cap (\cup_i U_i) \in \mathcal{U}_A$ dato che $\cup_i U_i \in \mathcal{U}$ se $U_i \in \mathcal{U}$

Ad esempio ([ST80]) se è:

$$U = (1, 3) \quad (492)$$

U è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$. Se considero $A = [2, 3]$ A è un intervallo chiuso in $\mathbb{R}$ ed in più si ha:

1. $A \cap U = [2, 3)$ è un insieme aperto in $\mathcal{U}_A$,
2. il suo complemento nella topologia relativa è l'insieme chiuso $\{3\}$ che è chiuso nella topologia su $\mathbb{R}$ in quanto posso vederlo come $\{3\} = (-\infty, 3] \cap [3, +\infty)$
3. $A \cap U = [2, 3)$ non è un insieme aperto in $\mathbb{R}$,
4. A è un insieme aperto in $\mathcal{U}_A$ perchè universo della topologia relativa.

Nota A.31 Si noti che nella definizione di topologia relativa (o indotta) l'insieme $A \subset S$ è un insieme qualunque e può essere sia aperto, sia chiuso ma anche nè aperto nè chiuso.

Teorema A.16 Sia $(S, \mathcal{U})$ uno spazio topologico e si prenda un sottoinsieme A di S . Si hanno due casi:

1. se A è un aperto in S allora ogni insieme aperto in A (ovvero nella topologia relativa su A) è un insieme aperto in S ;
2. se A è un chiuso in S allora ogni insieme chiuso in A (ovvero nella topologia relativa su A) è un insieme chiuso in S

Dimostrazione

Si esaminano separatamente i due casi ovvero A aperto in S e A chiuso in S .

1. Sia A un insieme aperto in S . Considero un insieme qualunque B aperto in A e so che esiste un qualche aperto U in S tale che $B = U \cap A$ per cui B è un insieme aperto in S dato che lo sono sia U sia A .
2. Sia A un insieme chiuso in S . Considero un insieme qualunque B chiuso in A per cui $A \setminus B$ (il suo complemento relativo) è un aperto in A . So che esiste un qualche aperto U in S tale che $A \setminus B = A \cap U$. Si ha quindi (dato che $B \subset A$):

$$B = A \setminus (A \setminus B) = A \setminus A \cap U = A \cap S \setminus A \cap U = A \cap (S \setminus U) = A \cap U^C \quad (493)$$

(si sfrutta il fatto che $A \subset S \Rightarrow A = A \cap S$). Siccome A e U^C sono insiemi chiusi in S (A per definizione e U^C perchè U è un insieme aperto) si ha che B è un insieme chiuso in S .

Si introducono a questo punto i concetti di:

1. **spazio connesso**,
2. **spazio compatto**.

Nota A.32 In quanto segue per indicare uno spazio topologico faremo uso sia della coppia $(S, \mathcal{U})$ sia, molto più spesso, del solo insieme S sottintendendo l'insieme $\mathcal{U}$.

Definizione A.38 Uno spazio topologico S si dice **connesso** se gli insiemi che sono allo stesso tempo **aperti** e **chiusi** sono soltanto

1. $\emptyset$,
2. S .

Teorema A.17 Uno spazio topologico S si dice **connesso** sse non lo posso scrivere come unione di due insiemi

1. *aperti*,
2. *non vuoti*,
3. *disgiunti*.

In modo formale si ha che S si dice **connesso** sse non esistono A_1 e A_2 aperti tali che:

1. $A_1 \neq \emptyset$,

2. $A_2 \neq \emptyset$,
3. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
4. $A_1 \cup A_2 = S$.

Dimostrazione

Essendo la condizione necessaria e sufficiente si fa la dimostrazione in due passi.

$\Rightarrow$

Per fare la dimostrazione si suppone S connesso e si nega la tesi ovvero si ipotizza che esistano gli insiemi A_1 e A_2 suddetti tali che:

1. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
2. $A_1 \cup A_2 = S$.

cioè A_1 e A_2 sono una partizione di S . Si ha quindi $A_1 = A_2^C$ per cui A_1 è simultaneamente aperto (per definizione) e chiuso (perchè coincide con il complemento di un aperto). Essendo S connesso per ipotesi, dalla definizione deve essere $A_1 = \emptyset$ oppure $A_1 = S$. Se $A_1 = S$ allora $A_2 = \emptyset$ mentre se $A_1 = \emptyset$ allora $A_2 = S$. In entrambi i casi o $A_1 = S$ o $A_2 = S$ mentre l'altro (rispettivamente A_2 o A_1) deve essere uguale a $\emptyset$ per cui gli insiemi ipotizzati A_1 e A_2 non esistono.

$\Leftarrow$

Suppongo che S non sia scrivibile come unione di due insiemi aperti, non vuoti, disgiunti e dimostro che S è connesso.

Considero un insieme $A \subset S$ e lo penso simultaneamente aperto e chiuso. Lo stesso vale per A^C in modo che sia $S = A \cup A^C$ ovvero S è l'unione di due insiemi aperti e disgiunti per cui, dall'ipotesi fatta (i due insiemi non possono essere entrambi non vuoti), si hanno due casi mutuamente esclusivi:

1. $A = \emptyset$ e $A^C = S$
2. $A = S$ e $A^C = \emptyset$

per cui gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi in S sono $\emptyset$ e S e quindi, dalla definizione, segue che S è connesso.

Nota A.33 *Dato uno spazio topologico S un suo sottoinsieme è **connesso** se lo è per la topologia relativa.*

Teorema A.18 *Si considera uno spazio topologico S e si prendono i seguenti sottoinsiemi connessi di S :*

1. T_0 ,
2. $\{T_w\}_{w \in W}$

Se $T_0 \cap T_w \neq \emptyset \forall w \in W$ allora l'insieme

$$T_0 \cup (\cup_{w \in W} T_w) \quad (494)$$

è connesso.

Dimostrazione

Definisco

$$T = T_0 \cup (\cup_{w \in W} T_w) \quad (495)$$

Per il momento non sfrutto il fatto che T è connesso per cui suppongo che esistano due insiemi non vuoti e disgiunti V_1 e V_2 in T tali che $T = V_1 \cup V_2$. Comunque scelgo $w \in W$ ho che:

1. $V_1 \cap T_w$ e $V_2 \cap T_w$ sono aperti (perchè intersezione di aperti) e disgiunti in T_w (infatti $(V_1 \cap T_w) \cap (V_2 \cap T_w) = (V_1 \cap V_2) \cap T_w = \emptyset \cap T_w = \emptyset$,
2. la loro unione è T_w (infatti $(V_1 \cap T_w) \cup (V_2 \cap T_w) = T_w \cap (V_1 \cup V_2) = T_w \cap T = T_w$)

ovvero V_1 e V_2 sono una partizione di T_w per ogni $w \in W$.

A questo punto sfrutto la connessività degli insiemi. Essendo T_w connesso ho che almeno uno dei due insiemi la cui unione mi dà T_w deve essere vuoto, in base alla definizione di insieme connesso, per cui si ha uno dei due casi seguenti:

1. $V_1 \cap T_w = \emptyset$,
2. $V_2 \cap T_w = \emptyset$.

Essendo anche T_0 connesso posso fare le stesse considerazioni per cui anche per T_0 ho:

1. $V_1 \cap T_0 = \emptyset$,
2. $V_2 \cap T_0 = \emptyset$.

Supponiamo sia $V_2 \cap T_0 = \emptyset$. Essendo l'unione di $V_1 \cap T_0$ e $V_2 \cap T_0$ uguale a T_0 ho:

$$V_1 \cap T_0 \cup \emptyset = T_0 \quad (496)$$

ovvero $T_0 \subset V_1$ (cioè T_0 è un sottoinsieme di V_1) e quindi, poichè per ogni $w \in W$ è $T_0 \cap T_w \neq \emptyset$, $V_1 \cap T_w \neq \emptyset$ per ogni $w \in W$.

Da ciò discende che:

$$V_2 \cap T_w = \emptyset \quad (497)$$

per ogni $w \in W$. In modo simile ho:

$$V_1 \cap T_w = T_w \quad (498)$$

ovvero $T_w \subset V_1$ per ogni $w \in W$. Si ha quindi:

$$V_1 = T_0 \cup (\cup_{w \in W} T_w) \quad (499)$$

$$V_2 = \emptyset \quad (500)$$

in modo che sia:

$$T = V_1 \cup V_2 = T_0 \cup (\cup_{w \in W} T_w) \quad (501)$$

connesso (in base alla definizione di insieme connesso).

Nota A.34 Il teorema precedente può essere usato per dimostrare che $\mathbb{R}^n$ è connesso sotto l'ipotesi che le rette in $\mathbb{R}^n$ sono insiemi connessi in modo che $\{T_w\}_{w \in W}$ sono gli insiemi connessi corrispondenti alle rette per l'origine. Se $T_0 = \{0\}$ e W è la sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ si ha:

$$\mathbb{R}^n = T_0 \cup (\cup_{w \in W} T_w) \quad (502)$$

che risulta connesso per il Teorema precedente.

Si danno alcune definizioni relative ai concetti di **ricoprimento** e di **spazio topologico compatto**. Nelle definizioni si ha che S può essere, in funzione del contesto, sia un insieme sia uno spazio topologico.

Definizione A.39 (Ricoprimento) Dato un insieme S una famiglia di insiemi $\mathcal{V} \subset 2^S$ è detta essere un **ricoprimento di S** se si può scrivere:

$$S = \cup_{v \in \mathcal{V}} V \quad (503)$$

Definizione A.40 (Ricoprimento aperto) Se S è uno spazio topologico e gli insiemi V nella $\cup_{v \in \mathcal{V}}$ sono insiemi aperti il ricoprimento $\mathcal{V}$ si dice **ricoprimento aperto** di S .

Definizione A.41 (Compattezza) Dato uno spazio topologico S lo si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ ha un **sottoricoprimento finito** ovvero se esiste un numero finito di insiemi $V_i \in \mathcal{V}$ con $i = 1, \dots, k$ tali che

$$S = \cup_{i=1}^k V_i \quad (504)$$

Esempio A.53 ([ST80]) Si hanno i seguenti esempi:

1. $\mathbb{R}^n$ non è compatto perchè non posso trovare un sottoricoprimento finito,
2. un intervallo aperto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ non è compatto per motivi analoghi,
3. se ho $[a, b] \subset \mathbb{R}$, invece, ho un insieme compatto ovvero **chiuso** e **limitato**.

Definizione A.42 (Proprietà dell'intersezione finita) Uno spazio gode della proprietà dell'**intersezione finita** se ogni famiglia di $\mathcal{F}$ di insiemi chiusi è caratterizzata dal fatto che, se per ogni sottofamiglia $\{F_1, \dots, F_k\} \subset \mathcal{F}$ vale la proprietà:

$$\bigcap_{i=1}^k F_i \neq \emptyset \quad (505)$$

allora si ha:

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset \quad (506)$$

Seguono alcuni Teoremi (con o senza dimostrazione) relativi ai concetti finora introdotti e per i quali si rimanda, as usual in questa sezione, a [ST80].

Teorema A.19 Uno spazio topologico S è compatto sse per esso vale la proprietà dell'intersezione finita.

Teorema A.20 Dato uno spazio topologico **compatto** S ogni suo sottoinsieme **chiuso** è compatto per la topologia relativa.

Teorema A.21 Dato uno spazio topologico compatto S ogni suo insieme infinito A ha almeno un punto di accumulazione.

Dimostrazione

Si esegue la dimostrazione negando la tesi ovvero dimostrando che se $A \subset S$ non ha punti di accumulazione allora è finito per cui se è infinito (come da ipotesi) allora ha almeno un punto di accumulazione. La dimostrazione è in tre parti ([ST80] pagina 23).

1. Si dimostra che A è uno spazio topologico con la topologia discreta ovvero la sua topologia relativa è la topologia discreta. Se considero $a \in A$, a non è un punto di accumulazione per A (che ne è privo per ipotesi) per cui esiste un aperto $U_a \subset S$ tale che $a \in U_a$ e $(U_a \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$ (perchè se non fosse così a sarebbe un punto di accumulazione per A) ovvero $U_a \cap A = \{a\}$. Si ha che $\{a\}$ è un insieme aperto nella topologia relativa di A per cui A è uno spazio topologico discreto.
2. Si dimostra che A è compatto. A non ha punti di accumulazione (per ipotesi) per cui (dalla $\bar{A} = A \cup D(A)$) $A = \bar{A}$ ovvero A è chiuso e quindi, per il Teorema A.20, è compatto.

3. Si dimostra che A è finito. Per ogni $a \in A$ si consideri $U_a = \{a\}$. Per la prima parte della dimostrazione $\cup_{a \in A} U_a$ è un ricoprimento aperto (ovvero fatto di insiemi aperti) di A . Per la seconda parte A è compatto per cui ne esiste un sottoricoprimento finito e quindi A contiene un numero finito di punti e, pertanto, è finito.

Si è dimostrato così che se A non ha punti di accumulazione allora A è finito. Essendo A infinito per ipotesi allora A ha almeno un punto di accumulazione.

Si passa ora a introdurre il concetto di **funzione continua** fra spazi topologici. Dati due spazi topologici S e T , una funzione:

$$f : S \longrightarrow T \quad (507)$$

si dice **continua** se immagini inverse di insiemi aperti sono insiemi aperti ovvero se per ogni insieme aperto $U \subset T$ si ha che $f^{-1}(U)$ è un insieme aperto di S . Si ha, al proposito, il seguente Teorema (vedi [Lip65] pagina 52 e pagina 97).

Teorema A.22 *Una funzione f è continua sse l'immagine inversa di ogni insieme aperto è un insieme aperto.*

Teorema A.23 *Dati:*

1. uno spazio topologico S con la relativa base $\mathcal{B}_S$,
2. uno spazio topologico T con la relativa base $\mathcal{B}_T$,

una funzione:

$$f : S \longrightarrow T \quad (508)$$

è **continua** sse comunque considero $s \in S$ e $V \in \mathcal{B}_T$ in modo che sia:

$$f(s) \in V \quad (509)$$

esiste $U \in \mathcal{B}_S$ tale che:

1. $s \in U$,
2. $f(U) \subset V$.

Dimostrazione

Come in tutti i casi di una condizione necessaria e sufficiente si procede in due passi:

1. sia f continua allora esiste U come asserito,

2. supponiamo che esista U siffatto allora f è continua.

($\Rightarrow$)

Sia f continua. Prendo $s \in S$ in modo che $f(s) \in V \in \mathcal{B}_T$. Per la continuità della f , $f^{-1}(V)$ è un aperto in S e, pertanto, è dato dall'unione di elementi della base $\mathcal{B}_S$ di S . Dal momento che $s \in f^{-1}(V)$ ho che s è in almeno uno di questi elementi della base, ad esempio U (cioè $s \in U$). Da tutto ciò segue che $U \subset f^{-1}(V)$ per cui $f(U) \subset V$.

($\Leftarrow$)

Per ogni $s \in S$ e $V \in \mathcal{B}_T$ tale che:

$$f(s) \in V \quad (510)$$

esiste $U \in \mathcal{B}_T$ tale che:

1. $s \in U$,
2. $f(U) \subset V$.

Considero un insieme aperto $\tilde{V} \subset T$. Se dimostro che $f^{-1}(\tilde{V})$ è aperto in S (in modo che immagine inversa di un insieme aperto sia un insieme aperto) allora ho dimostrato che la f è continua.

Se $s \in f^{-1}(\tilde{V})$ allora $f(s) \in \tilde{V}$ per cui $f(s)$ appartiene a qualche elemento V_s della base $\mathcal{B}_T$ di T tale che $V_s \subset \tilde{V}$. Si ha, quindi, che esiste un insieme U_s della base $\mathcal{B}_S$ di S tale che:

1. $s \in U_s$,
2. $f(U_s) \subset V_s \subset \tilde{V}$

da cui:

$$U_s \subset f^{-1}(\tilde{V}) \quad (511)$$

Si può quindi scrivere:

$$f^{-1}(\tilde{V}) = \cup_{s \in f^{-1}(\tilde{V})} U_s \quad (512)$$

e pertanto $f^{-1}(\tilde{V})$, essendo unione di insiemi aperti, è un insieme aperto in S . Si ha quindi che l'immagine inversa mediante la f^{-1} di un insieme aperto è un insieme aperto per cui la f è una funzione continua.

Teorema A.24 Dati tre spazi topologici R , S e T e due funzioni continue fra coppie di spazi topologici:

$$g : R \longrightarrow S \quad (513)$$

$$f : S \longrightarrow T \quad (514)$$

la loro composizione:

$$f \cdot g : R \longrightarrow T \quad (515)$$

è una funzione continua.

Dimostrazione

Si usa la definizione: se l'immagine inversa di un insieme aperto è un insieme aperto allora la funzione è continua. A tal proposito si considera un insieme $V \subset T$. Dato che f è continua $f^{-1}(V)$ è un insieme aperto in S . Sfrutto la continuità della g per cui $g^{-1}(f^{-1}(V))$ è un insieme aperto in R .

Dalla relazione valida per la composizione di funzioni:

$$(f \cdot g)^{-1} = g^{-1} \cdot f^{-1} = g^{-1}(f^{-1}()) \quad (516)$$

si ottiene quindi che:

$$(f \cdot g)^{-1}(V) \quad (517)$$

è un insieme aperto in R e perciò $(f \cdot g)^{-1}$ è una funzione continua.

Teorema A.25 Si considerano due spazi topologici S e T e una funzione:

$$f : S \longrightarrow T \quad (518)$$

1. **surgettiva** (ovvero ogni $t \in T$ è immagine di almeno un $s \in S$),
2. **continua**.

Si ha che: se S è connesso allora T è connesso.

Dimostrazione

Si sfruttano la definizione di spazio topologico connesso e le proprietà della f . Suppongo di avere due insiemi aperti, non vuoti e disgiunti V_1 e V_2 in T tali che:

$$T = V_1 \cup V_2 \quad (519)$$

(in pratica suppongo T non connesso per dimostrare che da S connesso e f continua e surgettiva deve discendere necessariamente T connesso). Essendo la f continua ho che $f^{-1}(V_1)$ e $f^{-1}(V_2)$ sono insiemi aperti e disgiunti (se non lo fossero avrei almeno un punto nella loro intersezione che tramite la f va in V_1 e V_2 contro il fatto che f sia una funzione) di S tali che (per la surgettività):

$$S = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) \quad (520)$$

Dato che S è connesso, dalla definizione ho che una delle due condizioni deve essere verificata:

$$1. f^{-1}(V_1) = \emptyset$$

$$2. f^{-1}(V_2) = \emptyset$$

A questo punto si sfrutta la surgettività della f : dalle condizioni suddette segue che o $V_1 = \emptyset$ o $V_2 = \emptyset$ e, pertanto, T è connesso.

Corollario A.7 Si hanno due spazi topologici S e T e una funzione:

$$f : S \longrightarrow T \quad (521)$$

Sotto ipotesi più deboli di quelle del Teorema A.25 si ha che se:

1. la f è continua,

2. S è connesso

allora $f(S)$ è connesso. In questo caso $f(S) \subset T$.

Si ha ora un Teorema analogo al Teorema A.25 e relativo alla **compattezza**.

Teorema A.26 Si abbiano due spazi topologici S e T e una funzione:

$$f : S \longrightarrow T \quad (522)$$

1. continua,

2. surgettiva.

Si ha che se S è **compatto** allora T è **compatto**.

Dimostrazione

Si sfrutta la definizione di insieme compatto in funzione di un ricoprimento aperto finito. Dato un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di T definisco le immagini inverse degli elementi del ricoprimento:

$$\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\} \quad (523)$$

come ricoprimento aperto di S . Dato che S è compatto ne esiste un sottoricoprimento finito:

$$\{f^{-1}(V_i) : i = 1, \dots, k\} \quad (524)$$

tale che:

$$S = \cup_{i=1}^k f^{-1}(V_i) \quad (525)$$

Sfrutto la surgettività della f (dalla quale ho $f(f^{-1}(V_j)) = V_j$) in modo da scrivere:

$$T = f(S) = f(\cup_{i=1}^k f^{-1}(V_i)) = \cup_{i=1}^k f(f^{-1}(V_i)) = \cup_{i=1}^k V_i \quad (526)$$

per cui T è compatto.

Il Teorema A.26 ha i seguenti due corollari. In entrambi si lascia cadere l'ipotesi di surgettività e nel secondo si suppone che sia $T = \mathbb{R}$.

Corollario A.8 *Dati due spazi topologici S e T e una funzione:*

$$f : S \longrightarrow T \quad (527)$$

continua, si ha che se S è compatto allora $f(S)$ è compatto.

Si noti che non essendo f surgettiva in generale è $f(S) \subset T$.

Corollario A.9 *Dati due spazi topologici S e $T = \mathbb{R}$ e una funzione:*

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (528)$$

continua, si ha che se S è compatto allora f assume i valori:

1. *massimo,*
2. *minimo.*

Dimostrazione

Si usa il Teorema A.26: se S è compatto e f continua allora $f(S) \subset \mathbb{R}$ è compatto e, pertanto:

1. *chiuso,*
2. *limitato,*

in $\mathbb{R}$. Siccome $f(S)$ è limitato ha un estremo superiore che coincide con il massimo che è un punto di accumulazione per $f(S)$ dato che $f(S)$ è chiuso. In modo duale si ragiona per il minimo.

Definizione A.43 *Una funzione ([Lip65]):*

$$f : S \longrightarrow T \quad (529)$$

*si dice **biunivoca** (oppure **bigettiva** oppure **una corrispondenza biunivoca**) se è*

1. **iniettiva:** *cioè se dati $s, s' \in S$ con $s \neq s'$ è $f(s) \neq f(s')$;*
2. **surgettiva:** *se ogni $t \in T$ è immagine di almeno un $s \in S$.*

Definizione A.44 (Omeomorfismo) *Dati due spazi topologici S e T una funzione:*

$$f : S \longrightarrow T \quad (530)$$

*si dice un **omeomorfismo** se:*

1. f è una corrispondenza biunivoca,
2. f e f^{-1} sono continue (ovvero se f si dice bicontinua).

Nota A.35 Se f è una corrispondenza biunivoca si può definire f^{-1} invece che come:

$$f^{-1} : 2^T \longrightarrow 2^S \quad (531)$$

come:

$$f^{-1} : T \longrightarrow S \quad (532)$$

se si identifica:

1. con t l'insieme $\{t\}$,
2. con $f^{-1}(t)$ il punto s tale che $f(s) = t$.

Nota A.36 Se f è un **omeomorfismo** allora f e f^{-1} sono continue per cui:

1. f applica in modo biunivoco punti di S in punti di T ,
2. f applica in modo biunivoco insiemi aperti di S in insiemi aperti di T .

Da ciò discende che S e T sono **topologicamente la stessa cosa** e quindi ogni proprietà topologica che vale per S vale per T e viceversa.

Esempio A.54 Dalla Nota A.36 si ha che se, dati due spazi topologici S e T , una funzione:

$$f : S \longrightarrow T \quad (533)$$

è un omeomorfismo allora si ha:

1. S connesso sse T connesso,
2. S compatto sse T compatto.

Nota A.37 Se dati due spazi topologici S e T e un omeomorfismo:

$$f : S \longrightarrow T \quad (534)$$

si ha che una proprietà che vale per S vale per T in forza dell'omeomorfismo allora la si dice una **proprietà topologica**.

Definizione A.45 Dato un insieme T e due topologie su T :

1. $\mathcal{U}$,

2. $\mathcal{V}$

si dice che $\mathcal{U}$ è **più debole** ovvero **meno fine** di $\mathcal{V}$ se vale una delle due condizioni seguenti:

1. $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$,
2. l'applicazione identica (indicata anche con id nelle presenti note):

$$I : (T, \mathcal{V}) \longrightarrow (T, \mathcal{U}) \quad (535)$$

è continua (ovvero le immagini inverse di insiemi aperti sono insiemi aperti).

Teorema A.27 Dato un insieme S si considera $\mathcal{W} \subset 2^S$. Esiste una topologia $\mathcal{U}$ che è la più debole (o meno fine) topologia su S tale che $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$.

Nota A.38 Dato un insieme S e data la topologia più debole su S , $\mathcal{U}$, (che contiene $\mathcal{W} \subset 2^S$) una sua base $\mathcal{B}$ è composta da:

1. $\emptyset$,
2. S ,
3. $\cap_{i=1}^k U_i$ con $U_i \in \mathcal{W}$ per $i = 1, \dots, k$ per $k \in \mathbb{N}$.

Nota A.39 La topologia $\mathcal{U}$ ha una duplice interpretazione:

1. come l'intersezione di tutte le topologie su S che contengono $\mathcal{W}$,
2. come la topologia che viene “generata” da $\mathcal{W}$.

Teorema A.28 Dato un insieme di indici W e un insieme di spazi topologici $\{T_w\}_{w \in W}$ se si ha un insieme S che consente di definire le funzioni $\{f_w\}_{w \in W}$:

$$f_w : S \longrightarrow T_w \quad (536)$$

(una per ogni $w \in W$) si ha una topologia su S che è la più debole fra le topologie su S per le quali esistono tali funzioni.

Definizione A.46 Dato un insieme di spazi topologici:

$$\{S_w\}_{w \in W} \quad (537)$$

si può definire:

$$P = \times_{w \in W} S_w \quad (538)$$

In questo modo se:

$$\pi_w : P \longrightarrow S_w \quad (539)$$

è un'applicazione definita per ogni $w \in W$ in modo che sia:

$$\pi_w(f) = f(w) \quad (540)$$

con $f \in P$. Un punto $f \in P = \times_{w \in W} S_w$ è una funzione:

$$f : W \longrightarrow \cup_{w \in W} S_w \quad (541)$$

definita in modo che sia:

$$f(w) \in S_w \quad (542)$$

$\forall w \in W$. La **topologia prodotto** su P è la topologia più debole per la quale le π_w sono **continue** ed esiste di sicuro in virtù del Teorema A.28.

Si noti che la funzione π_w rappresenta la proiezione di $P = \times_{w \in W} S_w$ sul termine S_w .

Esempio A.55 ([ST80]) Se si ha:

$$I = (0, 1) \subset \mathbb{R} \quad (543)$$

si ha che $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ (tale prodotto è un quadrato aperto in $\mathbb{R}^2$). Si possono definire le applicazioni **proiezione**:

$$\pi_j : I \times I \longrightarrow I \quad (544)$$

(con $j = 1, 2$) in modo che sia (se il punto $(a, b) \in I \times I$):

$$1. \pi_1(a, b) = a$$

$$2. \pi_2(a, b) = b$$

Con riferimento alla figura 61 (da [ST80], pagina 30) si ha:

1. se U_1 è un intervallo aperto in I la “proiezione inversa” $\pi_1^{-1}(U_1)$ è l'insieme tratteggiato in figura (caso (a));

2. se U_2 è un intervallo aperto in I la “proiezione inversa” $\pi_2^{-1}(U_2)$ è l'insieme tratteggiato in figura (caso (b));

3. il caso (c) di tale figura illustra $\pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2)$.

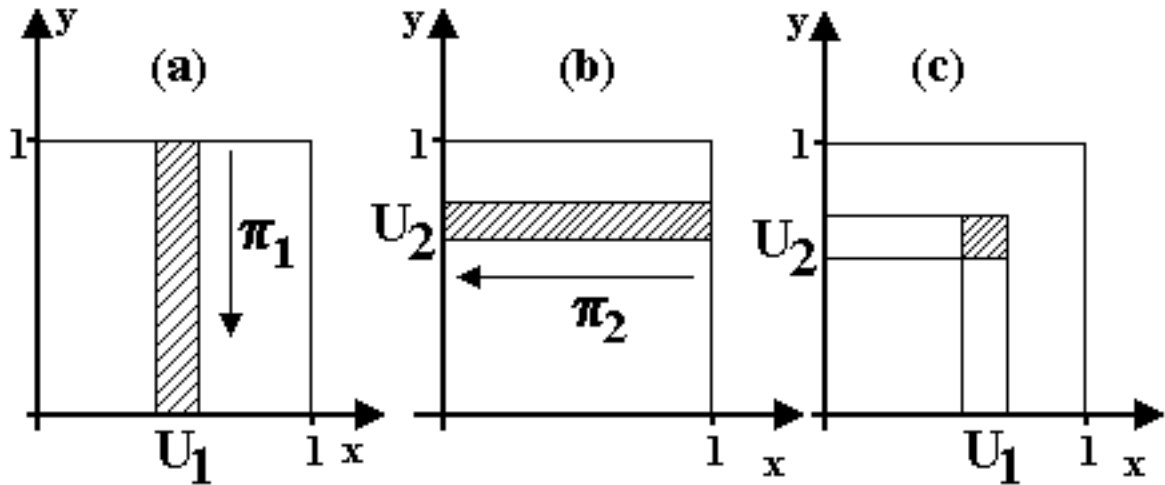


Figura 61: Proiezioni (dettagli nel testo)

Dal momento che gli intervalli aperti sono una base per la topologia su I si ha che i quadrati aperti sono una base per la topologia prodotto su $I \times I$.

Dopo aver introdotto gli spazi prodotto e la topologia prodotto se ne danno alcune proprietà, rimandando a [ST80] per ulteriori dettagli.

Teorema A.29 (Teorema di Tychonoff) *Il prodotto di spazi compatti è compatto.*

Nota A.40 *Sappiamo che data una funzione:*

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (545)$$

se S è compatto allora f assume i valori massimo e minimo. Ci si chiede in quali casi una funzione f :

1. *continua,*
2. *definita su uno spazio non compatto S*

possa essere estesa ad una funzione continua definita su uno spazio compatto $C \supset S$. Al proposito si ha la seguente definizione.

Definizione A.47 (Estensione continua) *Si abbia la funzione continua:*

$$f : S \longrightarrow T \quad (546)$$

con $S \subset C$. Una estensione continua g della f è una funzione continua:

$$g : C \longrightarrow T \quad (547)$$

tale che:

$$g(s) = f(s) \text{ se } s \in S \quad (548)$$

in modo che la restrizione della g a S coincida con la f ovvero:

$$g|_S = f \quad (549)$$

Esempio A.56 ([ST80]) Si hanno i seguenti esempi.

1. $S = (0, 1]$ è un intervallo semiaperto e perciò non compatto. Se ho:

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (550)$$

con $f(x) = \sin x$ per $x \in (0, 1]$ la posso estendere a una funzione continua (ovvero la posso estendere per continuità) sull'intervallo compatto $[0, 1]$ ponendo $f(0) = 0$ ovvero definisco:

$$C = S \cup \{0\} \quad (551)$$

compatto e assegno un valore alla f nel punto aggiunto.

2. $S = (0, 1]$ è un intervallo semiaperto e perciò non compatto. Se ho:

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (552)$$

con $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ per $x \in (0, 1]$ non la posso estendere ad una funzione continua sull'intervallo compatto $[0, 1]$.

A.4 Cenni agli assiomi di separazione, da [ST80]

Dato uno **spazio topologico** S e due sue punti $s_1 \in S$ e $s_2 \in S$ si danno le seguenti definizioni.

Definizione A.48 (T_0) Lo spazio topologico S è uno spazio di tipo T_0 sse per ogni $s_1 \neq s_2$ esiste un insieme aperto $U \in S$ tale che:

1. $s_1 \in U$ ma $s_2 \notin U$ oppure
2. $s_2 \in U$ ma $s_1 \notin U$

In uno spazio topologico di tipo T_0 riesco a separare un punto da un altro rinchiudendone uno in un insieme aperto che non contiene l'altro.

Definizione A.49 (T_1) *Lo spazio topologico S è uno spazio di tipo T_1 sse per ogni $s_1 \neq s_2$:*

1. *esiste un insieme aperto U_1 tale che $s_1 \in U_1$ e $s_2 \notin U_1$ e*
2. *esiste un insieme aperto U_2 tale che $s_2 \in U_2$ e $s_1 \notin U_2$.*

Nota A.41 *Nel caso di uno spazio di tipo T_0 ho un insieme aperto che mi separa due punti (nel senso che ne contiene uno solo mentre l'altro è nell'insieme complementare). Nel caso di uno spazio di tipo T_1 ho due insiemi aperti che mi separano due punti ma che non sono necessariamente disgiunti dal momento che può essere:*

$$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \quad (553)$$

Definizione A.50 (T_2) *Lo spazio topologico S è uno spazio di tipo T_2 o di Hausdorff sse per ogni $s_1 \neq s_2$:*

1. *esiste un insieme aperto U_1 tale che se $s_1 \in U_1$ e $s_2 \notin U_1$ e*
2. *esiste un insieme aperto U_2 tale che se $s_2 \in U_2$ e $s_1 \notin U_2$.*

e in più:

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad (554)$$

ovvero i due insiemi aperti sono disgiunti.

Nota A.42 *Si ha la seguente catena di inclusioni:*

$$T_2 \subset T_1 \subset T_0 \quad (555)$$

da cui discende la seguente catena di implicazioni:

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0 \quad (556)$$

Esempio A.57 ([ST80]) *Se ho:*

$$S = \{s_1, s_2\} \quad (557)$$

con la topologia:

$$\mathcal{U} = \{\emptyset, S, \{s_1\}\} \quad (558)$$

ho uno spazio topologico di tipo T_0 (siccome mi serve un insieme aperto che contiene uno dei due punti ma non l'altro posso prendere $\{s_1\}$ che contiene s_1 ma non s_2) ma non di tipo T_1 (infatti come insiemi aperti ho $\{s_1\}$ e S ma il secondo contiene entrambi i punti, contro la definizione).

Esempio A.58 *Se ho:*

$$S = \{s_1, s_2\} \quad (559)$$

con la topologia:

$$\mathcal{U} = \{\emptyset, S, \{s_1\}, \{s_2\}\} \quad (560)$$

ho uno spazio topologico di tipo T_1 (ho due insiemi aperti che mi separano i due punti) e anche di tipo T_2 (tali aperti sono disgiunti).

Esempio A.59 *Se ho:*

$$S = \{s_1, s_2, s_3\} \quad (561)$$

con la topologia:

$$\mathcal{U} = \{\emptyset, S, \{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \{s_1\}\} \quad (562)$$

ho uno spazio topologico che non è di tipo T_1 (ho due aperti che mi separano i due punti s_2 e s_3 ma non riesco a separare s_1 da s_3) e perciò non è di tipo T_2 (infatti tali aperti, anche nei casi in cui esistono, non sono disgiunti). Tale spazio è, invece, di tipo T_0 perchè comunque scelgo s_i posso trovare un insieme della topologia che non lo contiene ovvero comunque scelgo due punti distinti ho un insieme aperto che ne contiene uno ma non l'altro.

Esempio A.60 ([ST80]) *Ogni spazio metrico è di tipo T_2 . Lo si vede nel modo seguente. Se ho $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, definisco la distanza fra i due punti (senza specificare la forma che assume la funzione ρ) come:*

$$a = \rho(s_1, s_2) \quad (563)$$

e come insiemi aperti considero le sfere di centro s_i ($i = 1, 2$) e raggio $a/2$ ovvero:

$$U_i = B_{s_i}(a/2) \quad (564)$$

in modo che sono sicuro che tali insiemi aperti sono disgiunti. Dalla definizione segue che lo spazio metrico S è di tipo T_2 perchè, comunque prendo due punti distinti in S , posso trovare due insiemi aperti disgiunti che li separano. Si vedrà che uno spazio metrico è addirittura T_4 .

Teorema A.30 *Uno spazio topologico S è di tipo T_1 sse considerandolo come sottoinsieme di S stesso è chiuso.*

Dimostrazione

Come di solito si procede in due passi:

1. S di tipo $T_1 \Rightarrow S$ chiuso,
2. S chiuso $\Rightarrow S$ di tipo T_1 .

($\Rightarrow$)

Suppongo S sia di tipo T_1 (ovvero posso separare punti distinti con aperti non disgiunti ma tali che ciascuno contiene solo uno dei due punti e non anche l'altro). Definisco un insieme singoletto:

$$F = \{s_0\} \quad (565)$$

e considero F^C . Essendo S di tipo T_1 se prendo un punto $s \in F^C$ ho che esiste un insieme aperto U_s tale che:

1. $s \in U_s$,
2. $s_0 \notin U_s$,
3. $U_s \subset F^C$.

Si può pertanto scrivere:

$$s \in U_s \subset F^C \quad (566)$$

da cui:

$$F^C = \cup_{s \in F^C} U_s \quad (567)$$

in modo che F^C sia un insieme aperto (perchè unione di un numero qualunque di insiemi aperti) e, quindi, F è un insieme chiuso. Come ultimo passo si ha che S può essere espresso come l'unione (estesa a tutti i suoi elementi) di insiemi chiusi per cui è un insieme chiuso.

($\Leftarrow$)

Suppongo che S sia chiuso ovvero i suoi punti sono insiemi chiusi. Considero $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ e definisco i seguenti insiemi aperti:

$$U_1 = \{s_2\}^C \quad (568)$$

$$U_2 = \{s_1\}^C \quad (569)$$

Dato che $s_1 \neq s_2$ e che $s_i \in U_i$ ($i = 1, 2$) ho che, dalla definizione, S è di tipo T_1 .

In modo più esplicito si ha:

1. $s_1 \in U_1$ ma $s_2 \notin U_1$ per la (568),
2. $s_2 \in U_2$ ma $s_1 \notin U_2$ per la (569),

per cui si hanno i due insiemi aperti non necessariamente disgiunti richiesti nella definizione di uno spazio di tipo T_1 .

Si danno qui di seguito alcuni Teoremi relativi agli spazi topologici di tipo T_2 (o di Hausdorff), quasi tutti con brevi dimostrazioni (per le quali si rimanda a [ST80], pagine 40 e 41).

Teorema A.31 *Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio topologico di tipo T_2 è chiuso.*

Dimostrazione

So che S è di tipo T_2 , per cui posso separare punti distinti con aperti disgiunti, e che ho un sottoinsieme compatto $C \subset S$.

Si considera $C \subset S$. Lo scopo è dimostrare che C è chiuso ovvero che C^C è aperto. A tale scopo si deve dimostrare che comunque si prende $s \notin C$ (ovvero $s \in C^C$) esiste un insieme aperto U_s che contiene s e tale che:

$$U_s \cap C = \emptyset \quad (570)$$

ovvero $s \in U_s \subset C^C$. In tal modo si dimostra che si può scrivere:

$$C^C = \bigcup_{s \in C^C} U_s \quad (571)$$

da cui discende che C^C è un insieme aperto e, quindi, C è un insieme chiuso. Dal momento che S è di tipo T_2 per ogni $c \neq s$, $c \in C$ esistono due insiemi U_c e V_c :

1. aperti,
2. disgiunti,
3. tali che $s \in U_c$ e $c \in V_c$.

Per la topologia relativa, si ha che la famiglia di insiemi:

$$\{V_c \cap C\}_{c \in C} \quad (572)$$

è un ricoprimento aperto di C . Dato che C è compatto esiste un sottoinsieme finito $C_1 \subset C$ che individua un sottoricoprimento finito di C ovvero si ha:

$$C = \bigcup_{c \in C_1} (V_c \cap C) = (\bigcup_{c \in C_1} V_c) \cap C \quad (573)$$

da cui $C \subset \bigcup_{c \in C_1} V_c$. Se ora definisco:

$$U_s = \bigcap_{c \in C_1} U_c \quad (574)$$

ho che, dalle definizioni poste:

1. U_s è aperto (intersezione finita di aperti),

2. $s \in U_s$ (perchè $s \in U_c \forall c$),

3. $U_s \cap C \subset U_s \cap (\cup_{c \in C_1} V_c) = \emptyset$

da cui $U_s \cap C = \emptyset$ come richiesto. La:

$$U_s \cap (\cup_{c \in C_1} V_c) = \emptyset \quad (575)$$

deriva dal fatto che gli insiemi U_c e V_c sono disgiunti per costruzione per cui se considero un elemento t tale che:

$$t \in U_s \cap (\cup_{c \in C_1} V_c) = (\cap_{c \in C_1} U_c) \cap (\cup_{c \in C_1} V_c) \quad (576)$$

allora, dalle definizioni date, è:

1. $t \in U_c$ per ogni $c \in C_1$;

2. $t \in V_c$ per qualche $c_0 \in C_1$

per cui avrei:

$$t \in U_{c_0} \cap V_{c_0} = \emptyset \quad (577)$$

per cui tale t non esiste e perciò si ha la (575).

Nota A.43 Nel Teorema A.31 si è sfruttato il fatto seguente: dati due insiemi A e B se $A = A \cap B$ allora $A \subset B$.

Nota A.44 Nella parte finale del Teorema A.31 si è fatto uso delle seguenti semplici proprietà:

1. se $a \in \cap_i B_i$ allora $a \in B_i$ per ogni i ,

2. se $a \in \cup_i B_i$ allora esiste almeno un valore dell'indice i , sia i_0 , tale che $a \in B_{i_0}$.

Nota A.45 Il Teorema A.31 permette di dimostrare che, dato uno spazio topologico S di tipo T_2 e un suo sottoinsieme compatto C , se si ha $s \notin C$ esistono due sottoinsiemi U_1 e U_2 :

1. aperti,

2. disgiunti,

tali che $s \in U_1$ e $C \subset U_2$. In questo modo so come separare un punto e un compatto con insiemi aperti disgiunti. Una proprietà più forte è stabilita dal Teorema seguente che ci consente di separare due compatti disgiunti mediante due insiemi aperti disgiunti.

Teorema A.32 *Dati due sottoinsiemi compatti e disgiunti C_1 e C_2 di uno spazio topologico di tipo T_2 si ha che esistono due sottoinsiemi U_i ($i = 1, 2$):*

1. *aperti,*
2. *disgiunti,*

tali che $C_i \subset U_i$.

Dimostrazione

La Nota A.45 ci permette di asserire che per ogni $s \in C_1$ esistono due insiemi U_s e V_s

1. *aperti,*
2. *disgiunti,*

tali che $s \in U_s$ e $C_2 \subset V_s$. La famiglia:

$$\{U_s \cap C_1\}_{s \in C_1} \quad (578)$$

rappresenta un ricoprimento aperto di C_1 . Dato che C_1 è compatto esiste un sottoinsieme finito $D_1 \subset C_1$ tale che:

$$\{U_s \cap C_1\}_{s \in D_1} \quad (579)$$

rappresenta un ricoprimento finito di C_1 per cui:

$$C_1 \subset \cup_{s \in D_1} U_s \quad (580)$$

Se ora definisco gli insiemi seguenti (aperti per costruzione):

$$U_1 = \cup_{s \in D_1} U_s \quad (581)$$

$$U_2 = \cap_{s \in D_1} V_s \quad (582)$$

si ha, dalle definizioni date:

1. *$C_2 \subset U_2$ per costruzione,*
2. *dato che $U_s \cap V_s = \emptyset \forall s$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$*

da cui la tesi.

Teorema A.33 *Dati due spazi topologici:*

1. *S compatto,*

2. T di tipo T_2 ,

ogni funzione continua:

$$f : S \longrightarrow T \quad (583)$$

che sia una corrispondenza biunivoca (ovvero sia iniettiva e surgettiva) è un omeomorfismo.

Definizione A.51 (T_3) Uno spazio topologico S si dice di tipo T_3 o **regolare** se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. S è di tipo T_1 ,
2. per ogni insieme chiuso $F \subset S$ e per ogni $s \in S$ e $s \notin F$ esistono due insiemi U_1 e U_2 tali che:
 - (a) U_1 e U_2 sono aperti e disgiunti,
 - (b) $s \in U_1$ e $F \subset U_2$.

Definizione A.52 (T_4) Uno spazio topologico S si dice di tipo T_4 o **normale** se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. S è di tipo T_1 ,
2. per ogni coppia di insiemi chiusi e disgiunti $F_1 \subset S$ e $F_2 \subset S$ esistono due insiemi aperti disgiunti U_i ($i = 1, 2$) tali che $F_i \subset U_i$.

Nota A.46 Dato uno spazio topologico S di tipo T_k con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ si ha che questo è di tipo T_j con $j \leq k$ per cui si ha la seguente catena di inclusioni:

$$T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0 \quad (584)$$

da cui discende la seguente catena di implicazioni:

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0 \quad (585)$$

Esempio A.61 ([ST80]) Si vuole costruire uno spazio topologico di tipo T_2 (o di Hausdorff) ma non di tipo T_3 (ovvero regolare). Con riferimento alla figura 62 si definisce:

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\} \quad (586)$$

Si può definire una topologia su S mediante una base $\mathcal{B}$ descritta nel modo seguente. Se si indicano con $\mathbb{R}^1$ l'asse x_1 in $\mathbb{R}^2$ e con S_+ il semipiano superiore aperto ovvero:

$$S_+ = S \setminus \mathbb{R}^1 \quad (587)$$

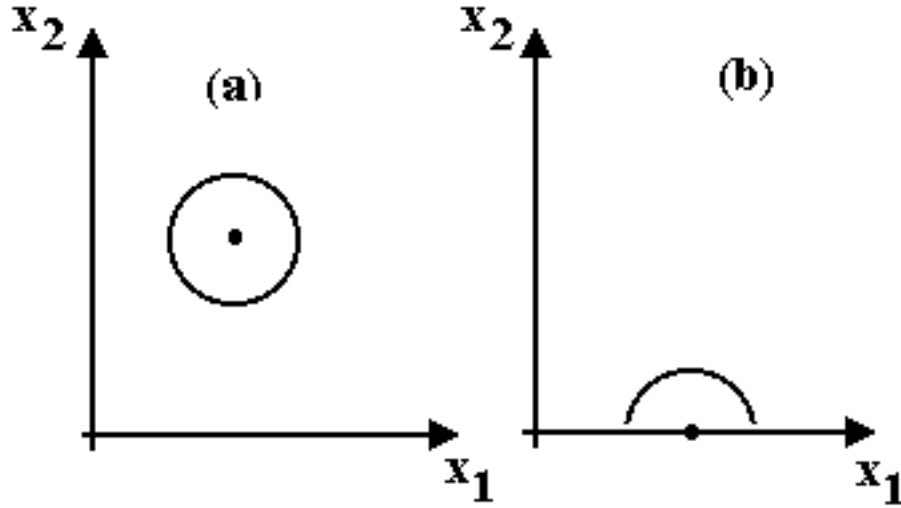


Figura 62: Esempio (dettagli nel testo)

si possono definire gli insiemi (vedi la figura 62 (a) e (b)) (con $x = (x_1, x_2)$):

$$\mathcal{B}_1 = \{B_x(r) : x \in S_+ \text{ e } r < x_2\} \quad (588)$$

(sono le sfere in figura 62 (a)):

$$\mathcal{B}_2 = \{(B_x(r) \cap S_+) \cup \{x\} : x \in \mathbb{R}^1\} \quad (589)$$

(sono le sfere in figura 62 (b)),

in modo che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sia una base per una topologia su S . Le sfere di centro x e raggio r ($B_x(r)$) sono definite con la metrica usuale su $\mathbb{R}^2$.

Si ha che lo spazio topologico S è di tipo T_2 ovvero è di tipo T_1 per cui i punti di S sono insiemi chiusi. Un altro insieme chiuso in S è l'insieme:

$$\mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \quad (590)$$

dato che è il complemento di $S_+ \cup \{0\}$ che è un insieme aperto. Dati gli insiemi chiusi:

$$1. \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$$

$$2. \{0\}$$

non li si può separare utilizzando insiemi aperti disgiunti. Se U_1 è un insieme aperto e $0 \in U_1$ allora per opportuni valori di r si ha che elementi di:

$$(B_0(r) \cap S_+) \cup \{0\} \quad (591)$$

sono contenuti in U_1 per cui ogni insieme aperto che contiene il punto $(r/2, 0)$ ha intersezione non vuota con U_1 da cui la tesi.

Nota A.47 Dato un spazio topologico S di tipo T_2 e compatto so che:

1. i suoi sottoinsiemi chiusi sono compatti,
2. vale il Teorema A.32

per cui S è di tipo T_4 .

Dato un insieme A se ne definisce la **chiusura** come:

$$\bar{A} = A \cup D(A) \quad (592)$$

ovvero l'unione dell'insieme stesso e dell'insieme dei suoi punti di accumulazione (detto il **derivato** e indicato come $D(A)$). Useremo tale definizione nei due seguenti Teoremi (di cui non vengono date le dimostrazioni per le quali si rimanda a [ST80], pagina 43).

Teorema A.34 Dato uno spazio topologico S di tipo T_3 (ovvero regolare) e dato un insieme F chiuso in S , se considero il punto $s \notin F$ ho che esistono due insiemi aperti $U_1 \subset S$ e $U_2 \subset S$ tali che:

1. $s \in U_1$,
2. $F \subset U_2$,
3. $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$

ovvero i due insiemi U_1 e U_2 hanno anche le frontiere disgiunte.

Teorema A.35 Dato uno spazio topologico S di tipo T_4 (ovvero normale) e dati due insiemi $F_1 \subset S$ e $F_2 \subset S$:

1. chiusi,
2. disgiunti,

esistono due insiemi aperti $U_1 \subset S$ e $U_2 \subset S$ tali che:

1. $F_1 \subset U_1$,
2. $F_2 \subset U_2$,
3. $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$.

Teorema A.36 *Si abbia uno spazio metrico*

$$(S, \rho) \quad (593)$$

si ha che S con la topologia associata alla metrica ρ è di tipo T_4 (ovvero normale).

Nota A.48 *Abbiamo già visto nell'Esempio A.60 che ogni spazio metrico è di tipo T_2 ovvero è di Hausdorff. Il Teorema A.36 ci dice in più che è di tipo T_4 ovvero che posso separare insiemi chiusi disgiunti con insiemi aperti disgiunti.*

Dopo aver introdotto le varie caratterizzazioni degli spazi topologici con i teoremi che definiscono le possibilità di separare insiemi chiusi e aperti si passa ora alla definizione dei concetti di separazione mediante funzioni continue.

Nota A.49 *Dato uno spazio topologico S con la topologia indiscreta:*

$$\mathcal{U} = \{\emptyset, S\} \quad (594)$$

le uniche funzioni continue:

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (595)$$

sono le funzioni costanti ovvero tali che per ogni $s \in S$ si ha:

$$f(s) = x_0 \in \mathbb{R} \quad (596)$$

Vediamo perchè.

Uso la definizione di funzione continua in base alla quale immagini inverse di insiemi aperti sono insiemi aperti (vedi il Teorema A.22) e faccio la dimostrazione per assurdo. Suppongo che esistano due punti $s_1, s_2 \in S$ tali che:

$$s_1 \neq s_2 \Rightarrow f(s_1) \neq f(s_2) \quad (597)$$

per cui ho due insiemi aperti e disgiunti U_1 e U_2 contenuti in $\mathbb{R}$ gli posso trovare perchè $\mathbb{R}$ come spazio metrico è T_4) tali che $f(s_1) \in U_1$ e $f(s_2) \in U_2$. Si ha quindi:

$$f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset \quad (598)$$

(se così non fosse avrei almeno un punto in comune fra $f^{-1}(U_1)$ e $f^{-1}(U_2)$ che tramite la f andrebbe sia in U_1 sia in U_2 contro la definizione di funzione) ma ciò è assurdo dal momento che, per come ho definito la topologia su S , si ha:

$$f^{-1}(U_1) = f^{-1}(U_2) = S \quad (599)$$

ovvero non esistono i punti s_1 e s_2 ipotizzati e la f è una funzione costante.

Nota A.50 Dato uno spazio topologico S se per ogni coppia di punti $s_1 \in S$ e $s_2 \in S$ tali che $s_1 \neq s_2$ esiste una funzione continua:

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (600)$$

allora S è di tipo T_2 .

Vediamo perchè. Se U_1 e U_2 sono due insiemi:

1. *aperti*,
2. *disgiunti*

di $\mathbb{R}$ tali che:

1. $f(s_1) \in U_1$
2. $f(s_2) \in U_2$

si ha:

1. $s_1 \in f^{-1}(U_1)$,
2. $s_2 \in f^{-1}(U_2)$,
3. $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$

Si hanno così due insiemi $f^{-1}(U_1)$ e $f^{-1}(U_2)$ **aperti** (perchè immagini inverse di insiemi aperti mediante la controimmagine di una funzione continua) e **disgiunti** che separano punti distinti di S per cui S è di tipo T_2 . Tali insiemi sono disgiunti per definizione di funzione: se non lo fossero avrei almeno un s in entrambi in modo che la sua immagine apparterrebbe sia a U_1 sia a U_2 ovvero, essendo U_1 e U_2 disgiunti per definizione, avrebbe due immagini distinte violando la definizione di funzione.

Ci interessano, quindi, condizioni che garantiscono l'esistenza di funzioni:

1. continue,
2. a valori reali,

su uno spazio topologico S .

Teorema A.37 (Lemma di Urysohh) Dato uno spazio topologico S di tipo T_4 (o normale) e dati due suoi sottoinsiemi A_0 e A_1

1. *chiusi*,

2. *disgiunti*,

esiste una **funzione continua**:

$$f : S \longrightarrow [0, 1] \quad (601)$$

tale che:

1. per ogni $s \in A_0$ si ha $f(s) = 0$ ovvero $f(A_0) = 0$,
2. per ogni $s \in A_1$ si ha $f(s) = 1$ ovvero $f(A_1) = 1$.

Nota A.51 Dato uno spazio topologico S di tipo T_1 se S gode della proprietà che per ogni coppia di due suoi sottoinsiemi A_0 e A_1 :

1. *chiusi*,
2. *disgiunti*,

esiste una funzione continua:

$$f : S \longrightarrow [0, 1] \quad (602)$$

tale che:

1. per ogni $s \in A_0$ si ha $f(s) = 0$ ovvero $f(A_0) = 0$,
2. per ogni $s \in A_1$ si ha $f(s) = 1$ ovvero $f(A_1) = 1$

allora S è di tipo T_4 (è normale). Per dimostrarlo si nota che se si pone:

1. $U_0 = f^{-1}([0, 1/2))$,
2. $U_1 = f^{-1}((1/2, 1])$,

si ha che U_0 e U_1 sono aperti perchè controimmagini di aperti (nella topologia relativa) ed in più:

1. $A_0 \subset U_0$,
2. $A_1 \subset U_1$,
3. $U_0 \cap U_1 = \emptyset$

e, quindi, dalla definizione A.52, si ha che S è di tipo T_4 .

Nota A.52 Si noti che si può scrivere:

$$1. [0, \frac{1}{2}) = [0, 1] \cap (-1, \frac{1}{2}),$$

$$2. (\frac{1}{2}, 1] = [0, 1] \cap (\frac{1}{2}, 2)$$

ovvero l'aperto della topologia relativa è ottenibile da aperti in X .

Corollario A.10 *Si abbia uno spazio topologico S di tipo T_4 (ovvero di tipo normale). Se si hanno due sottoinsiemi A_0 e A_1 di S :*

1. *chiusi,*

2. *disgiunti,*

esiste una funzione continua:

$$g : S \longrightarrow [a, b] \quad (603)$$

tale che:

$$1. g(A_0) = a$$

$$2. g(A_1) = b$$

A.5 Esempi ed Esercizi 2, da [Lip65], capitoli 10, 11, 12 e 13

A.5.1 Spazi topologici: richiami di teoria

In questa sezione di esempi ed esercizi si inizia con gli assiomi di separazione che postulano l'esistenza di un numero sufficiente di insiemi aperti (concetto che sarà chiarito a breve). La parte teorica necessaria è quella relativa agli spazi T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , $T_{3.5}$ e T_4 con il Lemma e il Teorema di Urysohn's.

Nell'analisi degli esercizi e degli esempi può essere utile ricordare che vale la seguente catena di inclusioni:

$$\tau \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_4 \supset \mathcal{M} \quad (604)$$

in cui τ indica uno spazio topologico qualunque, T_i sono spazi topologici di classe o tipo i , $\mathcal{M}$ indica uno spazio metrico e:

1. gli spazi T_3 sono spazi T_1 regolari,

2. gli spazi T_4 sono spazi T_1 normali.

Alla suddetta catena di inclusioni corrisponde la seguente catena di implicazioni:

$$\tau \Leftarrow T_0 \Leftarrow T_1 \Leftarrow T_2 \Leftarrow T_3 \Leftarrow T_4 \Leftarrow \mathcal{M} \quad (605)$$

Nota A.53 Si richiamano le caratterizzazioni delle varie tipologie di uno spazio topologico (X, τ) , in breve indicato come X (se si sottintende la topologia). Si ricorda che uno spazio topologico è la coppia formata da un insieme X e da un insieme di suoi sottoinsiemi caratterizzato da alcune proprietà e che definisce una **topologia sull'insieme**. Ricapitolando si ha:

1. X si dice di tipo T_0 sse per ogni coppia di punti distinti x_1 e x_2 in X esiste un insieme aperto che contiene un punto ma non l'altro ovvero in uno spazio topologico T_0 separo due punti con un insieme aperto;
2. X si dice di tipo T_1 sse data una coppia di punti distinti x_1 e x_2 in X ciascun punto appartiene ad insieme aperto che non contiene l'altro ovvero in uno spazio topologico T_1 separo due punti con due insiemi aperti non necessariamente disgiunti;
3. X si dice di tipo T_2 (o di Hausdorff) sse data una coppia di punti distinti x_1 e x_2 in X ogni punto appartiene a un insieme aperto e tali insiemi sono disgiunti per cui $T_1 + \text{disgiunzione} = T_2$;
4. X si dice di tipo T_3 se è di tipo T_1 e in più soddisfa il seguente assioma di **regolarità**: dati un sottoinsieme chiuso $F \subset X$ e un punto $p \in X$ se $p \notin F$ allora esiste una coppia di insiemi aperti e disgiunti G ed H tali che $F \subset G$ e $p \in H$ (ovvero con due aperti disgiunti separo un punto da un insieme chiuso);
5. X si dice di tipo T_4 se è di tipo T_1 e in più soddisfa il seguente assioma di **normalità**: data una coppia di sottoinsiemi chiusi e disgiunti F_1 e F_2 di X esiste una coppia di sottoinsiemi aperti disgiunti G ed H di X tali che $F_1 \subset G$ e $F_2 \subset H$ (ovvero con due aperti disgiunti separo due chiusi disgiunti, ciascuno dei quali risulta "incapsulato" nell'aperto corrispondente);
6. X si dice **completamente regolare** sse soddisfa il seguente assioma: dato un sottoinsieme chiuso $F \subset X$ e un punto $p \in X$ con $p \notin F$ esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ che separa tali elementi ovvero tale che $f(p) = 0$ e $f[F] = \{1\}$;
7. se X è **completamente regolare** allora è **regolare**;

8. se X è completamente regolare e in più è T_1 lo si dice **spazio di Tychonoff** o anche spazio topologico di tipo $T_{3.5}$.

Nota A.54 Nella catena di inclusioni suddetta l'elemento più piccolo è costituito dagli spazi metrici $\mathcal{M}$. Sfruttando il fatto seguente:

$$A \supset B \Rightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A) \quad (606)$$

si ricava facilmente la corrispondente catena di implicazioni. Da tale catena si ha:

$$X \in \mathcal{M} \Rightarrow X \in \tau \quad (607)$$

ovvero uno spazio metrico è uno spazio topologico ma non vale il viceversa. Se infatti valesse anche il viceversa si avrebbe:

$$\mathcal{M} = \tau \quad (608)$$

e quindi, come ovvia conseguenza:

$$\tau = T_0 = T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \mathcal{M} \quad (609)$$

mentre abbiamo visto esempi di spazi topologici che di tipo T_0 che non sono di tipo T_1 e di spazi topologici che sono di tipo T_1 ma non di tipo T_2 .

Nota A.55 Nella Nota A.54 si è stabilita una relazione fra spazi metrici e spazi topologici. Per una trattazione dei secondi si rimanda alla sezione A.1 mentre per esempi relativi ai primi si rimanda alla sezione A.2. In questo contesto ci preme soltanto richiamare alcuni concetti base relativi agli spazi metrici e alla loro relazione con gli spazi topologici. Nei punti che seguono X è un insieme non vuoto qualunque, lettere maiuscole individuano suoi sottoinsiemi, a , b , x e simili individuano elementi di tali insiemi mentre d individua la funzione **distanza** o **metrica** definita, mediante assiomi ormai noti, su coppie di elementi di un insieme ma definibile anche fra un elemento e un insieme e fra due insiemi.

1. Dato un insieme X si definisce su di esso una **metrica** $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. In funzione di tale metrica si definiscono la distanza fra un punto x e un sottoinsieme non vuoto $A \subset X$ e fra due sottoinsiemi non vuoti $A \subset X$ e $B \subset X$.
3. Sempre in funzione di tale metrica si definiscono gli insiemi $S(p, \delta) = \{x \in X : d(p, x) < \delta\}$ detti palle aperte o sfere aperte di **centro** p e **raggio** $\delta > 0$.

4. La classe delle sfere aperte in X con la metrica d rappresenta una base per una topologia su X (nel senso che la loro unione coincide con X e l'intersezione di coppie di sfere è esprimibile come l'unione di elementi della base).
5. La topologia (detta **topologia metrica**) τ generata dalle sfere aperte definite dalla metrica d su un insieme non vuoto X è detta **topologia metrica** e la coppia (X, τ) è detta **spazio metrico** ed è di solito indicata come (X, d) . Uno spazio metrico è uno spazio topologico in cui la topologia è indotta da una metrica per cui i concetti validi per gli spazi topologici valgono anche per gli spazi metrici.
6. Si enunciano qui di seguito alcune proprietà delle topologie metriche rimandando a [Lip65], capitolo 8 per ulteriori dettagli.
 - (a) Se p è un punto in uno spazio metrico X la classe delle sfere aperte concentriche $\{S(p, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ è una base locale in p .
 - (b) Dato $A \subset X$ la sua chiusura $\bar{A}$ è l'insieme dei punti la cui distanza da A è nulla ovvero $\bar{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$.
 - (c) In uno spazio metrico X i singoletti sono insiemi chiusi per cui gli insiemi finiti⁷ (scrivibili come unione finita di singoletti ovvero di insiemi chiusi) sono chiusi.
 - (d) In uno spazio metrico X presi due sottoinsiemi chiusi disgiunti A e B esistono due sottoinsiemi aperti disgiunti G ed H tali che $A \subset G$ e $B \subset H$.
7. Dato un insieme X su di esso si possono definire due metriche d e d^* che sono dette **equivalenti** sse inducono la stessa topologia su X ovvero sse le sfere aperte di entrambe le topologie sono basi per una stessa topologia su X .
8. Dato uno spazio topologico (X, τ) ci si chiede se esista una metrica d su X che induce proprio quella topologia τ . Se tale metrica esiste lo spazio topologico (X, τ) si dice **metrizzabile**. Esempi di spazi metrizzabili sono:
 - (a) un qualunque insieme X con la topologia discreta dal momento che la metrica banale (quella che vale 0 se due elementi coincidono e 1 se sono diversi) su X induce proprio la topologia discreta;

⁷Un insieme si dice **finito** quando contiene un numero finito di elementi.

(b) $\mathbb{R}$ con la topologia usuale⁸ dal momento che la metrica usuale ($d(a, b) = |a - b|$) induce su $\mathbb{R}$ la topologia usuale.

Un esempio di spazio topologico non metrizzabile è X con la topologia indiscreta se X contiene più di un elemento. In questo caso si ha $\tau_I = \{X, \emptyset\}$ e X e $\emptyset$ sono i soli insiemi chiusi nello spazio topologico indiscreto mentre, per quanto visto in un punto precedente, in uno spazio metrico tutti gli insiemi finiti sono chiusi e quindi oltre a X e $\emptyset$ dovrei avere altri insiemi che, invece, non ci sono per cui in tal caso lo spazio topologico non è metrizzabile.

9. Nel caso di uno spazio vettoriale reale (ovvero a valori su $\mathbb{R}$) lineare V si può definire una **norma** su V in modo che V sia uno spazio normato. In funzione della norma si può definire una metrica indotta su V in modo che uno spazio normato con una metrica indotta sia uno spazio metrico e, pertanto, uno spazio topologico. Per altri dettagli si rimanda a [Lip65], capitolo 8.

A.5.2 Spazi topologici: assiomi di separazione

Esercizio A.32 Dato uno spazio topologico X lo si dice di tipo T_1 se ogni sottoinsieme singoletto di X è un insieme chiuso.

Soluzione

Si procede, come sempre in questi casi, in due passi:

1. X di tipo $T_1 \Rightarrow$ ogni sottoinsieme singoletto di X è un insieme chiuso;
2. ogni sottoinsieme singoletto di X è un insieme chiuso $\Rightarrow X$ di tipo T_1 .

Vediamo il punto 1.

Supponiamo X sia di tipo T_1 e prendiamo $p \in X$. Se si dimostra che $\{p\}^C$ è un insieme aperto si è dimostrata la tesi. Si prenda un punto $x \in \{p\}^C$ per cui $x \neq p$. Dal fatto che X è di tipo T_1 esiste un insieme aperto G_x tale che:

1. $x \in G_x$;
2. $p \notin G_x$.

Si ha quindi:

$$x \in G_x \subset \{p\}^C \tag{610}$$

⁸Nelle presenti note i termini **usuale** e **ordinaria** riferiti ad una topologia sono da intendersi come sinonimi.

per cui si ha:

$$\bigcup_{x \in \{p\}^C} G_x = \{p\}^C \quad (611)$$

ovvero $\{p\}^C$ è un insieme aperto perchè unione di insiemi aperti ovvero $\{p\}$ è un insieme chiuso da cui, per l'arbitrarietà di p , la tesi.

Vediamo il punto 2.

Si suppone che comunque scelgo $p \in X$ si ha che $\{p\}$ è un insieme chiuso. Si prendono ora due punti $a, b \in X$ tali che $a \neq b$. Per ipotesi so che $\{a\}$ e $\{b\}$ sono insiemi chiusi e quindi $\{a\}^C$ e $\{b\}^C$ sono insiemi aperti.

Si ha

1. $a \neq b \Rightarrow b \in \{a\}^C$ ovvero $\{a\}^C$ contiene b ma non a ;
2. $a \neq b \Rightarrow a \in \{b\}^C$ ovvero $\{b\}^C$ contiene a ma non b .

Da quanto detto segue che esistono due insiemi aperti non disgiunti che separano i singoletti ovvero soddisfano la definizione data in **Nota** per cui X è di tipo T_1 .

Nota

Dato un insieme X e un punto $x \in X$ un sottoinsieme singoletto è del tipo $\{x\} \subset X$. Uno spazio topologico X con una topologia τ si dice di tipo T_1 se data una coppia di punti distinti $a, b \in X$ si ha che ciascun punto è contenuto in un insieme aperto che non contiene l'altro ovvero, in modo più formale, esistono due insiemi aperti G, H in X (non necessariamente disgiunti) tali che:

1. $a \in G$ e $b \notin G$;
2. $b \in H$ e $a \notin H$.

Esempio A.62 Dato uno spazio topologico X di tipo T_1 si dimostri che ogni suo sottospazio è di tipo T_1 .

Sia (X, τ) uno spazio topologico di tipo T_1 e sia $Y \subset X$ tale che (Y, τ_Y) è un suo sottospazio. Se riesco a dimostrare che ogni singoletto $\{p\} \in Y$ è un insieme chiuso, dall'esercizio precedente ho dimostrato che Y è di tipo T_1 . Per dimostrare che ogni singoletto $\{p\} \in Y$ è un insieme chiuso posso dimostrare che il suo complemento, ovvero $Y \setminus \{p\}$, è un insieme aperto. Per fare ciò si procede nel modo seguente.

Dato che X è di tipo T_1 , dall'esercizio precedente si ha che $\{p\}$ è un insieme chiuso per cui $X \setminus \{p\}$ (il suo complemento) è un insieme aperto della topologia τ . Se $p \in Y \subset X$ allora $Y \cap (X \setminus \{p\}) = Y \setminus \{p\}$. Dalla definizione di sottospazio topologico (vedi la **Nota**) segue che $Y \setminus \{p\}$ è un insieme aperto nella topologia τ_Y ovvero $\{p\}$ (il suo complemento relativo) è un insieme

chiuso del sottospazio in modo che, sempre dall'esercizio precedente, si ha che (Y, τ_Y) è un sottospazio topologico di tipo T_1 .

Nota

Dato uno spazio topologico (X, τ) se prendo $A \subset X$ posso definire un sottospazio topologico definendo una topologia su A (detta **topologia relativa** e denotata con τ_A) come segue: gli insiemi H di τ_A sono dati dall'intersezione di A con gli insiemi G di τ .

Dal presente esercizio segue che il fatto di essere di tipo T_1 rappresenta una proprietà ereditabile degli spazi topologici ovvero rappresenta una proprietà che passa dagli spazi ai sottospazi.

Esercizio A.33 Dato uno spazio topologico (X, τ) di tipo T_1 si dimostri che un suo sottoinsieme finito non ha punti di accumulazione.

Soluzione

Supponiamo di avere un insieme $A \subset X$ con n elementi ovvero tale che $\#A = n$. Si ha:

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \quad (612)$$

Dato che in uno spazio topologico di tipo T_1 i singoletti sono insiemi chiusi e poichè posso scrivere:

$$A = \cup_{i=1}^n \{a_i\} \quad (613)$$

si ha che A è un insieme chiuso (unione finita di insiemi chiusi) e quindi contiene tutti i suoi punti di accumulazione (per definizione di insieme chiuso). In modo analogo si ha che:

$$A \setminus \{a_1\} = \{a_2, \dots, a_n\} \quad (614)$$

è finito e chiuso e (per motivi analoghi) contiene tutti i suoi punti di accumulazione. In più $\{a_2, \dots, a_n\}^C$ è aperto e contiene a_1 ma non contiene altri punti di A distinti da a_1 per cui a_1 non è un punto di accumulazione per A . Procedendo in modo analogo con gli altri punti a_i si dimostra che nessuno di essi è punto di accumulazione per A per cui A non ha punti di accumulazione ovvero $D(A) = \emptyset$. Si noti che ciò non è in contraddizione con il fatto che A è un insieme chiuso dato che si ha $\emptyset \subset A$ per ogni A e perciò anche per A di cardinalità finita.

Nota

Dato un insieme A un punto p è di **accumulazione** per A se per ogni insieme aperto G che contiene p si ha:

$$A \cap (G \setminus \{p\}) \neq \emptyset \quad (615)$$

Esempio A.63 Dato uno spazio topologico X di tipo T_1 e **finito** si dimostri che su di esso si ha una topologia discreta.

Dal fatto che X è di tipo T_1 discende che i singoletti sono insiemi chiusi per cui gli insiemi finiti (come unioni finite di insiemi chiusi) sono insiemi chiusi. Si ha inoltre che i complementi di tali insiemi sono in X (perchè unioni finite di insiemi singoletto chiusi) e sono aperti (perchè complemento di insiemi chiusi). In definitiva si ha che la topologia su X contiene insiemi che sono allo stesso tempo aperti e chiusi (e che sono distinti sia da X sia da $\emptyset$) per cui tale topologia è la topologia discreta.

Nota

Uno spazio topologico è **finito** se l'insieme di "sostegno" X ha cardinalità finita. Una topologia è detta essere **discreta** se coincide con la classe di tutti i sottoinsiemi dell'insieme X ovvero con l'insieme delle parti di X .

Esercizio A.34 Dato uno spazio topologico X di tipo T_1 si dimostri l'equivalenza delle seguenti proprietà:

1. $p \in X$ è un punto di accumulazione per A ;
2. ogni insieme aperto che contiene p contiene un numero infinito di punti di A .

Soluzione

Per dimostrare l'equivalenza si deve dimostrare che $1. \Rightarrow 2.$ e che $2. \Rightarrow 1.$. Dalla definizione di punto di accumulazione discende subito che $2. \Rightarrow 1.$ per cui non ci resta che dimostrare che $1. \Rightarrow 2.$

Per fare la dimostrazione si nega la tesi per cui si suppone di avere un insieme aperto G tale che $p \in G$ con G che contiene un numero finito di punti di A distinti da p . In questo modo si ha:

$$B = (G \setminus \{p\}) \cap A = \{a_1, \dots, a_n\} \quad (616)$$

con $a_i \in A$ per ogni i . In base ad osservazioni fatte più volte in passato B è chiuso (lo sono i singoletti e B lo è in quanto unione finita di singoletti) per cui B^C è aperto. Si ponga ora:

$$H = G \cap B^C \quad (617)$$

H contiene un numero finito di punti per costruzione (dal momento che G contiene un numero finito di punti e l'intersezione di un insieme finito con un insieme qualunque non può che essere un insieme finito), è aperto (perchè intersezione di due insiemi aperti) e non contiene punti di A distinti da p (per come ho costruito B^C) per cui p non è un punto di accumulazione per

A contro l'ipotesi. Si ha una contraddizione che si risolve facilmente non negando la tesi da cui discende che ogni insieme aperto che contiene il punto di accumulazione p contiene un numero infinito di punti di A .

Nota

Si sfrutta la definizione di punto di accumulazione p come associato ad un numero infinito di punti distinti da p in modo che non sia mai possibile trovare insiemi che non hanno punti distinti da p .

Esempio A.64 *Si abbia uno spazio topologico X di tipo T_1 e un punto $p \in X$. Se si ha una base locale $\mathcal{B}_p$ e si considera un punto $q \in X$ distinto da p si dimostri che esiste qualche elemento B_p della base $\mathcal{B}_p$ che non contiene q . Dato che $p \neq q$ e che X è di tipo T_1 esistono due insiemi aperti G ed H tali che:*

1. $p \in G$ ma $q \notin G$,
2. $p \notin H$ ma $q \in H$.

Si sfrutta ora la definizione di base locale $\mathcal{B}_p$ in modo che G sia soprainsieme di qualche $B_p \in \mathcal{B}_p$ ovvero:

$$G \supset B_p \quad (618)$$

per cui dalla:

$$q \notin G \supset B_p \quad (619)$$

discende che $q \notin B_p$.

Nota

Nell'esercizio si è fatto uso della seguente proprietà degli insiemi: se $A \subset B$ e $x \notin B$ allora $x \notin A$.

Si richiamano, inoltre, alcune definizioni.

1. *Dato uno spazio topologico X e un punto $p \in X$ una classe di insiemi aperti $\mathcal{B}_p$ si dice **base locale** in p sse per ogni insieme aperto G tale che $p \in G$ esiste un elemento B_p della base tale che $p \in B_p \subset G$.*
2. *Uno spazio topologico X è di tipo T_1 sse dati due punti distinti $a, b \in X$ ciascuno dei due è contenuto in un insieme aperto che non contiene l'altro.*

Esercizio A.35 *Supponiamo di avere uno spazio topologico X :*

1. *di tipo T_1 ,*
2. *primo contabile.*

Si dimostri che se $p \in X$ è un punto di accumulazione per $A \subset X$ allora si ha una successione di termini distinti di A che converge a p .

Soluzione

Supponiamo (vedi la **Nota**) di avere una base locale annidata $\mathcal{B}_p = \{B_n\}$ in $p \in X$. Si ponga $B_{i_1} = B_1$. Dato che p è un punto di accumulazione per A ho che B_{i_1} contiene almeno un punto a_1 distinto da p . Per l'esempio precedente esiste almeno un altro elemento della base, sia B_{i_2} , che non contiene a_1 ma che, essendo p di accumulazione per A , contiene un punto distinto da p e da a_1 , sia a_2 . Si può ripetere il ragionamento per a_2 in modo da individuare a_3 elemento di B_{i_2} e così via. In questo modo si hanno:

1. una successione di elementi di $\mathcal{B}_p$, B_{i_j} , che formano una base locale annidata, per definizione,
2. una successione di elementi $\{a_j\}$ distinti di A tali che $a_j \in B_{i_j}$.

Dato che la successione $\{B_{i_j}\}$ rappresenta una base locale annidata in p si ha che la corrispondente successione $\{a_j\}$ converge a p .

Nota

Si richiamano alcune definizioni.

1. Uno spazio topologico X si dice **primo contabile** se per ogni suo punto p esiste una base numerabile di insiemi aperti che contengono p , $\mathcal{B}_p$, tale che ogni insieme aperto G che contiene p contiene anche un elemento di $\mathcal{B}_p$. $\mathcal{B}_p$ si dice **base locale numerabile** in p , per ogni $p \in X$.
2. Una base locale numerabile $\mathcal{B}_p$ si dice, in più, **annidata** se:
 - (a) i suoi elementi possono essere indicati con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ in modo che sia $\mathcal{B}_p = \{B_i : i \in I \subset \mathbb{N}\}$;
 - (b) gli elementi così indicati sono totalmente ordinati per inclusione ovvero se è $B_i \supset B_{i+1}$ per $i \in I$.
3. Un punto $p \in X$ si dice di accumulazione per $A \subset X$ sse ogni insieme aperto G che contiene p contiene almeno un punto di A distinto da p ovvero sse $p \in G \Rightarrow A \cap (G \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.

Esempio A.65 Dato uno spazio topologico X di tipo T_2 (o di Hausdorff) si dimostri che ogni suo sottospazio è di tipo T_2 ovvero che tale proprietà è ereditata dai sottospazi.

In uno spazio topologico T_2 punti distinti appartengono a insiemi aperti disgiunti. Si abbia (X, τ) di tipo T_2 e sia (Y, τ_Y) con $Y \subset X$ un suo sottospazio topologico. Se prendo due punti distinti $a, b \in Y \subset X$ ho che (dalla definizione) esistono due insiemi aperti disgiunti G ed H tali che:

1. $a \in G$ e $a \notin H$,
2. $b \in H$ e $b \notin G$,
3. $G \cap H = \emptyset$.

Dalla definizione di topologia relativa si ha che:

1. $Y \cap G$,
2. $Y \cap H$

sono insiemi aperti in τ_Y . In più, per come ho preso i punti a, b , ho che:

1. $a \in (Y \cap G)$,
2. $b \in (Y \cap H)$

e:

$$G \cap H = \emptyset \Rightarrow (Y \cap G) \cap (Y \cap H) = Y \cap (G \cap H) = \emptyset \quad (620)$$

ovvero anche nella topologia relativa τ_Y ho che posso separare punti distinti con insiemi aperti disgiunti per cui anche il sottospazio Y è di tipo T_2 e, pertanto, tale proprietà **eredita ai sottospazi**.

Esempio A.66 Supponiamo di considerare la retta reale $\mathbb{R}$ con la topologia τ degli insiemi $(a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Si dimostri che lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau)$ è di tipo T_2 o di Hausdorff.

Si ricorda che uno spazio topologico è di tipo T_2 sse riesco a separare punti distinti con insiemi della topologia disgiunti. Se considero due punti $a \neq b$ senza perdita di generalità posso supporre $a < b$ e quindi considerare:

$$c = \frac{b+a}{2} \quad (621)$$

ovvero i due intervalli:

1. $G = (a, c]$
2. $H = (c, b]$

Si ha che:

1. $G, H \in \tau$;
2. $G \cap H = \emptyset$;

per cui lo spazio topologico è di tipo T_2 (come punti distinti posso considerare i punti di mezzo dei due intervalli).

Esempio A.67 Sia dato uno spazio topologico X . Se X è di tipo T_2 allora ogni successione convergente di elementi in X ammette un limite unico.

Le ipotesi sono:

1. X di tipo T_2 ;
2. si hanno successioni convergenti $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

Si vuole dimostrare che le successioni convergono ad un limite unico. Per fare ciò si suppone che una successione $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ converga a due limiti distinti: a e b . Siccome lo spazio topologico è di tipo T_2 allora si hanno due insiemi aperti G ed H tali che:

1. $a \in G$;
2. $b \in H$;
3. $G \cap H = \emptyset$.

Dato che la successione $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ converge ad $a \in G$ si ha che esiste un indice n_a tale che per $n > n_a$ $a_n \in G$. Dato che G ed H sono disgiunti ciò impedisce che la successione converga anche a b (dovrebbe infatti esistere un indice n_b tale che per $n > n_b$ $a_n \in H$ ma ciò non è possibile per come sono definiti G ed H). Dato che per ipotesi la successione converge anche a b l'unica possibilità è che sia $a = b$.

Esempio A.68 Supponiamo di avere uno spazio topologico X di tipo primo contabile. Si dimostri che le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. X è di tipo T_2 o di Hausdorff;
2. ogni successione convergente ha un limite unico.

Per dimostrare l'equivalenza si deve dimostrare che $1. \Rightarrow 2.$ e che $2. \Rightarrow 1.$

Per l'esempio precedente si ha $1. \Rightarrow 2.$

Vediamo l'altro punto ovvero $2. \Rightarrow 1.$ e procediamo per assurdo ovvero si suppone che X non sia di tipo T_2 in modo che presi due punti $a \neq b$ si ha che ogni insieme aperto G tale che $a \in G$ ha intersezione non vuota con ogni insieme aperto H tale che $b \in H$.

Se ora considero due basi annidate locali:

1. $a \in \{G_n\};$

2. $b \in \{H_n\};$

ho che, da quanto prima, discende che per ogni n si ha $G_n \cap H_n \neq \emptyset$ ovvero si ha una successione $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ tale che $a_i \in G_i \cap H_i$ per $i \in \mathbb{N}$ per cui la successione converge sia ad a che a b che abbiamo presi distinti. Si ha una contraddizione dato che, per ipotesi, ogni successione convergente ha un limite unico. Da tale contraddizione discende che è vera la tesi negata per cui X è di tipo T_2 .

A.5.3 Spazi topologici: compattezza, richiami di teoria

Si passa, ora, ad alcuni esercizi ed esempi relativi al concetto di **compattezza** e ai concetti ad esso correlati (quali **ricoprimento** e **ricoprimento finito**; **insiemi compatti** e loro sottoinsiemi e altri). Al proposito si richiamano alcune definizioni. Nel seguito con X si definisce uno spazio topologico, con A un suo sottoinsieme $A \subset X$ e con G_i sottoinsiemi aperti di X .

1. **Ricoprimento.** Un **ricoprimento aperto** di A è una classe $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi aperti G_i tale che $A \subset \cup_i G_i$. Se la classe $\mathcal{A}$ ha cardinalità finita si parla di **sottoricoprimento finito**. La classe $\mathcal{A}$ può avere anche cardinalità infinita per definizione di topologia su insiemi aperti.
2. **Insiemi compatti.** Il concetto di **compattezza** è riconducibile a quello di ricoprimento finito nel senso che $A \subset X$ è **compatto** sse ogni ricoprimento aperto di A contiene un sottoricoprimento finito ovvero, in modo più formale, se A è compatto ed ho $A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ (con G_i insiemi aperti) allora posso trovare un sottoricoprimento finito indicato da $I \subset \mathbb{N}$ tale che $A \subset \cup_{i \in I} G_i$ e viceversa. Dalla definizione segue che, per dimostrare che un insieme A non è compatto, basta trovare un ricoprimento da cui non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Al proposito si hanno i seguenti risultati:
 - (a) immagini continue di insiemi compatti sono insiemi compatti;
 - (b) la compattezza è una proprietà assoluta di un insieme nel senso che $A \subset X$ è compatto rispetto alla topologia τ su X sse A è compatto rispetto alla topologia relativa τ_A su A ;
 - (c) un sottoinsieme di un insieme compatto non è necessariamente compatto ma se si ha $F \subset X$ e F è chiuso e X è compatto allora anche F è compatto.

3. **Proprietà dell'intersezione finita.** Una classe di insiemi $\{A_i\}$ è detta godere di tale proprietà se ogni sottoclasse finita ha intersezione non vuota. In base a tale proprietà si può dare una ulteriore definizione di **compattezza** in termini dei sottoinsiemi chiusi di uno spazio topologico. Si ha la seguente definizione: uno spazio topologico X è compatto sse ogni classe $\{F_i\}$ di sottoinsiemi chiusi di X (con X che gode di tale proprietà) ha una intersezione non vuota.
4. **Legami fra compattezza e T_2 .** In merito al legame che esiste fra tali proprietà si hanno i seguenti risultati.

- (a) Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio topologico di tipo T_2 è chiuso.
- (b) Dato uno spazio topologico X di tipo T_2 e dati due sottoinsiemi di X compatti e disgiunti A e B allora esistono gli insiemi aperti e disgiunti tali che $A \subset G$ e $B \subset H$. Supponiamo che X sia:
 - i. di tipo T_2 ;
 - ii. compatto.

Se F_1 e F_2 sono sottoinsiemi chiusi e disgiunti di X allora sono compatti e, per il presente risultato, sono contenuti in insiemi aperti disgiunti. Da tutto ciò discende che X è uno spazio topologico di tipo **normale** in cui separo insiemi chiusi disgiunti con insiemi aperti disgiunti.

Dai risultati precedenti segue che:

- (a) gli **spazi metrici** e gli **spazi T_2 compatti** sono sottospazi della classe T_4 ovvero degli spazi **normali e T_1** ;
 - (b) se si ha una funzione continua e iniettiva da uno spazio topologico compatto X a uno spazio topologico di Hausdorff o T_2 allora X e $f(X)$ sono omeomorfi (per cui, ad esempio, immagini di insiemi connessi sono insiemi connessi).
5. **Compattezza per successioni.** Dato uno spazio topologico X un suo sottoinsieme A si dice **compatto per successioni** sse ogni successione di elementi in A contiene una sottosuccessione che converge a un punto $p \in A$.
6. **Insiemi numerabilmente compatti.** Dato uno spazio topologico X un suo sottoinsieme A si dice **contabilmente compatto** sse ogni sottoinsieme infinito $B \subset A$ ha un punto di accumulazione in A . Tale

definizione discende dal Teorema di Bolzano-Weierstrass che stabilisce che ogni insieme infinito e limitato di $\mathbb{R}$ ha almeno un punto di accumulazione. Fra le nozioni di **compattezza**, **compattezza numerabile** e **compattezza per successioni** si hanno le seguenti relazioni:

- (a) **compattezza** $\Rightarrow$ **compattezza numerabile**;
- (b) **compattezza per successioni** $\Rightarrow$ **compattezza numerabile**.

7. **Spazi localmente compatti.** Uno spazio topologico X si dice **localmente compatto** sse ogni suo punto ha un intorno compatto. Si nota che:

- (a) un insieme localmente compatto non è necessariamente compatto;
- (b) un insieme compatto è localmente compatto.

8. **Compattificazione.** Uno spazio topologico X è detto essere incastonato in uno spazio topologico Y se X è omeomorfo ad un sottospazio di Y ovvero se esiste una funzione f fra X e un sottospazio di Y che è un omeomorfismo ovvero è **bigettiva** e **bicontinua**. Se, in più, Y è compatto lo si dice una **compattificazione** di X . In pratica la compactificazione di uno spazio topologico X la si ottiene aggiungendo a X uno o più punti e definendo una topologia appropriata sull'insieme esteso in modo che tale spazio topologico esteso sia compatto e contenga X come suo sottospazio.

9. **Compattificazione di Alexandroff o di punto singolo.** Dato uno spazio topologico qualunque (X, τ) si definisce **compattificazione di Alexandroff o di punto singolo** la topologia (X_∞, τ_∞) come segue:

- (a) $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ dove ∞ rappresenta il punto detto punto all'infinito ed è distinto da ogni altro punto di X ;
- (b) τ_∞ contiene i seguenti insiemi:
 - i. tutti gli insiemi della topologia τ su X ;
 - ii. il complemento in X_∞ di ogni sottoinsieme chiuso e compatto di X .

La classe τ_∞ è una topologia su X_∞ e (X_∞, τ_∞) rappresenta una compactificazione di (X, τ) .

Si hanno le seguenti proprietà che legano lo spazio topologico esteso (X_∞, τ_∞) a (X, τ) :

- (a) se lo spazio topologico (x, τ) è localmente compatto e di tipo T_2 allora lo spazio esteso (X_∞, τ_∞) è uno spazio compatto di tipo T_2 ovvero è di tipo T_4 ;
 - (b) se E è un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico di tipo T_2 localmente compatto X e sia, inoltre, un sottoinsieme di un insieme aperto $G \neq X$ allora esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tale che:
 - i. $f[E] = \{0\}$,
 - ii. $f[G^c] = \{1\}$.
10. **Compattezza in spazi metrici.** Nel caso di uno **spazio metrico** X se A è un suo sottoinsieme si ha che le seguenti proprietà sono equivalenti:
- (a) A è compatto;
 - (b) A è contabilmente compatto;
 - (c) A è compatto per successioni.
11. **Insiemi totalmente limitati.** Dato uno spazio metrico X sia A un suo sottoinsieme. Si prenda $\varepsilon > 0$. Un insieme finito di punti $N = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ è detto essere una ε -rete per A se per ogni punto $p \in A$ esiste un elemento di $e_{i_0} \in N$ che dista da p per meno di ε ovvero tale che $d(p, e_{i_0}) < \varepsilon$. Si hanno i seguenti risultati:
- (a) un sottoinsieme A di uno spazio metrico X è **totalmente limitato** se possiede una ε -rete per ogni $\varepsilon > 0$;
 - (b) un insieme A è totalmente limitato sse per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione di A in un numero finito di insiemi ciascuno con diametro minore o uguale a ε (il diametro di un insieme è il *sup* della distanza di coppie di punti dell'insieme);
 - (c) un insieme limitato non è necessariamente totalmente limitato;
 - (d) un insieme totalmente limitato è limitato;
 - (e) insiemi compatti per successioni sono totalmente limitati.
12. **Numeri di Lebesgue per i ricoprimenti.** Sia $\mathcal{A} = \{G_i\}$ un ricoprimento di un sottoinsieme A di uno spazio metrico X . Un numero reale $\delta > 0$ è detto essere un numero di Lebesgue per il ricoprimento se per ogni sottoinsieme di A con un diametro inferiore a δ c'è un insieme del ricoprimento che lo contiene. Fra il concetto di compattezza e quello di numero di Lebesgue di un ricoprimento si ha la seguente relazione:

ogni ricoprimento aperto di un sottoinsieme compatto per successioni di uno spazio metrico ha un numero di Lebesgue positivo (ovvero non nullo).

A.5.4 Spazi topologici: compattezza, esercizi ed esempi

Dopo aver richiamato le nozioni di base si passa agli esercizi ed agli esempi.

Esempio A.69 *Si abbia uno spazio topologico compatto X e sia F un sottoinsieme chiuso di X . Si dimostri che F è compatto.*

Supponiamo di avere un ricoprimento aperto per F , $\mathcal{G} = \{G_i\}_i$, in modo che sia:

$$F \subset \cup_i G_i \quad (622)$$

Da tale relazione e dal fatto che X è compatto segue che si ottiene un ricoprimento aperto per X semplicemente aggiungendo F^C (insieme aperto perchè F è chiuso per ipotesi) in modo che sia:

$$X = \cup_i G_i \cup F^C \quad (623)$$

In questo modo ho un ricoprimento per X dato da $\mathcal{G}^ = \{G_i\}_i \cup \{F^C\}$. A questo punto sfrutto il fatto che X è compatto per cui si ha un sottoricoprimento finito per X in modo che sia:*

$$X = \cup_{i \in I} G_i \cup F^C \quad (624)$$

Dal momento che F e F^C sono insiemi disgiunti per definizione e che $F \subset X$ si ha che:

$$F \subset \cup_{i \in I} G_i \quad (625)$$

Si è pertanto dimostrato che ogni ricoprimento per F contiene un sottoricoprimento finito per F per cui F è compatto.

Esercizio A.36 *Si abbia un insieme X qualunque su cui è definita la topologia cofinita τ . Si dimostri che (X, τ) è uno spazio topologico compatto.*

Soluzione

*Partendo dal fatto che gli insiemi contenuti in τ (vedi la **Nota**) hanno complemento finito si deve dimostrare la compattezza ovvero che da ogni ricoprimento di X , con insiemi di τ , si può estrarre un sottoricoprimento finito.*

Suppongo di avere un ricoprimento aperto $\mathcal{G} = \{G_i\}_i$ di X ovvero:

$$X = \cup_i G_i \quad (626)$$

Prendo ora un insieme qualunque del ricoprimento, sia $G_0 \in \mathcal{G}$. Dato che $G_0 \in \tau$ (topologia cofinita) G_0^C è un insieme finito di elementi di X . Ad esempio sia:

$$G_0^C = \{a_1, \dots, a_m\} \quad (627)$$

Dal momento che $\mathcal{G}$ è un ricoprimento di X si ha che ognuno degli elementi di G_0^C appartiene ad un insieme G_{i_k} del ricoprimento. Essendo G_0^C finito si ha che il numero di tali insiemi è finito in modo che si possa scrivere:

$$G_0^C \subset \cup_{i_k} G_{i_k} \quad (628)$$

A questo punto si sfrutta il fatto che si può scrivere (ricordando che G_0 e G_0^C sono insiemi disgiunti per definizione):

$$X = G_0 \cup G_0^C = G_0 \cup (\cup_{i_k} G_{i_k}) \quad (629)$$

Si ha che da un ricoprimento di X si è estratto un sottoricoprimento finito per cui X è compatto.

Nota

La **topologia cofinita** su un insieme X è composta da tutti i sottoinsiemi di X i cui complementi sono finiti più $\emptyset$.

Uno spazio topologico è compatto se l'insieme di "appoggio" X è compatto.

Esercizio A.37 Si abbia uno spazio topologico discreto X . Si dimostri che un suo sottoinsieme infinito A non è compatto.

Soluzione

Lo spazio topologico che abbiamo è quello con la topologia discreta per cui i singoletti sono insiemi aperti della topologia. Suppongo di avere A infinito per cui posso scrivere:

$$A = \cup \{a\} \quad (630)$$

per ogni $a \in A$. Ho, quindi, un ricoprimento aperto di A che è infinito dal momento che lo è A . Se da tale ricoprimento tolgo anche un solo elemento ho che non ricopro più A per cui non ho nessun sottoricoprimento finito estraibile dal ricoprimento definito dai singoletti e, quindi (vedi la **Nota**), A non è compatto.

Nota

Uno spazio topologico discreto (in breve spazio discreto) è un insieme X su cui è definita la topologia discreta ovvero quella i cui aperti sono tutti i sottoinsiemi aperti di X .

Dalla definizione di compattezza discende che per dimostrare che un sottoinsieme non è compatto basta trovarne un ricoprimento che non ammette un sottoricoprimento finito.

Dato un insieme finito questo è sempre compatto. In più si ha che un sottoinsieme di uno spazio discreto è compatto sse è finito.

Esercizio A.38 *Sia dato uno spazio topologico (X, τ) . Sia $A \subset X$. Si dimostri l'equivalenza delle due seguenti proprietà:*

1. *A è compatto rispetto a τ ;*
2. *A è compatto rispetto alla topologia relativa τ_A su A .*

Soluzione

La dimostrazione viene fatta in due tempi ovvero si dimostra che la prima proprietà implica la seconda e poi che la seconda implica la prima.

1. $\Rightarrow$ 2.

Si considera A rispetto alla topologia τ_A . Rispetto a tale topologia esiste un ricoprimento di A con un numero qualunque di aperti G_i in modo che sia:

$$A \subset \cup_i G_i \quad (631)$$

Dalla definizione di topologia relativa (vedi a **Nota**) si ha che gli insiemi aperti $G_i \in \tau_A$ sono definiti in termini di insiemi aperti H_i di τ come:

$$G_i = A \cap H_i \subset H_i \quad (632)$$

in modo che sia:

$$A \subset \cup_i G_i \subset \cup_i H_i \quad (633)$$

In questo modo si ha che $\{H_i\}_i$ è un ricoprimento aperto di A . Per ipotesi A è compatto in τ per cui esiste un insieme di indici I che individua un sottoricoprimento finito in modo che si possa scrivere:

$$A \subset \cup_{i \in I} H_i \quad (634)$$

Si ha quindi dall'equazione precedente:

$$A \subset A \cap (\cup_{i \in I} H_i) = \cup_{i \in I} (A \cap H_i) = \cup_{i \in I} G_i \quad (635)$$

Si ha pertanto che il ricoprimento $\{G_i\}$ contiene un sottoricoprimento finito e perciò A è compatto nella topologia τ_A .

2. $\Rightarrow$ 1.

Supponiamo di avere un ricoprimento aperto $\{H_i\}_i$ di A in τ e si definiscono gli insiemi G_i di τ_A come:

$$G_i = A \cap H_i \quad (636)$$

Se (per definizione di ricoprimento) $A \subset \cup_i H_i$ allora $A \subset A \cap (\cup_i H_i) = \cup_i (A \cap H_i) = \cup_i G_i$. Si ha quindi un ricoprimento di A in τ_A . Ma A è compatto

in τ_A per cui esiste un insieme di indici I che individua un sottoricoprimento finito in modo che si possa scrivere (sfruttando la definizione dei G_i):

$$A \subset \cup_{i \in I} G_i = \cup_{i \in I} (A \cap H_i) = A \cap (\cup_{i \in I} H_i) \subset \cup_{i \in I} H_i \quad (637)$$

Da tale catena di relazioni segue che dal ricoprimento aperto $\{H_i\}_i$ di A in τ si è estratto un sottoricoprimento finito per cui si ha che A è compatto in τ .

Nota

Dato lo spazio topologico (X, τ) e un sottoinsieme $A \subset X$ si definisce **topologia relativa** o **topologia indotta** su A come la topologia i cui insiemi aperti H sono ottenuti dalla intersezione di A con insiemi della topologia τ ovvero come $H = G \cap A$ con $G \in \tau$.

Si nota che in questo esercizio si sono utilizzate le seguenti proprietà degli insiemi:

1.

$$A \cap B \subset B \quad (638)$$

2.

$$A \subset B \Rightarrow A \subset A \cap B \quad (639)$$

Esempio A.70 Dato uno spazio topologico X si dimostri che le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. X è compatto;

2. data una classe $\{F_i\}$ di sottoinsiemi chiusi di X se $\cap_i F_i = \emptyset$ allora esiste un sottoinsieme finito di indici I tale che $\cap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

Si deve dimostrare che:

- 1. $\Rightarrow$ 2.,
- 2. $\Rightarrow$ 1..

1. $\Rightarrow$ 2.

Supponiamo di avere una classe $\{F_i\}$ di sottoinsiemi chiusi di X tale che $\cap_i F_i = \emptyset$. Si può scrivere:

$$X = \emptyset^C = (\cap_i F_i)^C = \cup_i F_i^C \quad (640)$$

in cui gli insiemi F_i^C sono aperti, essendo gli F_i chiusi per ipotesi. Si ha un ricoprimento aperto di X che per ipotesi è compatto per cui esiste un insieme

finito di indici I che definisce un sottoricoprimento finito di X in modo che si possa scrivere:

$$X = \cup_{i \in I} F_i^C \quad (641)$$

Complementando $m.$ a $m.$ ed usando le leggi di De Morgan si ha:

$$\emptyset = \cap_{i \in I} F_i \quad (642)$$

da cui la tesi.

2. $\Rightarrow$ 1.

Supponiamo di avere un ricoprimento aperto $\{G_i\}$ di X in modo da scrivere:

$$X = \cup_i G_i \quad (643)$$

Se si complementa $m.$ a $m.$ e si usano le leggi di De Morgan si ha:

$$\emptyset = \cap_i G_i^C \quad (644)$$

in cui, per costruzione, i G_i^C sono insiemi chiusi. Per ipotesi esiste una sottoclasse finita (individuata da un insieme di indici I) $\{G_i\}_{i \in I}$ tale che:

$$\cap_{i \in I} G_i = \emptyset \quad (645)$$

complementando $m.$ a $m.$ ed usando le leggi di De Morgan si ha:

$$X = \cup_{i \in I} G_i \quad (646)$$

ovvero il ricoprimento aperto $\{G_i\}$ ammette un sottoricoprimento finito per cui, data l'arbitrarietà di $\{G_i\}$, si ha che X è compatto.

Esempio A.71 Dato uno spazio topologico X si dimostri che X è compatto sse ogni classe $\{F_i\}$ di sottoinsiemi chiusi di X che soddisfa la proprietà dell'intersezione finita ha, essa stessa, una intersezione non vuota.

Dall'esempio precedente si ha che la compattezza di X equivale al fatto che se si ha una classe di sottoinsiemi chiusi di X la cui intersezione è vuota allora esiste una sottoclasse finita che gode della stessa proprietà.

Nel caso presente si ha una classe qualunque $\{F_i\}$ di sottoinsiemi chiusi di X e si deve dimostrare che:

1. se una sottoclasse finita (individuata come di solito da I) ha intersezione non vuota allora lo stesso vale per la classe $\{F_i\}$ ovvero, in modo formale:

$$\cap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \Rightarrow \cap_i F_i \neq \emptyset \quad (647)$$

2. se la classe $\{F_i\}$ ha intersezione vuota lo stesso vale per una sua sottoclasse ovvero se:

$$\cap_i F_i = \emptyset \quad (648)$$

allora esiste I tale che:

$$\cap_{i \in I} F_i = \emptyset \quad (649)$$

Se la seconda proposizione la si vede come $A \Rightarrow B$ la prima può essere vista come $\neg B \Rightarrow \neg A$ ovvero sono equivalenti. In più la seconda equivale alla compattezza, per quanto visto nell'esempio precedente, da cui la tesi.

Nota

Una classe di insiemi $\{A_i\}$ gode della **proprietà dell'intersezione finita** se ogni sottoclasse finita $\{A_i\}_{i \in I}$ ha una intersezione non vuota ovvero è tale che:

$$\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset \quad (650)$$

per ogni insieme finito di indici I .

Esercizio A.39 Si abbia uno spazio topologico di Hausdorff (ovvero di tipo T_2) X e sia $A \subset X$ un sottoinsieme compatto. Se $p \in X \setminus A$ dimostrare che esistono gli insiemi aperti G ed H tali che:

1. $p \in G$;
2. $A \subset H$;
3. $G \cap H = \emptyset$.

Soluzione

Mi metto nelle condizioni della definizione di uno spazio topologico T_2 ovvero:

1. prendo $a \in A$,
2. considero $p \in A^C$,

ovvero $a \neq p$. Dalla definizione di spazio topologico T_2 segue che esistono due insiemi aperti G_a e H_a tali che:

1. $a \in G_a$,
2. $p \in H_a$,
3. $G_a \cap H_a = \emptyset$

Al variare di a in A con gli aperti H_a si ricopre A ovvero si ha:

$$A \subset \cup_{a \in A} H_a \quad (651)$$

in modo che la classe $\{H_a\}_{a \in A}$ sia un ricoprimento di A . Poichè A è compatto per ipotesi, so che esiste un insieme finito di indici I che ne individua un sottoricoprimento finito in modo che sia:

$$A \subset \cup_{i \in I} H_{a_i} \quad (652)$$

A questo punto si definiscono i seguenti insiemi:

$$1. H = \cup_{i \in I} H_{a_i}$$

$$2. G = \cap_{i \in I} G_{a_i}$$

entrambi aperti perchè, rispettivamente, unione di insiemi aperti H_{a_i} e intersezione finita di insiemi aperti G_{a_i} . Inoltre si ha che:

$$1. A \subset H \text{ per costruzione,}$$

$$2. p \in G \text{ dato che, per costruzione, } p \in G_{a_i} \text{ per ogni } i \in I.$$

Resta da dimostrare che $G \cap H = \emptyset$. Sappiamo che, per costruzione, $G_a \cap H_a = \emptyset$ per cui ciò vale anche per le sottoclassi e, quindi, si ha $G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset$. Da tale relazione e dalla definizione di G segue che si ha:

$$G \cap H_{a_i} = \emptyset \quad (653)$$

Sfruttando la distributività dell'intersezione rispetto all'unione si ha:

$$G \cap H = G \cap (\cup_{i \in I} H_{a_i}) = \cup_{i \in I} (G \cap H_{a_i}) = \cup_{i \in I} \emptyset = \emptyset \quad (654)$$

Nota

Uno spazio topologico X è di tipo T_2 sse punti distinti appartengono a insiemi aperti disgiunti. Un sottoinsieme è compatto se per ogni suo ricoprimento ne esiste un sottoricoprimento finito.

Nell'esercizio si sfrutta la definizione di spazio topologico T_2 per definire le classi di insiemi disgiunti e la compattezza per individuare le opportune sottoclassi.

Esempio A.72 Si abbia uno spazio topologico X di Hausdorff (o di tipo T_2) e sia $A \subset X$ un sottoinsieme compatto. Si dimostri che A è chiuso.

Essendo X di tipo T_2 si possono separare punti distinti con insiemi aperti disgiunti. In più si sa che A è compatto ovvero che per ogni suo ricoprimento

aperto ne esiste un sottoricoprimento finito.

Prima di procedere si dimostra un risultato preliminare che sfrutta quanto visto nell'esercizio precedente.

Si vuole dimostrare che se $A \subset X$ è compatto e X è di tipo T_2 e si prende $p \notin A$ allora esiste un insieme aperto G tale che $p \in G \subset A^C$.

Nell'esercizio precedente si è visto che esistono due insiemi aperti G ed H tali che:

1. $p \in G$,
2. $A \subset H$,
3. $G \cap H = \emptyset$,

per cui $G \cap A = \emptyset$ e, quindi, $p \in G \subset A^C$.

Allo scopo di dimostrare che A è chiuso si può dimostrare che A^C è aperto.

Per fare ciò si cerca di scriverlo come unione qualunque di insiemi aperti.

Per sfruttare i risultati precedenti considero un punto $p \in A^C$ in modo che $p \notin A$. Per il risultato preliminare esiste un insieme aperto G_p tale che:

$$p \in G_p \subset A^C \quad (655)$$

in modo che si possa scrivere:

$$A^C = \cup_{p \in A^C} G_p \quad (656)$$

da cui discende che A^C è aperto, essendo unione di un numero qualunque di insiemi aperti, ovvero A è un insieme chiuso. Il fatto che A sia compatto è stato sfruttato per ricavare i due insiemi aperti disgiunti G ed H , il primo dei quali contiene un punto e l'altro l'insieme compatto.

Esercizio A.40 Si abbiano un insieme E compatto e un altro F chiuso. Si dimostri che $E \cap F$ è compatto.

Soluzione

Date le premesse esplicitate nella **Nota** si esaminano i vari casi possibili.

1. $E \subset F$: in questo caso $E \cap F = E$ per cui si è finito essendo E compatto per ipotesi.
2. $F \subset E$: si suppone di avere un ricoprimento aperto per F ovvero $F \subset \cup_i G_i$, si estende il ricoprimento a E aggiungendo F^C , aperto per definizione essendo F chiuso, in modo che sia $E \subset \cup_i G_i \cup F^C$. A questo punto si sfrutta il fatto che E è compatto per estrarre un sottoricoprimento aperto finito di E :

$$E \subset \cup_{i \in I} G_i \cup F^C \quad (657)$$

Essendo F e F^C disgiunti si ha:

$$F \subset \cup_{i \in I} G_i \quad (658)$$

ovvero dal ricoprimento aperto $\cup_i G_i$ di F si è estratto un sottoricoprimento aperto finito di F per cui F è compatto. A questo punto si osserva che $E \cap F = F$ da cui la tesi.

3. $F \cap E = \emptyset$: in questo caso la tesi è banalmente verificata.
4. In questo caso nessuna delle ipotesi dei casi precedenti è vera. Si suppone di avere un ricoprimento di aperti per $E \cap F$ ovvero si suppone che sia:

$$E \cap F \subset \cup_i G_i \quad (659)$$

dove i G_i sono sottoinsiemi aperti di X . È possibile estendere tale ricoprimento a E aggiungendo F^C (aperto per definizione essendo F chiuso) in modo che sia:

$$E \subset \cup_i G_i \cup F^C \quad (660)$$

A questo punto si sfrutta la compattezza di E per estrarre un sottoricoprimento finito determinato da un insieme di indici I e si sfrutta il fatto che F^C e $E \cap F$ sono insiemi disgiunti (si ricordi che $E \cap F \subset F$) per scrivere:

$$E \cap F \subset \cup_{i \in I} G_i \quad (661)$$

ovvero dal ricoprimento aperto originario si è estratto un sottoricoprimento finito per cui $E \cap F$ è compatto.

Nota

In questo esercizio non sono note le relazioni fra i vari insiemi E ed F e si suppone soltanto che siano sottoinsiemi di uno spazio topologico X di cui non si sa nulla.

Esempio A.73 Si abbia uno spazio topologico di tipo T_2 o di Hausdorff. Dati due sottoinsiemi compatti e disgiunti A e B di X si dimostri che esistono due sottoinsiemi aperti e disgiunti G ed H tali che $A \subset G$ e $B \subset H$.

Si parte dal fatto che A e B sono disgiunti per cui se si prende $a \in A$ si ha $a \notin B$. Si sfrutta poi il fatto che B è compatto per cui, per quanto visto in un precedente esercizio, esistono gli insiemi aperti G_a e H_a tali che:

1. $a \in G_a$,
2. $B \subset H_a$,

$$3. G_a \cap H_a = \emptyset.$$

Dal momento che $a \in G_a$ si ha che la classe di tali insiemi è un ricoprimento aperto per A . Dato che A è compatto si ha un sottoricoprimento finito individuato da un insieme di indici I in modo che sia:

$$A \subset \cup_{i \in I} G_{a_i} \quad (662)$$

In più si ha che:

$$B \subset \cap_{i \in I} H_{a_i} \quad (663)$$

per definizione degli insiemi H_{a_i} . A questo punto si definiscono i seguenti insiemi:

$$1. G = \cup_{i \in I} G_{a_i},$$

$$2. H = \cap_{i \in I} H_{a_i},$$

aperti perchè, rispettivamente, unione e intersezione di insiemi aperti. In più, per costruzione, si ha che:

$$1. A \subset G,$$

$$2. B \subset H,$$

per cui resta da dimostrare che tali insiemi sono disgiunti ovvero che si ha $G \cap H = \emptyset$. Per prima cosa dal fatto che $G_a \cap H_a = \emptyset$ segue che $G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset$ ovvero $G_{a_i} \cap H = \emptyset$. A questo punto si sfrutta la distributività dell'intersezione rispetto all'unione e si ha:

$$G \cap H = (\cup_{i \in I} G_{a_i}) \cap H = \cup_{i \in I} (G_{a_i} \cap H) = \cup_{i \in I} \emptyset = \emptyset \quad (664)$$

Nota

Se uno spazio topologico è sia di tipo T_2 e compatto e si hanno due sottoinsiemi chiusi e disgiunti F_1 e F_2 abbiamo visto che F_1 e F_2 sono compatti e, per la presente proprietà, contenuti in insiemi aperti disgiunti per cui lo spazio topologico risulta essere di tipo T_4 o normale.

In questo esercizio, ma anche in altri, si è fatto uso della seguente proprietà degli insiemi:

se $A \cap B_i = \emptyset$ e se $B = \cap_i B_i$ allora $A \cap B = \emptyset$.

A.5.5 Spazi topologici: spazi prodotto, teoria ed esercizi

Per prima cosa si definisce la **topologia prodotto**. La si definisce per passi:

1. si suppone di avere gli insiemi X_i , $i \in I \subset N$;
2. si definisce il loro prodotto cartesiano $X = \prod_i X_i$ in modo che X sia formato dai punti $p = \langle a_i \mid i \in I \rangle$ con $a_i \in X_i$;
3. per ogni $j_0 \in I$ si definisce la **funzione proiezione** π_{j_0} dallo spazio prodotto X allo spazio coordinato X_{j_0} come:

$$\pi_{j_0} : X \longrightarrow X_{j_0} \quad (665)$$

in modo che sia:

$$\pi_{j_0}(a) = a_{j_0} \quad (666)$$

4. si usano le funzioni proiezione per definire la topologia prodotto nel modo seguente: si abbiano gli spazi topologici $\{X_i, \tau_i\}$ e sia $X = \prod_i X_i$. La topologia più grossolana τ su X rispetto alla quale tutte le proiezioni $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ sono continue si dice **topologia prodotto** o di Tychonoff. L'insieme prodotto X caratterizzato dalla topologia prodotto τ (ovvero (τ, X)) si dice **spazio prodotto**.

In altre parole la topologia prodotto τ sull'insieme prodotto X è la topologia generata dalle funzioni proiezione π_i .

Esempio A.74 *Nel piano Cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le funzioni proiezione inversa:*

$$1. \pi_1^{-1}(a, b)$$

$$2. \pi_2^{-1}(a, b)$$

rappresentano le strisce illimitate aperte nel piano, mappano aperti su aperti (in modo che π_1 e π_2 siano funzioni continue) e costituiscono una sottobase per la topologia usuale su $\mathbb{R}^2$ dal momento che con tali strisce posso coprire $\mathbb{R}^2$. La topologia usuale su $\mathbb{R}^2$ è generata dalle proiezioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. In questo modo si è visto che la topologia usuale su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è la topologia prodotto.

A.5.6 Spazi topologici: spazi connessi, teoria ed esercizi

Per prima cosa si richiama il concetto di connessione. Si può dire che uno spazio topologico è **connesso** sse non è **disconnesso** ovvero sse non è dato dalla unione di due sottoinsiemi aperti, non vuoti e disgiunti.

In modo equivalente si ha che uno spazio topologico X è connesso sse gli unici sottoinsiemi che sono contemporaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$. Vediamo di caratterizzare gli insiemi connessi anche in un altro modo.

Si abbia uno spazio topologico X e due suoi sottoinsiemi A, B . Si dice che tali sottoinsiemi sono separati sse valgono le proprietà seguenti:

1. $A \cap B = \emptyset$ ovvero sono disgiunti;
2. nessuno dei due contiene punti di accumulazione dell'altro.

Ricordando che se $D(A)$ rappresenta il derivato di A ovvero l'insieme dei suoi punti di accumulazione e che si ha:

$$\bar{A} = A \cup D(A) \quad (667)$$

le condizioni suddette si possono anche scrivere come segue:

1. $\bar{A} \cap B = \emptyset$,
2. $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Esempio A.75 *Si considerino i seguenti intervalli in $\mathbb{R}$:*

1. $A = (0, 1)$,
2. $B = (1, 2)$,
3. $C = [2, 3]$.

Dalla definizione di chiusura si ottiene facilmente che:

1. $\bar{A} = [0, 1]$,
2. $\bar{B} = [1, 2]$,
3. $\bar{C} = [2, 3]$,

per cui:

1. A e B sono separati, essendo $\bar{A} \cap B = [0, 1] \cap (1, 2) = \emptyset$ e $A \cap \bar{B} = (0, 1) \cap [1, 2] = \emptyset$;

2. A e C sono separati, lo si vede in modo analogo;
3. B e C non sono separati dal momento che $\bar{B} \cap C = [1, 2] \cap [2, 3) = \{2\} \neq \emptyset$ e $\{2\}$ è punto di accumulazione sia per B sia per C .

Esempio A.76 Dato il piano $\mathbb{R}^2$ si possono considerare gli insiemi:

1. $A = \{< 0, y > : 1/2 \leq y \leq 1\}$
2. $B = \{< x, y > : y = \text{sen}(1/x), 0 \leq x \leq 1\}$

Ogni punto di A è un punto di accumulazione per B per cui $A \subset D(B)$ e quindi $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ per cui i due insiemi non sono separati.

Dopo aver definito il concetto di insiemi separati (che riguarda coppie di insiemi) si passa al concetto di insiemi connessi (che riguarda singoli insiemi). Un insieme si dice **connesso** sse non è **disconnesso**. Un insieme A di uno spazio topologico X si dice **disconnesso** se esistono gli insiemi aperti G ed H di X tali che:

1. $A \cap G \neq \emptyset$,
2. $A \cap H \neq \emptyset$,
3. $(A \cap G) \cap (A \cap H) = \emptyset$,
4. $(A \cap G) \cup (A \cap H) = A$.

Si dice che $G \cup H$ è una disconnessione di A . Considerando le prime due condizioni, le ultime due condizioni possono essere riscritte come:

1. $A \cap (G \cap H) = \emptyset$ che equivale a $(G \cap H) \subset A^c$,
2. $A = A \cap (G \cup H)$ che equivale a $A \subset G \cup H$.

Da quanto osservato discende che $G \cup H$ è una disconnessione di A sse valgono le condizioni seguenti:

$$1. \quad A \cap G \neq \emptyset \quad (668)$$

$$2. \quad A \cap H \neq \emptyset \quad (669)$$

$$3. \quad A \subset G \cup H \quad (670)$$

4.

$$(G \cap H) \subset A^C \quad (671)$$

Nota A.56 *Gli insiemi:*

1. $\emptyset$,2. $\{p\}$ per ogni $p \in X$,

sono banalmente connessi.

Esempio A.77 *Se in $\mathbb{R}^2$ si considera l'insieme:*

$$A = \{(x, y) : x^2 - y^2 \geq 4\} \quad (672)$$

La relazione che caratterizza l'insieme può essere scritta come:

$$x^2 \geq y^2 + 4 \quad (673)$$

ovvero:

$$\begin{cases} \text{se } x > 0 & x \geq \sqrt{y^2 + 4} \\ \text{se } x < 0 & x \leq -\sqrt{y^2 + 4} \end{cases} \quad (674)$$

Al variare di y su $\mathbb{R}$ dalla prima condizione si ha $x \geq 2$ mentre dalla seconda si ha $x \leq -2$. È facile vedere come si possano trovare gli insiemi aperti $G = \{(x, y) : x < -1\}$ ed $H = \{(x, y) : x > 1\}$ che soddisfano le condizioni suddette per cui A risulta sconnesso.

Esempio A.78 *Dato un insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topologia:*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{c\}\} \quad (675)$$

si vuole dimostrare che $A = \{a, d, e\}$ è sconnesso.

Lo si vede facilmente verificando se sono soddisfatte le condizioni 668 e seguenti. Se si prendono gli insiemi aperti:

1. $G = \{a, b, c\}$ 2. $H = \{c, d, e\}$

si vede facilmente che:

1. $A \cap G = \{a\} \neq \emptyset$;2. $A \cap H = \{d, e\} \neq \emptyset$;3. $G \cup H = X$ e $A \subset X$ per definizione;

$$4. G \cap H = \{c\} \subset A^C = \{b, c\}$$

per cui A risulta sconnesso. In questo caso G ed H non sono disgiunti.

Vediamo ora alcune proprietà degli insiemi connessi e della relazione fra connessività e separazione. Si ha:

1. un insieme $A \subset X$ è connesso sse non lo si può scrivere come l'unione di due insiemi disgiunti e non vuoti (che possono essere sia aperti sia chiusi sia in combinazioni miste);
2. se A e B sono insiemi connessi non separati allora $A \cup B$ è connesso;
3. se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico (X, τ) allora A è connesso rispetto a τ sse è connesso rispetto alla topologia relativa τ_A ;
4. dal punto precedente discende che ci si può limitare allo studio della connessione in spazi topologici che sono essi stessi connessi e sono detti spazi connessi;
5. uno spazio topologico X è connesso sse vale una delle due proprietà seguenti (fra loro equivalenti):
 - (a) X non è scrivibile come l'unione di due sottoinsiemi aperti disgiunti e non vuoti;
 - (b) gli unici sottoinsiemi di X che sono contemporaneamente aperti e chiusi sono soltanto X e $\emptyset$.

Esempio A.79 Supponiamo di avere uno spazio topologico X sconnesso e sia $G \cup H$ una sua sconnessione. Per le proprietà viste si ha:

1. $X = (X \cap G) \cup (X \cap H)$,
2. $(X \cap G) \cap (X \cap H) = \emptyset$

Per definizione di spazio topologico si ha:

1. $G \subset X$ per cui $G \cap X = G$,
2. $H \subset X$ per cui $H \cap X = H$

per cui X è sconnesso sse esistono gli insiemi aperti non vuoti e disgiunti G ed H tali che:

1. $X = G \cup H$;

$$2. G \cap H = \emptyset.$$

Esempio A.80 Si abbia il seguente insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topologia:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \quad (676)$$

Si verifica facilmente che X è sconnesso dal momento che posso prendere $G = \{a\}$ e $H = \{b, c, d, e\}$ tali che $X = G \cup H$ e $G \cap H = \emptyset$.

Considero $A = \{b, d, e\}$ e la topologia relativa:

$$\tau_A = \{A, \emptyset, \{d\}\} \quad (677)$$

Dal momento che gli unici insiemi che sono contemporaneamente aperti e chiusi nella topologia relativa sono A e $\emptyset$ (dato che $\{d\}$ è aperto ma non chiuso) segue subito, per quanto osservato in precedenza, che A è connesso nella topologia relativa.

Esempio A.81 Si abbia $\mathbb{R}$ con la topologia usuale (ovvero la topologia degli insiemi aperti su $\mathbb{R}$). Dato che gli unici insiemi della topologia che sono contemporaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ si ha immediatamente che $\mathbb{R}$ è un insieme connesso.

Esempio A.82 Si abbiano due spazi topologici:

1. X connesso,
2. Y su cui non si fa nessuna ipotesi,

e si consideri una funzione continua:

$$f : X \longrightarrow f[X] \quad (678)$$

in modo che su $f[X]$ si abbia la topologia relativa. Si vuole dimostrare che $f[X]$ è connesso. Si fa una dimostrazione per assurdo ovvero si suppone che $f[X]$ non sia connesso e si deriva una contraddizione con qualche condizione ipotizzata vera, in questo caso il fatto che X è connesso.

Se $f[X]$ non è connesso esiste una sconnessione composta da due insiemi aperti G ed H in modo che sia:

1. $f[X] = G \cup H$,
2. $G \cap H = \emptyset$.

Dalla prima condizione segue:

$$X = f^{-1}[G \cup H] = f^{-1}[G] \cup f^{-1}[H] \quad (679)$$

Dal momento che la f è continua si ha che $f^{-1}[G]$ e $f^{-1}[H]$ sono insiemi aperti e disgiunti (per definizione di funzione, se non lo fossero avrei almeno un punto $x \in X$ che tramite la f viene mappato in insiemi disgiunti contro la definizione di funzione) in modo che $f^{-1}[G]$ e $f^{-1}[H]$ formino una sconnessione di X che, invece, è connesso per ipotesi. Si ha una contraddizione per cui $f[X]$ è connesso.

Il risultato ricavato nell'esempio precedente ha una validità generale che si può enunciare sotto forma di teorema.

Teorema A.38 *Immagini di insiemi connessi mediante una funzione continua sono insiemi connessi.*

Il suddetto teorema stabilisce che data una funzione continua e un insieme connesso X la sua immagine non può essere un insieme sconnesso come $Y = (0, 1)$. Da questa osservazione discende il lemma seguente.

Lemma A.1 *Uno spazio topologico X è connesso sse le sole funzioni continue da X a $Y = (0, 1)$ sono le funzioni costanti $f(x) = 0$ o $f(x) = 1$ per ogni $x \in X$.*

Prima di passare ad altri argomenti, si enunciano qui di seguito due teoremi, il primo dei quali viene ripreso come esercizio nella sezione A.6.

Definizione A.53 (Definizione di intervallo) *Un intervallo E è caratterizzato dal fatto di contenere tutti i punti compresi fra i suoi estremi (ovvero dal non avere "buchi"). In modo formale si ha: se $a, b \in E$ e si considera x tale che $a < x < b$ si ha $x \in E$.*

Teorema A.39 *Data la retta reale $\mathbb{R}$ e considerato un sottoinsieme $E \in \mathbb{R}$ di almeno due punti si ha che E è connesso sse è un intervallo.*

Teorema A.40 *Si abbia un insieme connesso X e una funzione continua:*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (680)$$

Come estensione del Teorema del valore intermedio di Weierstrass si ha che la f assume tutti i valori compresi fra due suoi valori qualunque.

Il suddetto teorema discende dal fatto che dato un insieme connesso qualunque la sua immagine mediante una funzione continua è ancora un insieme connesso.

Dopo i concetti globali di separatezza e connessione si passa alla definizione dei concetti di:

1. **componente connessa**,
2. **spazi topologici localmente connessi**.

Dato uno spazio topologico X una sua **componente connessa** E è più grande sottoinsieme connesso di X ovvero E non è sottoinsieme proprio di qualunque insieme connesso contenuto in X . Dalla definizione discende immediatamente che:

1. E è non vuoto;
2. se X è connesso allora $E = X$

Al proposito si ha il seguente teorema.

Teorema A.41 *Le componenti connesse di uno spazio topologico X formano una partizione di X e ogni sottoinsieme connesso di X è contenuto in una (e una sola) componente connessa.*

Nota A.57 (Partizione) *Dato un insieme A si dice che gli insiemi A_i ($i \in I$) ne sono una partizione se si ha:*

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i, j \in I$ tali che $i \neq j$;
2. $A = \cup_{i \in I} A_i$.

Nota A.58 *Dal teorema A.41 discende immediatamente che ogni punto $p \in X$ appartiene ad una sola componente connessa di X detta componente connessa di p .*

Esempio A.83 *Si abbia l'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topologia:*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \quad (681)$$

si vogliono le componenti connesse di X .

Nell'esempio A.80 si è visto che X è sconnesso. Le sue componenti connesse sono insiemi connessi che formano una partizione di X . Come candidati si hanno $\{a\}$ e $\{b, c, d, e\}$. Si deve verificare che sono insiemi connessi. Il primo lo è banalmente essendo un singoletto. Per il secondo la verifica è immediata considerando gli insiemi aperti contenuti nella topologia τ fra i quali non si può individuare una sconnessione di tale insieme. Si ha pertanto:

$$1. X = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$$

$$2. \{a\} \cap \{b, c, d, e\} = \emptyset$$

Ogni altro sottoinsieme connesso di X è contenuto in una di tali componenti connesse. Si noti che $\{a, c, d\}$ non è connesso dato che si può scrivere:

$$1. \{a, c, d\} = \{a\} \cup \{c, d\},$$

$$2. \{a\} \cup \{c, d\} = \emptyset,$$

con $\{a\}$ e $\{c, d\}$ elementi di τ .

Altri due risultati teorici degni di nota sono i seguenti:

1. il prodotto di spazi topologici connessi è uno spazio topologico connesso;
2. per il risultato precedente lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è connesso dal momento che si ha:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \quad (682)$$

e che $\mathbb{R}$ è connesso.

Vediamo a questo punto il concetto di **spazio topologico localmente connesso**. La definizione è la seguente.

Definizione A.54 *Uno spazio topologico X è detto essere **localmente connesso** in $p \in X$ sse ogni insieme aperto G_p che contiene p contiene a sua volta un insieme connesso C_p che contiene p ovvero sse, per quanto posto, si ha:*

$$p \in C_p \subset G_p \quad (683)$$

ovvero sse gli insiemi aperti connessi che contengono p formano una base locale in p .

Nota A.59 (Base locale) *Si richiama la definizione di base locale. Dato $p \in X$ (X spazio topologico qualunque) una classe $\mathcal{B}_p$ di insiemi aperti che contengono p è una base locale in p sse per ogni insieme aperto G che contiene p esiste un insieme G_p della classe $\mathcal{B}_p$ tale che:*

$$p \in G_p \subset G \quad (684)$$

Nota A.60 (X localmente connesso) *Uno spazio topologico X si dice **localmente connesso** se è localmente connesso in ogni $p \in X$ ovvero, in modo equivalente, se i sottoinsiemi aperti connessi di X formano una base per X .*

Esempio A.84 *Si abbia uno spazio topologico X con la topologia discreta τ_D . Si ha che X è localmente connesso.*

Lo si dimostra nel modo seguente. Si considera $p \in X$ e si “costruisce” $\{p\}$. È facile vedere che comunque si prenda un aperto G che contiene p si ha:

$$p \in \{p\} \subset G \quad (685)$$

per cui X è localmente connesso.

In modo altrettanto semplice, stante la topologia discreta τ_D su X , si ha che se X contiene più di un punto allora X non è connesso. Sotto tale ipotesi, per definizione di topologia discreta in τ_D ho sia A sia A^C in modo che sia:

1. A e A^C diversi sia da X sia da $\emptyset$;
2. $X = A \cup A^C$
3. $A \cap A^C = \emptyset$.

In tal modo si ha una sconnessione per X e, quindi, X non è connesso.

Si introduce il concetto di **cammino** in base al quale si introducono ulteriori definizioni di connessione.

Definizione A.55 (Definizione di cammino) *Dato l'intervallo unitario chiuso $I = [0, 1]$ per **cammino** da un punto $\mathbf{a}$ (detto punto iniziale) ad un punto $\mathbf{b}$ (detto punto finale) nello spazio topologico X si definisce una funzione continua:*

$$f : I \longrightarrow X \quad (686)$$

definita in modo che sia:

1. $f(0) = \mathbf{a}$;
2. $f(1) = \mathbf{b}$

Definizione A.56 (Cammino inverso) *Se la funzione:*

$$f : I \longrightarrow X \quad (687)$$

definisce un cammino da $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, la funzione:

$$\hat{f} : I \longrightarrow X \quad (688)$$

definita come segue:

$$\hat{f} = f(1 - s) \quad (689)$$

rappresenta un cammino da $\mathbf{b}$ ad $\mathbf{a}$.

Sulla base del concetto di cammino si introducono le seguenti definizioni:

1. **insieme connesso per archi**,
2. **cammino omotopico**,
3. **spazio semplicemente connesso**.

Nel seguito X indica uno spazio topologico con una topologia τ specificata di volta in volta (se necessario), con le lettere maiuscole si individuano sottoinsiemi di X e con le lettere minuscole i loro elementi.

Definizione A.57 (Connessione per archi) *Dato $E \subset X$ lo si dice **connesso per archi** se per ogni coppia di punti $a, b \in E$ esiste un cammino:*

$$f : I \longrightarrow X \quad (690)$$

tutto contenuto in E ovvero tale che $f[I] \subset E$

Dalla definizione si ha:

1. i sottoinsiemi connessi per archi più grossi (o massimali) di X sono le componenti connesse per archi e formano una partizione di X ;
2. un insieme connesso per archi è connesso (in genere non vale il viceversa).

Nel caso della topologia nel piano $\mathbb{R}^2$ si definisce come **regione** come un sottoinsieme aperto e connesso del piano e si può dimostrare che una regione è connessa per archi.

Il concetto di **cammino omotopico** coinvolge almeno due cammini rappresentati da due funzioni f e g con lo stesso punto iniziale p e finale q :

$$f : I \longrightarrow X \quad (691)$$

$$g : I \longrightarrow X \quad (692)$$

Si dice che f è **omotopica** a g e si scrive $f \simeq g$ se esiste una funzione continua:

$$H : I^2 \longrightarrow X \quad (693)$$

tale che:

1. $H(s, 0) = f(s)$,
2. $H(s, 1) = g(s)$,

$$3. H(0, t) = p,$$

$$4. H(1, t) = q.$$

Se tale funzione H esiste si dice che f può essere deformata in modo continuo in g . La H viene detta **omotopia** da f a g . Si può dimostrare che la relazione di omotopia è una relazione di equivalenza sull'insieme di tutti i cammini da a a b .

A questo punto si introduce il concetto di **spazio semplicemente connesso**.

Definizione A.58 (Spazio topologico semplicemente connesso) *Un cammino:*

$$f : I \longrightarrow X \quad (694)$$

*con lo stesso punto iniziale e finale ovvero tale che $f(0) = f(1) = p$ è detto essere un **cammino chiuso** in $p \in X$. In particolare il cammino costante:*

$$e_p : I \longrightarrow X \quad (695)$$

tale che $e_p(s) = p$ è un cammino chiuso in p . Fatte quest premesse si hanno le seguenti definizioni.

1. *Un cammino chiuso:*

$$f : I \longrightarrow X \quad (696)$$

è detto essere contraibile ad un punto se è omotopico al cammino costante.

2. *Uno spazio topologico si dice essere **semplicemente connesso** sse ogni cammino chiuso in X è contraibile a un punto.*

Esempio A.85 *Si abbiano gli insiemi A e B non vuoti e separati. Si dimostri che $A \cup B$ è sconnesso.*

Dal fatto che A e B sono separati discende che:

$$1. A \cap \bar{B} = \emptyset, \text{ ovvero } A \subset \bar{B}^C;$$

$$2. B \cap \bar{A} = \emptyset, \text{ ovvero } B \subset \bar{A}^C.$$

Da ciò discende che $A \cap B = \emptyset$. Per dimostrare che $A \cup B$ è sconnesso devo trovare una sconnessione ovvero due insiemi G ed H tali che valgono le proprietà viste nelle pagine precedenti di questa sezione.

Dalla definizione di unione di insiemi posso scrivere:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \quad (697)$$

Se prendo:

$$1. G = A \cap B^C,$$

$$2. H = A^C \cap B,$$

ho:

$$1. G \cap (A \cup B) \neq \emptyset;$$

$$2. H \cap (A \cup B) \neq \emptyset;$$

$$3. (A \cup B) \subset (G \cup H);$$

$$4. G \cap H \subset (A \cup B)^C$$

Ho una sconnessione di $A \cup B$ che, pertanto, risulta sconnesso.

Un'altra soluzione è la seguente. Si basa sul fatto che se A e B sono separati allora $A \cap B = \emptyset$. Considero:

$$1. G = \bar{B}^C$$

$$2. H = \bar{A}^C$$

in modo che G ed H sono insiemi aperti (in quanto complementari di chiusi) tali che:

$$1. (A \cup B) \cap G = A,$$

$$2. (A \cup B) \cap H = B.$$

In tal modo ho due insiemi non vuoti, disgiunti, la cui unione è $A \cup B$ ovvero ho una disconnessione di $A \cup B$ che, pertanto, è sconnesso.

Esempio A.86 Si abbia un insieme A di cui si ha una sconnessione $G \cup H$.

Si dimostri che $A \cap G$ e $A \cap H$ sono insiemi separati.

Dalla definizione di sconnessione ho che gli insiemi G ed H sono tali che:

$$1. A \cap G \neq \emptyset;$$

$$2. A \cap H \neq \emptyset;$$

$$3. (A \cap G) \cup (A \cap H) = A;$$

$$4. (A \cap G) \cap (A \cap H) = \emptyset.$$

Dalla quarta condizione segue che $A \cap G$ e $A \cap H$ sono disgiunti. Per dimostrare che sono separati si deve dimostrare che nessuno dei due contiene un punto di accumulazione dell'altro.

Suppongo che p sia un punto di accumulazione per $A \cap G$ e che sia contenuto in $A \cap H$ ovvero $p \in A \cap H$ e $p \in H$. Dalla definizione di punto di accumulazione si ha che H contiene altri punti di $A \cap G$ distinti da p per cui:

$$(A \cap G) \cap (H \setminus \{p\}) \neq \emptyset \quad (698)$$

da cui:

$$(A \cap G) \cap H \neq \emptyset \quad (699)$$

Dalla $(A \cap G) \cap (A \cap H) = \emptyset$ discende che:

$$(A \cap G) \cap H = \emptyset \quad (700)$$

per cui si ha una contraddizione e quindi $p \notin A \cap H$ ovvero $A \cap H$ non contiene punti di accumulazione di $A \cap G$.

Scambiando i ruoli di $A \cap G$ e $A \cap H$ si dimostra che $A \cap G$ non contiene punti di accumulazione di $A \cap H$ e quindi i due insiemi sono separati.

Esempio A.87 Si dimostri che un insieme A è connesso sse non è esprimibile come l'unione di due insiemi separati non vuoti.

Si può dimostrare, in modo equivalente, che:

$$A \text{ disconnesso} \iff A = A_1 \cup A_2 \quad (701)$$

con A_1 ed A_2 insiemi separati non vuoti. La dimostrazione la si fa in due passi.

$\implies$

Si suppone A disconnesso per cui esiste una sconnessione composta da due insiemi G ed H tali che:

1. $A \cap G \neq \emptyset$;
2. $A \cap H \neq \emptyset$;
3. $(A \cap G) \cup (A \cap H) = A$.

Per l'esempio precedente $A_1 = A \cap G$ e $A_2 = A \cap H$ sono separati da cui la tesi.

$\impliedby$

Suppongo di avere due insiemi separati e non vuoti A_1 e A_2 la cui unione è A . Dall'esempio A.85 discende che A è sconnesso.

Esempio A.88 *Si abbia un insieme sconnesso A e sia B un sottoinsieme connesso di A . Se G ed H sono una sconnessione di A , si dimostri che si ha uno dei due casi seguenti:*

1. $B \cap H = \emptyset$ per cui $B \subset G$,
2. $B \cap G = \emptyset$ per cui $B \subset H$.

Dalla definizione di sconnessione di A segue che:

1. $A \cap G \neq \emptyset$;
2. $A \cap H \neq \emptyset$;
3. $A \subset (G \cup H)$;
4. $G \cap H \subset A^C$.

So che $B \subset A$ ed è connesso. Faccio una dimostrazione per assurdo e cerco di arrivare ad avere B sconnesso.

Dalla terza condizione e dal fatto che $B \subset A$ ho:

$$B \subset G \cup H \quad (702)$$

Dalla quarta condizione e dal fatto che $B \subset A$ ho:

$$G \cap H \subset B^C \quad (703)$$

Se ora avessi anche $B \cap G \neq \emptyset$ e $B \cap H \neq \emptyset$ avrei, per definizione, che B risulterebbe sconnesso contro l'ipotesi per cui deve essere o $B \cap G = \emptyset$ o $B \cap H = \emptyset$. Si noti che tali relazioni non possono valere entrambe dal momento che avrei:

$$\emptyset = (B \cap G) \cup (B \cap H) = B \cap (G \cup H) \quad (704)$$

mentre dalle $B \subset A$ e $A \subset (G \cup H)$ ho $B \subset (G \cup H)$ per cui $B \cap (G \cup H) = B \neq \emptyset$.

Intuitivamente si ha che se A è sconnesso lo posso pensare “suddiviso in due parti” (ovvero posso associargli una sconnessione) mentre un suo sottoinsieme connesso B non può che essere contenuto in una delle due parti altrimenti risulterebbe sconnesso contro l'ipotesi che sia connesso.

Nota

Si è sfruttato il fatto che se $B \subset A$ allora $B^C \supset A^C$.

Esempio A.89 *Dati due insiemi A e B si dimostri che se:*

1. A e B sono insiemi connessi,

2. A e B non sono separati,

allora $A \cup B$ è connesso.

Intuitivamente si ha: A e B sono di un “pezzo” solo, la loro intersezione è non vuota per cui la loro unione è un insieme composto di un “solo pezzo”. Per definizione due insiemi sono separati sse valgono entrambe le condizioni seguenti:

1. sono disgiunti;

2. nessuno dei due contiene punti di accumulazione dell'altro.

Le considerazioni svolte nella **Nota** fanno intuire come sia preferibile tentare una dimostrazione per assurdo. In tale ottica si suppone $A \cup B$ sconnesso e si vuole ricavare una contraddizione con una o entrambe le ipotesi fatte su A e B . Si sfrutta il risultato dell'esempio precedente in base al quale se si ha una sconnessione di un insieme allora un suo sottoinsieme connesso è contenuto in uno dei due elementi della sconnessione.

Supposto $A \cup B$ sconnesso se ne ha la sconnessione $G \cup H$. Essendo A e B sottoinsiemi connessi di $A \cup B$ per l'esempio precedente si ha:

1. $A \subset G$ o $A \subset H$,

2. $B \subset G$ o $B \subset H$,

Si hanno i due casi seguenti (vedi la **Nota**):

1. $A \subset G$ e $B \subset H$,

2. $B \subset G$ e $A \subset H$.

Per quanto visto nell'esempio A.86 si ha che $(A \cup B) \cap G$ e $(A \cup B) \cap H$ sono insiemi separati ma:

1. $(A \cup B) \cap G = (A \cap G) \cup (B \cap G) = A$ per quanto visto sinora,

2. $(A \cup B) \cap H = (A \cap H) \cup (B \cap H) = B$ per quanto visto sinora,

per cui A e B sarebbero separati contro l'ipotesi. Da ciò discende (vedi la **Nota**) che sono possibili i casi seguenti:

1. $A \subset G$ e $B \subset G$ ovvero $(A \cup B) \subset G$ e $(A \cup B) \cap H = \emptyset$,

2. $B \subset H$ e $A \subset H$ ovvero $(A \cup B) \subset H$ e $(A \cup B) \cap G = \emptyset$.

In entrambi i casi risultano violate alcune delle proprietà caratteristiche della definizione di sconnessione per cui $G \cup H$ non è una sconnessione di $A \cup B$ che risulta connesso.

Nota

Si sfrutta la seguente proprietà: A sse $B \wedge C$ equivale a $\neg A$ sse $\neg(A \wedge B)$ che, a sua volta, equivale a $\neg A$ sse $\neg A \vee \neg B$.

Si noti che dalla definizione di sconnessione deve essere:

1. $(A \cup B) \cap G \neq \emptyset$,
2. $(A \cup B) \cap H \neq \emptyset$,

per cui A e B non possono essere entrambi in H (avrei $(A \cup B) \cap G = \emptyset$) o entrambi in G (avrei $(A \cup B) \cap H = \emptyset$) contro la definizione.

Esempio A.90 Si abbia uno spazio topologico X e si abbiano i sottoinsiemi connessi $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$ a due a due non separati. Si dimostri che:

$$B = \cup_i A_i \quad (705)$$

è connesso.

Si procede sulla falsariga di quanto fatto nell'esempio precedente ovvero si ipotizza B non connesso per cui se ne ha una sconnessione $G \cup H$. Per la definizione di sconnessione si ha che deve essere:

1. $B \cap G \neq \emptyset$,
2. $B \cap H \neq \emptyset$,
3. $B \subset G \cup H$,
4. $G \cap H \subset B^C$,

per cui se si dimostra che, sfruttando il fatto che per ogni $i \neq j$ A_i e A_j non sono separati, una di tali condizioni non vale si ha che la sconnessione ipotizzata non esiste e B è connesso.

Ognuno degli A_i è un sottoinsieme connesso di B per cui, dall'esempio A.88, discende che solo uno dei casi seguenti è verificato:

1. $A_i \subset G$ e $A_i \cap H = \emptyset$,
2. $A_i \subset H$ e $A_i \cap G = \emptyset$

si sa inoltre che per ogni $i \neq j$ A_i e A_j non sono separati per cui, dall'esempio A.89, si ha che $A_i \cup A_j$ è connesso per cui vale anche per tale insieme quello che vale per il singolo A_i . Da ciò discende che tutti gli A_i sono contenuti in G ma non in H o viceversa per cui salta la definizione di sconnessione e B risulta essere connesso.

A.6 Esercizi, Prof. Gori

La presente sezione contiene esercizi proposti dal Prof. Gori e svolti dall'autore.

Esercizio A.41 *Si dimostri che in uno spazio topologico di tipo T_1 i punti (insiemi singoletto) sono insiemi chiusi.*

Soluzione

Si deve dimostrare che X di tipo $T_1 \Rightarrow \{x\}$ è un insieme chiuso per ogni $x \in X$.

Si considera un punto $p \in X$ e il relativo singoletto $\{p\}$ che si vuole dimostrare essere chiuso. Ciò equivale a dimostrare che $\{p\}^C$ è aperto. Si prenda ora un punto $x \notin \{p\}^C$ per cui $x \neq p$. Si sfrutta ora il fatto che X è di tipo T_1 in modo da dire che esiste un insieme aperto G_x tale che $x \in G_x$ ma $p \notin G_x$.

Si ha quindi che $G_x \subset \{p\}^C$ per cui si può scrivere:

$$x \in G_x \subset \{p\}^C \quad (706)$$

ovvero:

$$\{p\}^C = \cup_{x \in \{p\}^C} G_x \quad (707)$$

e quindi $\{p\}^C$ è un insieme aperto perchè unione qualunque di aperti e, pertanto, $\{p\}$ è un insieme chiuso.

Nota

Si ricorda che uno spazio topologico è di tipo T_1 sse dati due punti distinti $x, y \in X$, ciascuno dei due appartiene ad un insieme aperto che non contiene l'altro e tali insiemi non sono necessariamente disgiunti.

Esercizio A.42 *Dato uno spazio topologico X dimostrare che se i punti sono insiemi chiusi allora X è di tipo T_1 .*

Soluzione

Dato un punto qualunque $p \in X$ so che $\{p\}$ è un insieme chiuso e quindi $\{p\}^C$ è un insieme aperto. Se ora considero $q \neq p$ ho che anche $\{q\}$ è un insieme chiuso e quindi $\{q\}^C$ è un insieme aperto. Se considero che:

$$1. p \in \{q\}^C \text{ ma } q \notin \{q\}^C,$$

$$2. q \in \{p\}^C \text{ ma } p \notin \{p\}^C,$$

ho trovato due insiemi aperti che mi separano coppie arbitrarie di punti distinti per cui lo spazio topologico X è di tipo T_1 .

Nota A.61 Con questi due esercizi si è dimostrato che esiste una equivalenza fra il fatto che uno spazio topologico è di tipo T_1 e il fatto che gli insiemi singoletto sono punti chiusi.

Esercizio A.43 Si dia un esempio di spazio topologico X in cui i punti non sono insiemi chiusi.

Soluzione

Un primo esempio è uno spazio topologico non di tipo T_0 . Se ho $X = \{a, b, c, d\}$ e considero la topologia seguente:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\} \quad (708)$$

Tale spazio non è di tipo T_0 perchè non trovo un insieme aperto in τ che contiene b ma non c .

Un altro esempio è dato dagli spazi topologici di tipo T_0 che non sono T_1 (per quanto visto in precedenza). Un esempio semplice è dato dal seguente spazio topologico:

$$1. X = \{a, b\}$$

$$2. \tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}.$$

in cui un insieme aperto $\{a\}$ per separare un punto (a) dall'altro (b) (e lo spazio è di tipo T_0) ma l'altro insieme aperto è X che contiene sia a sia b per cui non posso soddisfare le condizioni della definizione di spazio topologico T_1 .

Nota

Si ricorda che uno spazio topologico si dice di tipo T_0 se per ogni coppia di punti distinti esiste un insieme aperto che contiene uno dei punti ma non l'altro. In modo formale si ha che X è di tipo T_0 sse per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esiste un insieme aperto G_x tale che:

$$1. x \in G_x,$$

$$2. y \notin G_x.$$

Esercizio A.44 Dato uno spazio topologico X di tipo T_2 si dimostri che i sottoinsiemi compatti sono chiusi.

Soluzione

Si deve dimostrare che dato X di tipo T_2 se $A \subset X$ è compatto allora A è chiuso. Si procede dimostrando, in modo equivalente, che A^C è un insieme aperto costruendolo come unione qualunque di insiemi aperti.

Per dimostrarlo si ha bisogno di due risultati preliminari nel primo dei quali

si sfrutta sia il fatto che X è di tipo T_2 sia il fatto che A sia di tipo compatto in modo che, da ogni suo ricoprimento aperto, se ne possa estrarre un sottoricoprimento finito.

1. Dato X di tipo T_2 e dato un insieme compatto $A \subset X$ si deve dimostrare che se prendo un punto $p \in X \setminus A = A^C$ esistono due insiemi aperti G_p ed H_p tali che:

- (a) $p \in G_p$,
- (b) $A \subset H_p$,
- (c) $G_p \cap H_p = \emptyset$.

Si prenda $a \in A$. Dato che $p \notin A$ si ha che $a \neq p$ per cui, essendo X di tipo T_2 , esistono due insiemi aperti disgiunti che separano i due punti ovvero esistono G_a e H_a tali che:

- (a) $p \in G_a$,
- (b) $a \in H_a$,
- (c) $G_a \cap H_a = \emptyset$.

Si ha, quindi, $A \subset \cup_{a \in A} H_a$ e, pertanto, un ricoprimento di A . Si sfrutta ora il fatto che A è compatto per cui esiste un insieme di indici I che individua un sottoricoprimento finito di A in modo che sia:

$$A \subset \cup_{i \in I} H_{a_i} \quad (709)$$

Agli insiemi H_{a_i} corrispondono gli insiemi G_{a_i} . Si possono ora definire gli insiemi:

- (a) $G_p = \cap_{i \in I} G_{a_i}$
- (b) $H_p = \cup_{i \in I} H_{a_i}$

tali che:

- (a) G_p è un insieme aperto perchè intersezione di un numero finito di insiemi aperti;
- (b) H_p è un insieme aperto perchè unione di un numero finito di insiemi aperti;
- (c) $A \subset H_p$ per costruzione;
- (d) $p \in G_p$ per costruzione (si ha che $p \in G_a$ per cui $p \in G_{a_i}$ per ogni $i \in I$).

Resta da dimostrare che $G_p \cap H_p = \emptyset$. Dal fatto che $G_a \cap H_a = \emptyset$ segue che $G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset$ e quindi, essendo $G_p = \bigcap_{i \in I} G_{a_i}$, si ha $G \cap H_{a_i} = \emptyset$. Da tutto ciò segue che:

$$G_p \cap H_p = G_p \cap (\bigcup_{i \in I} H_{a_i}) = \bigcup_{i \in I} (G_p \cap H_{a_i}) = \bigcup_{i \in I} \emptyset = \emptyset \quad (710)$$

2. Dato X di tipo T_2 e dato un insieme compatto $A \subset X$ se prendo un punto $p \notin A$ si vuole dimostrare che esiste un insieme aperto G_p tale che $p \in G_p \subset A^C$.

Da quanto visto al punto 1. si ha che esistono due insiemi aperti G_p ed H_p tali che:

- (a) $p \in G_p$,
- (b) $A \subset H_p$,
- (c) $G_p \cap H_p = \emptyset$.

Da ciò discende che $G_p \cap A = \emptyset$ per cui si ha $p \in G_p \subset A^C$ cioè per ogni punto $p \in A^C$ esiste un insieme aperto che lo contiene e che, a sua volta, è contenuto in A^C .

A questo punto, sulla base dei risultati preliminari precedenti, si può dimostrare che A^C è un insieme aperto. Per fare ciò si prende $p \in A^C$ per cui $p \notin A$. Per il secondo risultato preliminare esiste un insieme aperto G_p tale che $p \in G_p \subset A^C$. Facendo variare p in A^C si può sempre trovare un tale insieme per cui si può scrivere:

$$A^C = \bigcup_{p \in A^C} G_p \quad (711)$$

Da tale equazione si ha che A^C , in quanto unione di insiemi aperti, è un insieme aperto per cui A è un insieme chiuso.

Nota

Si ricorda che uno spazio topologico X si dice essere di tipo T_2 sse coppie di punti distinti appartengono ad insiemi aperti disgiunti. In modo formale si ha che dati due punti distinti $x, y \in X$ esistono due insiemi aperti G_x e G_y tali che:

- 1. $x \in G_x$,
- 2. $y \in G_y$,
- 3. $G_x \cap G_y = \emptyset$.

Esercizio A.45 *Dato uno spazio topologico X di tipo T_2 si dimostri che insiemi compatti e disgiunti si possono “separare”.*

Soluzione

L'esercizio dato equivale al seguente: si abbia uno spazio topologico di tipo T_2 . Se A e B sono sottoinsiemi compatti e disgiunti di X allora esistono i sottoinsiemi aperti e disgiunti G ed H tali che $A \subset G$ e $B \subset H$.

Considero il punto $a \in A$. Dato che A e B sono disgiunti si ha che $a \notin B$. Si sfrutta il fatto che B è compatto. Dal primo risultato preliminare dell'esercizio A.44 si ha che esistono gli insiemi aperti G_a e H_a tali che:

1. $a \in G_a$,
2. $B \subset H_a$,
3. $G_a \cap H_a = \emptyset$.

Dato che $a \in G_a$ gli insiemi aperti G_a sono un ricoprimento di A ma A è compatto per cui ne esiste un sottoricoprimento finito ovvero esiste un insieme di indici I tale che:

$$A \subset \cup_{i \in I} G_{a_i} \quad (712)$$

Agli insiemi G_{a_i} corrispondono gli insiemi H_{a_i} per i quali si ha:

$$B \subset \cap_{i \in I} H_{a_i} \quad (713)$$

poichè $B \subset H_{a_i}$ per ogni $i \in I$.

A questo punto si definiscono i seguenti insiemi aperti (unioni qualunque o intersezioni finite di insiemi aperti):

1. $G = \cup_{i \in I} G_{a_i}$
2. $H = \cap_{i \in I} H_{a_i}$.

Per costruzione si ha:

1. $A \subset G$,
2. $B \subset H$.

Resta da dimostrare che G ed H sono disgiunti ovvero che si ha $G \cap H = \emptyset$. Dalla $G_a \cap H_a = \emptyset$ segue che per ogni $i \in I$ si ha:

$$G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset \quad (714)$$

ovvero (dalla definizione di H):

$$G_{a_i} \cap H = \emptyset \quad (715)$$

per cui:

$$G \cap H = (\cup_{i \in I} G_{a_i} \cap H = \cup_{i \in I} (G_{a_i} \cap H) = \cup_{i \in I} \emptyset = \emptyset \quad (716)$$

da cui la tesi.

Nota

In questo modo si separano sottoinsiemi compatti e disgiunti con sottoinsiemi aperti e disgiunti. Si ricordi che nell'esercizio A.44 si è dimostrato che in uno spazio topologico T_2 i sottoinsiemi compatti sono chiusi.

Si fa notare che si è fatto uso della seguente proprietà insiemistica: se $G \cap H_i = \emptyset$ e definisco $H = \cap_i H_i$ allora è $G \cap H = \emptyset$.

Esercizio A.46 Si abbia uno spazio topologico compatto X e sia F un suo sottoinsieme chiuso. Si dimostri che F è compatto.

Soluzione

Essendo F chiuso so che F^C è aperto. Se i G_i sono aperti di X posso scrivere:

$$F \subset \cup_i G_i \quad (717)$$

in modo che i $\{G_i\}$ siano un ricoprimento aperto di F . Posso estendere tale ricoprimento aperto a X aggiungendo F^C in modo che sia:

$$X = \cup_i G_i \cup F^C \quad (718)$$

Essendo X compatto esiste un insieme di indici I che ne individua un sottoricoprimento finito in modo che si possa scrivere:

$$X = \cup_{i \in I} G_i \cup F^C \quad (719)$$

essendo F ed F^C disgiunti per definizione si ha:

$$F \subset \cup_{i \in I} G_i \quad (720)$$

ovvero dal ricoprimento aperto iniziale si è estratto un sottoricoprimento finito per cui F è compatto.

Nota

Uno spazio topologico X si dice compatto se X stesso è compatto.

Nota A.62 Dato uno spazio topologico X di tipo T_2 e dato un sottoinsieme $F \subset X$ si è visto che:

1. se F è compatto allora è chiuso (vedi l'Esercizio A.44);
2. se F è chiuso allora è compatto (vedi l'esercizio A.46).

In uno spazio topologico di tipo T_2 ciò ci autorizza a dire che **chiusura** e **compattezza** sono proprietà equivalenti.

Esercizio A.47 Dato uno spazio topologico X di tipo T_2 se X è in più compatto si dimostri che X è di tipo T_4 .

Soluzione

Si sfruttano i risultati degli esercizi A.46 e A.45.

Dal momento che X è sia di tipo T_2 sia compatto se si prendono due sottoinsiemi chiusi disgiunti F_1 e F_2 di X si ha:

1. dall'esercizio A.46 si ha che F_1 e F_2 sono compatti;
2. dall'esercizio A.45 si ha che li si può separare utilizzando sottoinsiemi aperti disgiunti di X .

Da tutto ciò, e per quanto osservato nella **Nota**, si ha che X è di tipo T_4 .

Nota

Si ricorda che:

1. in uno spazio topologico di tipo T_2 si separano punti distinti con aperti disgiunti;
2. se uno spazio topologico è di tipo T_2 allora è di tipo T_1 ;
3. uno spazio topologico X si dice **normale** sse data una coppia di sottoinsiemi di X chiusi e disgiunti F_1 e F_2 allora esistono due sottoinsiemi aperti e disgiunti G ed H tali che $F_1 \subset G$ e $F_2 \subset H$ ovvero sse riesco a separare insiemi chiusi disgiunti con aperti disgiunti;
4. uno spazio topologico di tipo T_4 è uno spazio topologico di tipo T_1 e in più **normale**.

Esercizio A.48 Dimostrare che in $\mathbb{R}$ con la topologia ordinaria gli intervalli sono tutti e soli gli insiemi connessi.

Soluzione

Si deve dimostrare che dato un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ contenente almeno due punti si ha che E è connesso sse E è un intervallo ovvero che:

1. se E è connesso allora è un intervallo;
2. se E è un intervallo allora è connesso;

Vediamo il punto 1.

Lo dimostro per assurdo ovvero suppongo che E non sia un intervallo ovvero se ho $a, b \in E$ esiste $p \notin E$ tale che $a < p < b$. Se ora scelgo:

1. $G = (-\infty, p)$,

2. $H = (p, +\infty)$,

ho che:

1. $G \neq \emptyset$ perchè contiene almeno a ,

2. $H \neq \emptyset$ perchè contiene almeno b ,

3. $G \cap H = \emptyset \subset E^c$,

4. $G \cup H \supset E$,

ovvero G ed H sono una sconnessione per E ma E è connesso per ipotesi per cui p non esiste e E è un intervallo.

Vediamo il punto 2.

Se E è un intervallo si dimostra che è connesso per archi per cui risulta essere connesso. Per vederlo si può definire una funzione continua da $I = [0, 1]$ in $E = [x_1, x_2]$ come segue (x_1, x_2 elementi qualunque in $\mathbb{R}$, senza perdita di generalità suppongo $x_1 < x_2$):

$$f(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \quad (721)$$

Si ha in questo modo una funzione continua che individua un cammino e pertanto definisce E come connesso per archi e perciò connesso.

Nota

Si richiama la definizione di intervallo.

Un intervallo E è caratterizzato dal fatto di contenere tutti i punti compresi fra i suoi estremi (ovvero dal non avere “buchi”). In modo formale si ha: se $a, b \in E$ e si considera x tale che $a < x < b$ si ha $x \in E$.

Si ricorda, inoltre, che insiemi connessi per archi sono connessi ma che il viceversa non è vero.

Nota A.63 Ai quattro esercizi che seguono vengono premesse alcune considerazioni di carattere generale. Per il momento si considera uno spazio topologico X qualunque con gli aperti G_i e un suo sottoinsieme A .

1. A è **compatto** sse da ogni ricoprimento di aperti ne posso estrarre un sottoricoprimento finito;

2. A è **compatto per successioni** sse ogni successione di elementi in A ammette una sottosuccessione che converge ad un elemento di A ;
3. A è **numerabilmente compatto** sse ogni suo sottoinsieme B infinito ha almeno un punto di accumulazione;
4. A è **localmente compatto** sse ogni suo punto ha un intorno compatto.

In uno spazio topologico qualunque si hanno le seguenti relazioni fra i concetti suddetti.

1. **compatto** $\Rightarrow$ **numerabilmente compatto**: lo si dimostra per assurdo. Si prende A privo di punti di accumulazione in X per cui ogni $p \in X$ appartiene ad un aperto G_p che contiene al più un punto di A . Gli insiemi G_p sono un ricoprimento per X che è compatto per cui ne posso estrarre un sottoricoprimento finito (che contiene A) ciascun elemento del quale contiene al più un punto di A per cui il sottoricoprimento contiene un numero finito di punti di A che ha perciò un numero finito di punti. Per ipotesi A è infinito per cui ha almeno un punto di accumulazione da cui la tesi.
2. **compatto** $\Rightarrow$ **compatto per successioni**: lo si dimostra con la stessa tecnica del punto precedente.
3. **compatto per successioni** $\Rightarrow$ **numerabilmente compatto**: si prenda A infinito in X per cui A contiene una successione di infiniti termini distinti $\{a_n\}$. Dalla definizione di compattezza per successioni tale successione ammette una sottosuccessione che converge a $p \in X$ per cui ogni intorno aperto di p contiene un numero infinito di termini distinti della sottosuccessione convergente per cui contiene un numero infinito di punti di A e quindi p è un punto di accumulazione per A come richiede la definizione di numerabilmente compatto.
4. **compatto** $\Rightarrow$ **localmente compatto**. Discende dal fatto che uno spazio topologico X è un intorno di ogni suo punto per cui se X è compatto risulta banalmente verificata la definizione di compattezza locale.

Negli spazi metrici si ha che se un sottoinsieme A di X è numerabilmente compatto allora è compatto per successioni: si consideri in A una successione $\{a_n\}$ i cui elementi appartengono ad un insieme B . Si hanno due casi:

1. B è finito per cui almeno uno degli elementi della successione si ripete infinite volte consentendoci di estrarre una sottosuccessione che converge a quell'elemento;

2. B è infinito e so che A è numerabilmente compatto per cui B contiene un punto di accumulazione p in A . sfrutto il fatto che X è metrico per estrarre una sottosuccessione che converge a p per cui A è compatto per successioni.

In più che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. A è compatto;
2. A è numerabilmente compatto;
3. A è compatto per successioni.

Si è visto finora che:

1. X qualunque $1. \Rightarrow 2.$,
2. X qualunque $3. \Rightarrow 2.$,
3. X metrico $2. \Rightarrow 3.$.

Se si dimostra che $3. \Rightarrow 1.$ si ha l'equivalenza, in spazi metrici, fra la **compattezza** e la **compattezza per successioni**. La dimostrazione fa uso del concetto di **totale limitatezza** per il quale si rimanda ai paragrafi successivi.

So che A è compatto per successioni ovvero è totalmente limitato per cui lo posso decomporre in un numero finito di insiemi $(B_1, \dots, B_m)$ di diametro minore di un valore $\varepsilon > 0$. Se per A definisco un ricoprimento:

$$A = \cup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \quad (722)$$

ne voglio estrarre un sottoricoprimento finito in modo da dimostrare che è compatto. Se come G_i prendo gli aperti dei G_λ che contengono i B_i ottengo:

$$A \subset \cup_i B_i \subset \cup_i G_i \quad (723)$$

in modo che A risulta compatto. La scelta la posso sempre fare perchè $\varepsilon > 0$ è il numero di Lebesgue per il ricoprimento di A con i G_λ .

In uno spazio metrico si può definire un sottoinsieme come **totalmente limitato** se, per ogni $\varepsilon > 0$, lo si può decomporre in un numero finito di insiemi, ciascuno di diametro non superiore a ε . Al proposito si ha:

1. un insieme totalmente limitato è limitato (ma, in genere, non vale il viceversa dato che la decomposizione può fallire per anche un solo valore di ε);

2. un insieme compatto per successioni è totalmente limitato. Si dimostra in modo qualitativo la negata di tale proposizione ovvero:

A non totalmente limitato $\Rightarrow$ A non compatto per successioni.

Se A è non totalmente limitato (vedi la definizione) posso prendere $a_1 \in A$ ed esiste $a_2 \in A$ per il quale esiste un valore $\varepsilon > 0$ tale che $d(a_1, a_2) > \varepsilon$. In modo simile posso trovare a_3 e così via. Si può così costruire una successione che non contiene una sottosuccessione convergente per cui risulta violata la definizione di compattezza per successioni e quindi A non è compatto per successioni.

Esercizio A.49 *Dimostrare che in $\mathbb{R}$ con la topologia ordinaria gli insiemi chiusi e limitati sono tutti e soli i compatti per successioni.*

Soluzione

Si parte dal presupposto che gli insiemi di cui si parla sono gli intervalli infiniti e aperti del tipo (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$.

Si deve dimostrare che:

1. A compatto per successioni $\Rightarrow A$ chiuso e limitato;
2. A chiuso e limitato $\Rightarrow A$ compatto per successioni.

A compatto per successioni $\Rightarrow A$ chiuso e limitato

Per quanto visto in precedenza si ha:

1. compatto per successioni $\Rightarrow$ totalmente limitato e quindi limitato;
2. compatto per cessioni $\Rightarrow$ numerabilmente compatto e quindi chiuso dato che contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

A chiuso e limitato $\Rightarrow A$ compatto per successioni

Il fatto che A sia chiuso implica che per ogni $x \in A$ ogni suo intorno G_x contiene almeno un punto di A distinto da x . Se ordino tali intorni in un sistema fondamentale di intorni $G_n \subset G_{n+1}$ e considero un punto x_n in ogni intorno ho che la limitatezza di A mi permette di definire gli elementi di tale successione convergente come estratti da una successione più grande contenuta in A . In questo modo sia ha che A è compatto per successioni.

Esercizio A.50 *Dimostrare che in $\mathbb{R}$ con la topologia ordinaria gli insiemi chiusi e limitati sono tutti e soli i compatti.*

Soluzione

*Dato che in uno spazio metrico la compattezza equivale alla compattezza per successioni la soluzione può essere ricondotta a quanto fatto nell'esercizio precedente. Si può anche procedere in modo diverso sfruttando quanto visto nella **Nota** precedente questo gruppo di esercizi.*

Chiuso e limitato $\Rightarrow$ compatto

A chiuso implica $A = \bar{A}$ ovvero $D(A) \subset A$ e quindi A contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Da ciò segue che ogni suo sottoinsieme infinito ha almeno un punto di accumulazione ovvero A è numerabilmente compatto.

Dalla limitatezza discende che tutte le successioni convergenti hanno un limite finito ovvero ogni successione ha una sottosuccessione convergente che (per la chiusura) converge ad un elemento dell'insieme. Da ciò discende che A è compatto per successioni e quindi, dato che siamo in uno spazio metrico ($\mathbb{R}$ con la topologia ordinaria), si ha che A è compatto.

Compatto $\Rightarrow$ chiuso e limitato

Se A è compatto da ogni ricoprimento ne posso estrarre un sottoricoprimento finito. Se considero un ricoprimento fatto dagli intervalli $S_i = \{x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i\}$ ho che posso scrivere:

$$A \subset \cup_{i \in I} S_i \quad (724)$$

per cui A risulta avere un diametro finito e quindi è limitato.

Se A è compatto è numerabilmente compatto ovvero ogni suo sottoinsieme infinito ha un punto di accumulazione in A ovvero A contiene tutti i suoi punti di accumulazione ed è chiuso.

Esercizio A.51 *Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ con la topologia ordinaria gli insiemi chiusi e limitati sono tutti e soli i compatti per successioni.*

Soluzione

Per la soluzione vedi l'Esercizio A.49. Cambia solo che al posto di intervalli aperti del tipo (a, b) si devono considerare sfere aperte in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio A.52 *Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ con la topologia ordinaria gli insiemi chiusi e limitati sono tutti e soli i compatti.*

Soluzione

Per la soluzione vedi l'Esercizio A.50. Cambia solo che al posto di intervalli aperti del tipo (a, b) si devono considerare sfere aperte in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio A.53 *Dimostrare che l'unione di una famiglia qualunque di insiemi connessi aventi intersezione non vuota è ancora un insieme connesso.*

Soluzione

Si abbiano gli insiemi A_i connessi tali che $\cap_i A_i \neq \emptyset$. Si deve dimostrare che

$B = \cup_i A_i$ è connesso.

Dalla $\cap_i A_i \neq \emptyset$ ho che per ogni i, j con $i \neq j$ è $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ per cui A_i e A_j non sono separati e perciò $A_i \cup A_j$ è connesso. (Se esistono i, j con $i \neq j$ ho $A_i \cap A_j = \emptyset$ allora $\cap_i A_i = \emptyset$.)

Dimostro per assurdo.

Suppongo che $B = \cup_i A_i$ sia sconnesso. Esistono G ed H aperti che sono una sconnessione per B ovvero $B \subset G \cup H$ e $G \cap H \subset B^C$. Ognuno degli A_i è connesso per cui o appartiene a G o appartiene ad H ma non a entrambi. In più ho che per ogni i, j con $i \neq j$ ho $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ per cui $A_i \cup A_j$ è connesso (per la definizione di insiemi separati ho che due insiemi lo sono se sono disgiunti e nessuno dei due contiene punti di accumulazione dell'altro). Se $A_i \cup A_j$ è connesso allora appartiene o a G o ad H ma solo a uno dei due, a quello cui appartengono sia A_i che A_j per cui tutti gli A_i sono o in G o in H e ciò contraddice il fatto che G ed H siano una sconnessione per B per cui B è connesso.

Esercizio A.54 Sia C un insieme connesso di uno spazio topologico X . Dimostrare che l'unione di una famiglia qualunque di insiemi connessi $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, ciascuno dei quali abbia intersezione non vuota con C , è ancora un insieme connesso.

Soluzione

Come mostrato in **Nota** il testo deve essere modificato richiedendo di dimostrare che è connesso l'insieme:

$$B = C \cup (\cup)_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \quad (725)$$

Si dimostra per assurdo. Si suppone B sconnesso per cui esistono due insiemi aperti G ed H tali che:

1. $B \subset G \cup H$,
2. $G \cap H \subset B$.

Essendo C connesso si ha $C \subset G$ o $C \subset H$ (altrimenti G ed H sarebbero una sconnessione per C). Essendo $C \cap C_\lambda \neq \emptyset$ si ha che C e C_λ non sono separati per cui, per ogni $\lambda \in \Lambda$ si ha $C \cup C_\lambda$ connesso. Per quanto detto a proposito di C si ha che per ogni λ si può verificare solo una delle due eventualità:

1. $C \cup C_\lambda \subset G$,
2. $C \cup C_\lambda \subset H$.

Da tutto ciò discende che $C \cup (\cup)_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ è contenuto o in G o in H contro l'ipotesi che G ed H siano una sconnessione per B per cui B risulta connesso.

Nota

L'insieme $\cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ con il solo vincolo $C \cap C_\lambda \neq \emptyset$ non è connesso se non in casi particolari.

Vediamo alcuni esempi.

Sia Λ finito. Posso avere C e C_i tali che per ogni i sia $C \cap C_i \neq \emptyset$ ma se considero $k \neq j$ ho $C_k \cap C_j = \emptyset$ per cui $\cup_i C_i$ non è connesso. Lo stesso vale se Λ è numerabile. Ad esempio posso pensare $C = (0, 1)$ e $C_{2k} = (-2k, 0.1)$ e $C_{2k+1} = (1.1, 2k + 1)$ in modo che $\cup_i C_i$ non è connesso.

Un altro esempio è il seguente: $C = \mathbb{R}^2$ e $C_i = S((i, i), \varepsilon)$ (ovvero i C_i sono le sfere il cui centro è in punti di coordinate intere e raggio $\varepsilon < 1$). I C_i sono connessi, hanno intersezione non vuota con C ma la loro unione non è un insieme connesso.

Un esempio in positivo è il seguente. Considero $C_\lambda = \{x\} \in C$ per cui $C = \cup_\lambda C_\lambda$ connesso perchè lo è C e $C \cap C_\lambda \neq \emptyset$.

Esercizio A.55 Dimostrare che una funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ha grafico chiuso in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione

Se:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (726)$$

è continua si ha che f è continua in termini di successioni in $\bar{x}$ per cui se $\{x_n\} \longrightarrow \bar{x}$ allora ho $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(\bar{x})$ per cui $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ è di accumulazione per G ovvero G è chiuso perchè contiene tutti suoi punti di accumulazione.

Ho sfruttato il fatto che se f è continua in $\bar{x} \in \mathbb{R}$ allora f è continua in termini di successioni in $\bar{x}$. Per provarlo devo dimostrare che ogni intorno U di $f(\bar{x})$ contiene tutti i termini della successione $\{f(x_n)\}$ a partire da $\bar{n}$ ovvero per $n > \bar{n}$. Considero l'intorno U di $f(\bar{x})$. f continua in $\bar{x}$ implica che $V = f^{-1}(U)$ è un intorno di $\bar{x}$. Se la successione $\{x_n\}$ converge a $\bar{x}$ ho che V contiene tutti i termini della successione a partire da un certo $\bar{n}$ ovvero $x_n \in V$ per la continuità della f implica che $f(x_n) \in f(V) = f(f^{-1}(U)) = U$ per cui a partire da $\bar{n}$ $f(x_n) \in U$ ovvero la successione converge a $f(\bar{x})$ per cui si ha continuità in termini di successioni in $\bar{x}$ per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

Esercizio A.56 Mostrare che una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che abbia grafico chiuso non è necessariamente continua.

Soluzione

Una possibile funzione è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases} \quad (727)$$

Si fa notare che:

1. la f definita non è limitata e non è continua in $x = 0$,
2. il grafico è un insieme chiuso.

Esercizio A.57 *Mostrare che una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che abbia grafico chiuso e sia limitata è continua.*

Soluzione

So che la funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (728)$$

è limitata e il suo grafico $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$ è chiuso. Voglio dimostrare che è continua. Lo dimostro per assurdo supponendo che non sia continua e arrivando ad una contraddizione.

Per prima cosa so che la f è limitata per cui esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni x . Se considero delle successioni di valori della f queste sono limitate per cui da ciascuna di esse posso estrarre una sottosuccessione convergente.

Suppongo la f non sia continua in x_0 . La definizione di continuità mi dice che per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset V$. Negando tale condizione si vuole provare che esiste V di $f(x_0)$ tale che per ogni intorno U di x_0 si ha $U \not\subset V$ ovvero $f(x_0) \notin V$.

A questo punto si considera un sistema fondamentale di intorni di x_0 , U_n , tali che $U_n \supset U_{n+1}$. Ad ogni U_n associo un elemento x_n mediante i quali definisco una successione $\{x_n\}$. Al tendere di n all'infinito ho che $\{x_n\} \rightarrow x_0$. A tale successione corrisponde la successione dei termini $\{f(x_n)\}$ che per la discontinuità converge ad un $\bar{y} \notin V$ mentre per la chiusura del grafico deve essere $f(x_0) = \bar{y}$. Si ha una contraddizione per cui la f è continua.

Esercizio A.58 *Dimostrare che una funzione continua da X in Y ha grafico chiuso in $X \times Y$ se lo spazio Y è T_2 .*

Prima soluzione

La $f : X \rightarrow Y$ definisce una funzione continua $g : X \times Y \rightarrow Y$ definita come:

$$g(x, y) = f(x) \quad (729)$$

(la g è continua perchè è uguale alla f che lo è per ipotesi). Se considero la topologia prodotto $X \times Y$ e la funzione proiezione (continua per definizione):

$$\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y \quad (730)$$

il grafico:

$$G = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \quad (731)$$

lo posso vedere come:

$$G = \{z \in X \times Y \mid g(z) = \pi_Y(z)\} \quad (732)$$

Si deve dimostrare che G in tale forma è chiuso. Lo si dimostra dimostrando che se ho (Y di tipo T_2):

$$f : X \longrightarrow Y \quad (733)$$

$$g : X \longrightarrow Y \quad (734)$$

l'insieme Z dei punti $x \in X$ tali che $f(x) = g(x)$ è chiuso in X .

Se prendo $y \in Z^C$ ho $f(y) \neq g(y)$. Sfrutto il fatto che Y è di tipo T_2 per cui ho due intorni aperti U' e V' tali che $U' \cap V' = \emptyset$ e con:

$$1. f(y) \in U',$$

$$2. g(y) \in V'.$$

Sfrutto il fatto che f e g sono continue. esiste un intorno U di y tale che $f(U) \subset U'$ e $g(U) \subset V'$ ma dalla $U' \cap V' = \emptyset$ ho $f(U) \cap g(U) = \emptyset$. Siccome ho:

$$Z = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \quad (735)$$

se fosse $U \subset Z$ non avrei $f(U) \cap g(U) = \emptyset$ per cui ho $U \subset Z^C$ ovvero ho:

$$y \in U \subset Z^C \quad (736)$$

ovvero:

$$Z^C = \cup_{y \in U} U \quad (737)$$

per cui Z^C è aperto e Z è chiuso. L'insieme Z è il nostro G .

Seconda soluzione

Definisco:

$$G = \{(x, y) : x \in X, y \in Y, y = f(x)\} \subset X \times Y \quad (738)$$

Si ipotizza che G non sia chiuso ovvero non contiene tutti i suoi punti di accumulazione e si trova una contraddizione per cui, invece, G li contiene ed è chiuso.

Si suppone che esista $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y})$ di accumulazione per G ma tale che $\bar{p} \notin G$ ovvero $\bar{p} \in G^C$ per cui $\bar{y} \neq f(\bar{x})$.

Si ha quindi:

$$1. \{x_n\} \longrightarrow \bar{x},$$

$$2. \{f(x_n)\} \longrightarrow \bar{y} \neq f(\bar{x}).$$

So che Y è di tipo T_2 per cui esistono due aperti disgiunti G_1 e G_2 tali che $\bar{y} \in G_1$ e $f(\bar{x}) \in G_2$. Dalla $\{f(x_n)\} \rightarrow \bar{y}$ ho che esiste n_1 tale che per $n > n_1$ $f(x_n) \in G_1$ e dalla $\{x_n\} \rightarrow \bar{x}$ segue che esiste n_2 tale che per $n > n_2$ $x_n \in U_{\bar{x}}$ con $U_{\bar{x}}$ intorno di $\bar{x}$.

dalle relazioni precedenti ho:

$$1. f^{-1}(f(x_n)) \in f^{-1}(G_1)$$

$$2. f^{-1}(f(\bar{x})) \in f^{-1}(G_2)$$

con gli insiemi $f^{-1}(G_1)$ e $f^{-1}(G_2)$ che sono aperti per la continuità della f e disgiunti per definizione di funzione. Da ciò discende che:

$$1. x_n \in f^{-1}(G_1)$$

$$2. \bar{x} \in f^{-1}(G_2)$$

ma per $n > N = \max(n_1, n_2)$ ho:

$$1. x_n \in f^{-1}(G_1)$$

$$2. x_n \in f^{-1}(G_2)$$

ovvero:

$$1. f(x_n) \in G_1,$$

$$2. f(x_n) \in G_2,$$

ovvero $f(x_n) \in G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Ho una contraddizione per cui $\bar{p}$ non esiste e G è chiuso perchè contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Esercizio A.59 *Dimostrare che in uno spazio metrico i sottoinsiemi compatti sono limitati e chiusi.*

Soluzione

Si deve dimostrare che dato $A \subset X$ se A è compatto allora è chiuso e limitato.

Vediamo la limitatezza.

Dato che A è compatto da ogni ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito. Se come insiemi aperti si scelgono le sfere di centro i punti $x_i \in A$ e raggio $\varepsilon_i > 0$ ovvero $S_i = S(x_i, \varepsilon_i)$ si ha:

$$A \subset \cup_{i \in I} S_i \tag{739}$$

con I che individua il sottoricoprimento. Si definisce ora:

$$\text{diametro}(A) \leq \sup_{x_i, x_j \in A} \{d(x_i, x_j)\} + \varepsilon_i + \varepsilon_j < M \tag{740}$$

con $M \in \mathbb{R}_{++}$ ovvero A ha diametro finito per cui è limitato.

Vediamo la chiusura.

A compatto e metrico (sottoinsieme di spazio metrico) implica A compatto per successioni ovvero ogni successione di elementi di A ammette una sottosuccessione convergente ad un elemento di A ovvero $\forall \{x_n\} \in A$ tale che:

$$\{x_n\} \longrightarrow \bar{x} \quad (741)$$

$\bar{x} \in A$ ovvero A contiene i propri punti di accumulazione ovvero A è chiuso.

Nota

Si ricorda che se si sa che un insieme è compatto si sa che da ogni ricoprimento aperto se ne può estrarre un sottoricoprimento finito per cui, di tutti i ricoprimenti, si sceglie quello più adatto per i nostri scopi.

Esercizio A.60 Dare un esempio di spazio metrico in cui la condizione necessaria dell'esercizio A.59 non è sufficiente

Soluzione

Si vuole un esempio di spazio metrico in cui limitato e chiuso non implica compatto.

Si considera $\mathbb{R}$ e si definisce la distanza nel modo che segue (con $x, y \in \mathbb{R}$):

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases} \quad (742)$$

In questo modo ho che le sfere di centro x e raggio $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$S(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : d(x, y) < \varepsilon\} \quad (743)$$

ovvero:

$$S(x, \varepsilon) = \{x\} \quad (744)$$

Se ora considero un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ quale $I = [0, 1]$ ho che lo posso coprire con un numero infinito di sfere ovvero ho:

$$I = \cup_{x \in I} \{x\} \quad (745)$$

ma come ne tolgo una ho un buco ovvero non ho un sottoricoprimento finito per cui I non è compatto.

Esercizio A.61 Mostrare che nello spazio metrico dei razionali $\mathbb{Q}$ la condizione necessaria dell'esercizio A.59 non è sufficiente

Soluzione

Se considero l'insieme:

$$B = (-\sqrt{3}, +\sqrt{3}) \cap \mathbb{Q} \quad (746)$$

ho che tale insieme:

1. è limitato perchè è contenuto in $[-2, 2] \cap \mathbb{Q}$;
2. è chiuso perchè contiene tutti i suoi punti di accumulazione (se considero un elemento qualunque $q_i \in B$ e considero un intorno del punto con raggio ε in $\mathbb{Q}$ sufficientemente piccolo trovo di sicuro almeno un altro razionale che è il punto di mezzo del segmento $q_i, q_i + \varepsilon$);

ma non è compatto per successioni perchè si può pensare una successione di razionali che converge ad esempio a $+\sqrt{3}$ che non appartiene all'insieme per cui non è neanche compatto.

Esercizio A.62 *Mostrare che nello spazio metrico $C^0[0, 1]$ delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[0, 1]$ con la distanza della "convergenza uniforme" ($d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$) le funzioni:*

$$f_n(x) = x^n \quad (747)$$

sono un sottoinsieme:

1. chiuso,
2. limitato,
3. non compatto.

Soluzione

Definisco l'insieme:

$$\mathcal{F} = \{f_n(x) = x^n \mid x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}\} \quad (748)$$

con la distanza suddetta. Alcuni elementi dell'insieme $\mathcal{F}$ sono le funzioni $f_1 = x$ e:

$$f_\infty = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad (749)$$

limite della successione delle f_n .

È facile vedere come prese due funzioni consecutive nella successione ovvero $f_n = x^n$ e $f_{n+1} = x^{n+1}$ si ha:

1. il punto di $\max(f_n - f_{n+1})$ si ha per $x = \frac{n}{n+1}$;
2. in tale punto la d vale:

$$d = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \quad (750)$$

per cui per $n \rightarrow +\infty$ si ha che il primo valore tende a 1 e il secondo a 0 (essendo il limite della prima frazione pari a e^{-1}).

Si noti anche che presi n ed m con $n \neq m$ si ha che le funzioni x^n e x^m hanno due soli punti in comune per $x \in [0, 1]$ che sono $x = 0$ (in cui valgono 0) e $x = 1$ (in cui valgono 1) ovvero i loro grafici hanno “traiettorie” distinte del triangolo di vertici $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[1, 1]$.

Si vede facilmente come l'insieme $\mathcal{F}$ sia:

1. limitato perchè prese due funzioni qualunque f_n e f_m la loro distanza è superiormente limitata da quella fra f_1 e f_∞ che è inferiore a 1;
2. chiuso perchè non ha punti di accumulazione.

Tale insieme non è compatto perchè non è compatto per successioni dal momento che la f_∞ non è continua.

Esercizio A.63 Dimostrare che se X è compatto e Y è T_2 ogni applicazione da X in Y continua ed invertibile è un omeomorfismo.

Soluzione

Per dimostrare che la funzione:

$$f : X \longrightarrow Y \quad (751)$$

è un omeomorfismo si deve dimostrare che la f^{-1} che esiste per ipotesi è continua e per fare ciò si deve dimostrare che per ogni $A \subset X$ aperto si ha che $f(A) \subset Y$ è aperto oppure che (cosa che faremo) per ogni $C \subset X$ chiuso si ha che $f(C) \subset Y$ è chiuso.

Si ricorda che la f è continua per ipotesi per cui mappa compatti su compatti. Si ha (vedi la **Nota**): preso $C \subset X$ chiuso si ha che C è compatto. Sfruttando la continuità della f si ha che $f(C)$ è compatto e sfruttando il fatto che Y è T_2 si ha che $f(C) \subset Y$ è chiuso. Si ha così che la f mappa chiusi in chiusi ovvero la f^{-1} è continua e la f è un omeomorfismo.

Nota

Si ricorda che:

1. in uno spazio T_2 si separano punti distinti con aperti disgiunti,
2. in uno spazio T_2 gli insiemi compatti sono chiusi,
3. una funzione f è invertibile se è iniettiva e surgettiva.

Esercizio A.64 Dare un esempio di applicazione continua ed invertibile da X in Y , spazio T_2 , che non sia un omeomorfismo.

Soluzione

Lo scopo, sulla base dell'esercizio precedente, è trovare una funzione continua la cui inversa non è continua in modo che la prima non sia un omeomorfismo.

Si considera la seguente funzione:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad (752)$$

con $A = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty]$, definita come:

$$y = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (753)$$

la cui inversa è:

$$x = \begin{cases} -y & y \geq 0 \\ -y + 1 & y \leq 0 \end{cases} \quad (754)$$

discontinua. **Nota**

Si ricorda che $\mathbb{R}$ è T_2 (fra le altre cose).

Esercizio A.65 Si consideri il sottoinsieme $A = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$, ottenuto sottraendo allo spazio topologico $\mathbb{R}^n$ i punti che hanno coordinate tutte razionali. Si provi che A è connesso per archi.

Soluzione

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico è connesso per archi se per ogni coppia di punti distinti $a, b \in A$ esiste una funzione continua:

$$\varphi : I \longrightarrow X \quad (755)$$

contenuta in A (con $I = [0, 1]$) ovvero tale che $\varphi I \subset A$. Nel caso nostro partendo da $a \in A$ (con almeno un $a_i \notin \mathbb{Q}$) si passa a b (con almeno un $b_i \notin \mathbb{Q}$) muovendosi usando una proiezione lungo l'asse a_i fino ad un punto opportuno e poi passando ad un'altra proiezione analoga. Le funzioni proiezione sono continue per definizione e la loro composizione è continua e costituisce la funzione cercata.

In $\mathbb{R}^2$ se si ha (gli a_i sono reali e i q_i razionali):

$$1. a = (q_1, a_1)$$

$$2. b = (a_2, q_2)$$

mi muovo da a a a_1, a_2 lungo $y = a_1$ (uso una funzione proiezione modificata) e poi da a_1, q_2 lungo $x = a_2$ fino a b . Si ha così il cammino cercato. Tale cammino esiste sempre per ogni coppia di punti in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ (al limite è composto da tre segmenti) per cui l'insieme è connesso per archi.

Esercizio A.66 *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Sia $C(A)$ il più grande insieme connesso che contiene A . Si provi che $C(A)$ è un insieme chiuso.*

Soluzione

So che $C(A)$ è massimale per cui se dimostro che $\overline{C(A)}$ è connesso dalla:

$$C(A) \subset \overline{C(A)} \quad (756)$$

e dal fatto che $C(A)$ è un insieme massimale ho che:

$$C(A) = \overline{C(A)} \quad (757)$$

per cui $C(A)$ è chiuso.

Si deve dimostrare che $\overline{C(A)}$ è connesso. Parto dal considerare che $\overline{C(A)}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene $C(A)$ per cui se B è un generico soprainsieme chiuso di $C(A)$ ho:

$$C(A) \subset \overline{C(A)} \subset B \quad (758)$$

Suppongo ora $\overline{C(A)}$ sconnesso per cui esistono due insiemi aperti G ed H che ne rappresentano una sconnessione. Per ipotesi $C(A)$ è connesso per cui si può avere solo uno dei due casi seguenti:

1. $C(A) \subset G$ e $C(A) \cap H = \emptyset$,
2. $C(A) \subset H$ e $C(A) \cap G = \emptyset$.

Si considera il primo caso, l'altro si tratta per simmetria.

Siccome $C(A) \cap H = \emptyset$ si ha $C(A) \subset H^c$ con H^c insieme chiuso e soprainsieme di $\overline{C(A)}$ si ricava:

$$C(A) \subset \overline{C(A)} \subset H^c \quad (759)$$

da cui discende $\overline{C(A)} \cap H = \emptyset$ contraddicendo la definizione di sconnessione. Da tutto ciò discende che gli insiemi G ed H non esistono e perciò $\overline{C(A)}$ è connesso.

Nota

Si ricorda che $C(A)$ è un sottoinsieme connesso massimale per $\mathbb{R}^n$ cioè:

1. $C(A)$ è connesso;
2. $C(A)$ non è sottoinsieme proprio di A .

Nota

La componente E di X è il più grosso sottoinsieme connesso di X cioè:

1. è connesso,
2. non è sottoinsieme proprio di nessun altro connesso.

Siccome esiste A qualunque tale che $A \subset E$ si ha $E \neq \emptyset$.

Esercizio A.67 *Dato uno spazio topologico X qualunque e un suo sottoinsieme A si dimostri che le componenti connesse di A sono sia aperte sia chiuse nella topologia indotta su A da quella assegnata su X .*

Soluzione

Si ha uno spazio topologico X con una topologia τ i cui elementi sono gli aperti G_i . Dato un qualunque insieme $A \subset X$ con la topologia indotta τ_A , gli insiemi aperti di tale topologia sono gli H_i tali che:

$$H_i = A \cap G_i \quad (760)$$

Si suppone di avere n componenti connesse in A .

L'idea (vedi la **Nota**) è che le componenti connesse di A sono una partizione di A ovvero sono tali che:

1. $A = \cup_{i=1}^n A_i$,
2. per ogni coppia di indici distinti i e j si ha $A_i \cap A_j = \emptyset$.

In più ciascuna delle componenti connesse è esprimibile in termini degli H_i . Dalla loro definizione si ha:

$$A_i = (\cup_{j \neq i} A_j)^C \quad (761)$$

per cui:

1. A_i è aperto perchè unione di certi sottoinsiemi della topologia τ_A ,
2. A_i è chiuso perchè complemento di un insieme aperto in base alla suddetta relazione.

Nota

Si può definire la **componente connessa** di un punto e di un insieme. Nel primo caso si parla del più grosso insieme connesso che contiene il punto, nel secondo del più grosso insieme che contiene l'insieme dato. In entrambi i casi una componente connessa è una unione di insiemi connessi.

Esercizio A.68 *Siano X ed Y due spazi topologici compatti, si dimostri che $X \times Y$ è compatto con la topologia degli spazi prodotto.*

Soluzione

Si dà una traccia di soluzione che non fa uso del teorema di Tychonoff.

Si hanno due spazi topologici X (con la topologia τ_X degli aperti G_i) e Y (con la topologia τ_Y degli aperti H_j) compatti e si definisce:

$$Z = X \times Y = \{z(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \quad (762)$$

Dato Z si definiscono le proiezioni (funzioni aperte):

$$1. \pi_1 : Z \rightarrow X,$$

$$2. \pi_2 : Z \rightarrow Y.$$

La topologia τ_Z su Z è la topologia più grossolana (fra quelle di X e Y) che rende le proiezioni π_1 e π_2 continue e cioè tali che:

$$1. \pi_1^{-1}(G_i) \text{ aperto di } \tau_Z,$$

$$2. \pi_2^{-1}(H_j) \text{ aperto di } \tau_Z.$$

Le proiezioni sono continue e aperte ovvero sono omeomorfismi. Si ha:

$$1. \pi_1^{-1}(G_i) = \{z \in Z \mid \pi_1(z) \in G_i\},$$

$$2. \pi_2^{-1}(H_j) = \{z \in Z \mid \pi_2(z) \in H_j\}.$$

ovvero:

$$1. \pi_1^{-1}(G_i) = G_i \times Y,$$

$$2. \pi_2^{-1}(H_j) = X \times H_j.$$

in modo che sia:

$$\pi_1^{-1}(G_i) \cap \pi_2^{-1}(H_j) = G_i \times H_j \quad (763)$$

Se ora prendo gli insiemi V_k aperti di Z in τ_Z li vedo sulla base della relazione precedente e posso scrivere:

$$Z = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \quad (764)$$

da cui:

$$\pi_1(Z) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi_1(V_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = X \quad (765)$$

Sfrutto il fatto che X è compatto per cui ne posso estrarre un sottoricoprimento finito individuato da un insieme di indici I (ne userò uno duale J per Y anch'esso compatto per ipotesi) per cui scrivo:

$$X = \bigcup_{i \in I} G_i = \pi_1(Z) \quad (766)$$

Se applico $m.$ a $m.$ la proiezione inversa ho:

$$Z = \pi_1^{-1}(\cup_{i \in I} G_i) = \cup_{i \in I} G_i \times Y \quad (767)$$

Sfrutto ora la compattezza di Y in modo da scrivere:

$$Z = \cup_{i \in I} \cup_{j \in J} G_i \times H_j = \cup_k V_k \quad (768)$$

da cui la compattezza di Z . Si è posto che le immagini inverse individuino una sottobase di τ_Z per cui le intersezioni finite di elementi della sottobase sono una base per τ_Z . Questo giustifica (ma non dimostra) l'ultimo passaggio.

Esercizio A.69 Si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (769)$$

definita come:

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \quad (770)$$

e la relazione di equivalenza E in $\mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$tRs \Leftrightarrow f(st) = f(s) \quad (771)$$

Si dimostri che lo spazio quoziente $\mathbb{R}/E$ è omeomorfo a S^1 .

Soluzione

Si applicano le conclusioni dell'esercizio A.63. Se $\mathbb{R}/E$ è compatto, S^1 è T_2 e si trova una applicazione continua e invertibile da $\mathbb{R}/E$ a S^1 allora tale applicazione è l'omeomorfismo cercato.

Per prima cosa si definisce una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}/E$ che ad ogni $t \in \mathbb{R}^n$ associa la sua classe di equivalenza $[t]$. Tale funzione la si può definire continua scegliendo in modo opportuno la topologia quoziente su $\mathbb{R}/E$. La f è continua.

Si definisce ora la:

$$\tilde{f} : \mathbb{R}/E \longrightarrow S^1 \quad (772)$$

tale che $f = \tilde{f} \cdot p$ e si vuole dimostrare che è un omomorfismo ovvero che è continua con la sua inversa. Si ha che la $\tilde{f}$:

1. è continua in quanto se prendo $U \in S^1$ aperto ho $f^{-1}(U) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U))$ e $f^{-1}(U)$ è aperto per la continuità della f e per la continuità della p si ha che $\tilde{f}^{-1}(U)$ deve essere aperto da cui la $\tilde{f}$ è continua;
2. iniettiva (ovvero invertibile) perchè ad ogni elemento di $\mathbb{R}/E$ corrisponde un solo punto su S^1 e viceversa (per cui è una corrispondenza biunivoca).

Dalla continuità della p e dal fatto che preso il compatto $[0, 2\pi]$ si ha $p([0, 2\pi]) = \mathbb{R}/E$ si ha che $\mathbb{R}/E$ è un compatto perchè immagine di compatto mediante funzione continua. Essendo, inoltre, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ di tipo T_4 e quindi T_2 sono verificate le condizioni previste per cui $\tilde{f}$ l'omeomorfismo cercato.

Esercizio A.70 Di ciascuna delle proprietà sotto elencate di uno spazio topologico X si dica quali “passano” ad ogni sottospazio Y con la topologia indotta e quali allo spazio prodotto $X \times X$ (giustificando le risposte). X è uno spazio : T_0 , T_1 , T_2 , compatto , connesso , connesso per archi , primo contabile , secondo contabile , separabile , metrico completo.

Soluzione

Caso di X e $Y \subset X$.

1. se X con τ è T_0 lo stesso vale per Y nella topologia relativa τ_Y . Se considero $a, b \in Y$ ho che posso trovare $G \in \tau$ tale che $a \in G$ e $b \notin G$ ma lo stesso vale in τ_Y se considero $H = G \cap Y$.
2. se X con τ è T_1 lo stesso vale per Y nella topologia relativa τ_Y . Se considero $\{p\} \subset Y$ ho che $\{p\}$ è chiuso in X ovvero $X \setminus \{p\}$ è aperto in X ma:

$$p \in Y \subset X \implies Y \cap (X \setminus \{p\}) = Y \setminus \{p\} \quad (773)$$

ovvero $\{p\}$ è chiuso nella topologia relativa per cui Y è T_1 .

3. se X con τ è T_2 lo stesso vale per Y nella topologia relativa τ_Y . Se considero $a, b \in Y \subset X$ distinti ho che esistono due insiemi aperti disgiunti G ed H nella topologia τ tali che $a \in G$ e $b \in H$ e $G \cap H = \emptyset$. Per definizione $Y \cap G$ e $Y \cap H$ sono aperti in τ_Y e in più:

(a) se $a \in G$ e $a \in Y$ allora $a \in Y \cap G$;

(b) se $b \in H$ e $b \in Y$ allora $b \in Y \cap H$;

(c) dalla $G \cap H = \emptyset$ si ha $(Y \cap G) \cap (Y \cap H) = \emptyset$;

ovvero Y è T_2 .

4. se X è compatto e si prende $Y = \dot{X}$ si ha che Y non è compatto lo stesso vale se si prende $Y = D(X)$.
5. se X è connesso e prendo due suoi sottoinsiemi singoletto disgiunti per definire $Y = \{a\} \cup \{b\}$ ho che Y non è connesso ma non lo è neanche per archi.

6. se X è primo contabile ho che lo stesso vale per $Y \subset X$ dal momento che se ho una base locale per un punto $p \in Y \subset X$ allora intersecando gli elementi della base con Y ho ancora una base contabile.
7. se X è secondo contabile ho che lo stesso vale per $Y \subset X$ dal momento che se ho una base numerabile per X ho che intersecando gli elementi della base con Y ho ancora una base numerabile per Y .
8. siccome X è separabile se contiene un sottoinsieme A denso ovvero la cui chiusura è X se prendo $Y \subset X$ non necessariamente ho che lo stesso accade nella topologia relativa per cui Y non è separabile.
9. se X è metrico completo lo stesso non vale per $Y \subset X$ perchè si può trovare una successione di Cauchy di elementi di Y che converge ad un punto che appartiene ad X ma non ad Y .

Caso di X e $X \times X$.

Ricordando che le proiezioni $\pi_i X \times X \rightarrow X$ (con $i = 1, 2$) sono funzioni aperte e continue ovvero sono bicontinue e quindi sono un omeomorfismo fra gli spazi topologici $X \times X$ e X per cui le proprietà topologiche passano da uno spazio ad uno ad esso omeomorfo per cui si ha:

1. se X è T_0 o T_1 o T_2 (sono proprietà topologiche) lo stesso vale per $X \times X$;
2. se X è compatto lo stesso vale (è una proprietà topologica) per $X \times X$;
3. se X è primo contabile lo stesso vale (è una proprietà topologica) per $X \times X$;
4. se X è secondo contabile lo stesso vale (è una proprietà topologica) per $X \times X$;
5. se X è separabile lo stesso non vale per $X \times X$ perchè l'essere separabile non è una proprietà topologica;
6. se X è metrico completo lo stesso non vale per $X \times X$ perchè l'essere una successione di Cauchy non è una proprietà topologica.

Esercizio A.71 Si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (774)$$

continua e surgettiva. Si dimostri che per ogni K in $\mathbb{R}$ compatto esiste L compatto in $\mathbb{R}$ tale che $f(L) = K$.

Soluzione

L'idea è quella di costruire, sfruttando le proprietà della f , un insieme in $\mathbb{R}$ da cui selezionarne un pezzo chiuso e limitato (e perciò compatto) che chiamiamo L e la cui immagine è l'insieme compatto K da cui si è partiti. Si sfrutta il fatto che K è compatto in $\mathbb{R}$ ovvero è chiuso e limitato. Si ha:

1. essendo K limitato ha un valore massimo u e uno minimo l ;
2. essendo K chiuso e la f continua $f^{-1}(K)$ è un insieme chiuso;
3. essendo f surgettiva esistono non vuoti gli insiemi $U_K = \{f^{-1}(u)\}$ e $L_K = \{f^{-1}(l)\}$;
4. scelgo $x_1 \in U_K$ e $x_2 \in L_K$ tali che $x_1 < x_2$ in modo da definire l'intervallo $L = [x_1, x_2]$;
5. non si è ancora finito dato che non si è sicuri che i valori presi vadano bene nel senso che non si è sicuri che tutti gli $x_1 < x < x_2$ sono tali che $f(x) \in K$;
6. se $[(x_1, x_2) \cap (U_K \cup L_K) = \emptyset$ non si hanno controimmagini di u ed l fra i valori presi e si è finito;
7. altrimenti se $(x_1, x_2) \cap U_K \neq \emptyset$ prendo il massimo di tale intersezione e lo assegno a x_2 ovvero scarto tutte le controimmagini di u tranne la più grande;
8. altrimenti se $(x_1, x_2) \cap L_K \neq \emptyset$ prendo il massimo di tale intersezione e lo assegno a x_1 ovvero scarto tutte le controimmagini di l tranne la più grande;

In questo modo si è costruito l'intervallo $L = [x_1, x_2]$ compatto tale che $f(L) = K$.

A.7 Esercizi aggiunti

Esercizio A.72 *Dati due insiemi A e B tali che $A \subset B$ dimostrare che ogni punto di accumulazione di A è punto di accumulazione di B .*

Soluzione

Si vuole dimostrare che $D(A) \subset D(B)$.

Se A non ha punti di accumulazione si è finito dato che $D(A) = \emptyset \subset D(B)$

quale che sia $D(B)$. Suppongo $p \in D(A)$ e dimostro che $p \in D(B)$. Dalla definizione di punto di accumulazione segue che $p \in D(A)$ sse per ogni insieme aperto G che contiene p si ha:

$$(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset \quad (775)$$

Siccome $A \subset B$ si ha:

$$(G \setminus \{p\}) \cap B \supset (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset \quad (776)$$

per cui dal fatto che $p \in D(A)$ (che dà la disuguaglianza di destra) e dal fatto che $A \subset B$ (che dà l'inclusione) segue $p \in D(B)$ ovvero $D(A) \subset D(B)$.

Nota

Si è fatto uso della seguente proprietà insiemistica: se $A \subset B$ e $A \cap H \neq \emptyset$ allora $B \cap H \neq \emptyset$.

Esercizio A.73 *Dati due insiemi A ed F se F è chiuso e $A \subset F$ dimostrare che $D(A) \subset F$.*

Soluzione

Dal fatto che $A \subset F$ e dal risultato dell'esercizio precedente discende:

$$D(A) \subset D(F) \quad (777)$$

Siccome F è chiuso contiene tutti i suoi punti di accumulazione ovvero:

$$D(F) \subset F \quad (778)$$

Dalle relazioni precedenti discende, data la proprietà transitiva dell'inclusione fra insiemi, la tesi.

Esercizio A.74 *Dato un insieme A qualunque si dimostri che vale la seguente eguaglianza:*

$$\bar{A} = A \cup D(A) \quad (779)$$

Soluzione

Si deve dimostrare una doppia inclusione:

1. $A \cup D(A) \subset \bar{A}$,
2. $\bar{A} \subset A \cup D(A)$.

Vediamo il punto 1.

Quale che sia A si ha che $\bar{A}$ è chiuso e tale che $A \subset \bar{A}$. Dall'esercizio precedente so che:

$$D(A) \subset \bar{A} \quad (780)$$

per cui ho $A \cup D(A) \subset \bar{A}$.

Vediamo il punto 2.

So che $A \cup D(A)$ è un insieme chiuso e contiene A per come è costruito. Dalla definizione di chiusura di un insieme come il più piccolo soprainsieme dell'insieme dato si ha:

$$A \subset \bar{A} \subset A \cup D(A) \quad (781)$$

da cui la tesi.

Nota

Al punto 1. si è fatto uso della seguente proprietà insiemistica: se $B \subset A$ e $C \subset A$ allora $B \cup C \subset A$.

Esercizio A.75 Dato un insieme A qualunque caratterizzare il suo derivato $D(A)$.

Soluzione

Dato A l'insieme $D(A)$ ne contiene i punti di accumulazione ovvero i punti x tali che:

$$\forall U_x (U_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \quad (782)$$

Nella suddetta definizione U_x è un intorno aperto di x . Si procede per analogia. Dato A si ha che A è chiuso sse $D(A) \subset A$. Nel nostro caso si vuole dimostrare che:

$$D(A) \text{ chiuso sse } D(D(A)) \subset D(A) \quad (783)$$

Si deve dimostrare che:

1. $D(A) \text{ chiuso} \Rightarrow D(D(A)) \subset D(A)$,
2. $D(A) \text{ chiuso} \Leftarrow D(D(A)) \subset D(A)$.

Vediamo il punto 1.

Per ipotesi $D(A)$ è chiuso per cui considero $p \notin D(A)$ ovvero $p \in D(A)^C$ con $D(A)^C$ aperto tale che:

$$D(A)^C \cap D(A) = \emptyset \quad (784)$$

Da tale relazione discende che p non può essere punto di accumulazione per $D(A)$ (se lo fosse la suddetta intersezione sarebbe non vuota) e quindi tutti i punti di accumulazione di $D(A)$ (se ne esistono) sono contenuti in $D(A)$ per cui:

$$D(D(A)) \subset D(A) \quad (785)$$

Vediamo il punto 2.

Sapendo che $D(D(A)) \subset D(A)$ si vuole dimostrare che $D(A)$ è chiuso ovvero, in modo equivalente, che $D(A)^C$ è aperto.

A tale scopo considero $p \in D(A)^C$ per cui $p \notin D(D(A))$. Da tale fatto discende che esiste un intorno V_p di p tale che:

$$(V_p \setminus \{p\}) \cap D(A) = \emptyset \quad (786)$$

A questo punto si sa che:

1. $p \in V_p$ per come ho preso V_p ;
2. $p \notin D(A)$ per come ho preso p ;

per cui:

$$V_p \cap D(A) = (V_p \setminus \{p\}) \cap D(A) = \emptyset \quad (787)$$

Si ha, pertanto, che:

$$p \in V_p \subset D(A)^C \quad (788)$$

in modo che si possa scrivere:

$$D(A)^C = \cup_{p \in D(A)^C} V_p \quad (789)$$

e quindi $D(A)^C$ è un insieme aperto e perciò $D(A)$ è un insieme chiuso.

Nota

Al punto 2. si è fatto uso della seguente proprietà insiemistica: se ho $A \subset B$ ed ho $p \in B^C$ allora $p \notin B$ e quindi $p \notin A$.

Nota A.64 dato $\mathbb{R}$ con la topologia ordinaria si fa notare che:

1. dato $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ siccome $\forall p \in \mathbb{R}$ si ha che per ogni intorno V_p di p è:

$$(V_p \setminus \{p\}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad (790)$$

si ha che ogni $p \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione per $\mathbb{Q}$ in modo che:

$$D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \quad (791)$$

da cui:

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \quad (792)$$

e quindi $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$;

2. Se considero S come sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e ne voglio la chiusura ovvero:

$$\bar{N} = N \cup D(N) \quad (793)$$

devo valutare $D(N)$. Si può vedere che per ogni $p \in \mathbb{R}$ si può trovare un intorno V_p tale che:

$$(V_p \setminus \{p\}) \cap N = \emptyset \quad (794)$$

per cui $D(N) = \emptyset$ e quindi $\bar{N} = N$ ovvero N non è denso in $\mathbb{R}$. Lo stesso vale se considero $\mathbb{Z}$.

Esercizio A.76 Dato un insieme A qualunque connesso si dimostri che $\bar{A}$ è connesso.

Soluzione

Se B è un qualunque soprainsieme chiuso di A si ha (dalla definizione di chiusura):

$$A \subset \bar{A} \subset B \quad (795)$$

Si sa che A è connesso e si vuole dimostrare che $\bar{A}$ è connesso. Si suppone che $\bar{A}$ sia sconnesso per cui esiste una sconnessione ovvero esistono due insiemi aperti G ed H tali che $\bar{A} \cap G$ e $\bar{A} \cap H$ sono insiemi non vuoti e disgiunti la cui unione mi dà $\bar{A}$. Essendo A connesso per ipotesi ed essendo $A \subset \bar{A}$ sono possibili solo due casi:

1. $A \subset G$ ovvero $A \cap H = \emptyset$,
2. $A \subset H$ ovvero $A \cap G = \emptyset$

Si esamina il caso 1. dato che il caso 2. lo si fa per simmetria. Se vale la 1. si ha che $A \subset H^C$ con H^C chiuso per cui soprainsieme di $\bar{A}$. Si avrebbe pertanto:

$$A \subset \bar{A} \subset H^C \quad (796)$$

ovvero $\bar{A} \cap H = \emptyset$ in contraddizione con la definizione di sconnessione per cui G ed H non esistono e $\bar{A}$ è connesso.

Esercizio A.77 Si dimostri che per il grafico G di una funzione:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (797)$$

si ha che G è chiuso sse f è chiusa.

Soluzione

G chiuso $\Rightarrow f$ chiusa.

Se G è chiuso allora ho che ogni successione $\{p_n\} \in G$ converge a $p \in G$. So inoltre che:

$$1. p_n = (x_n, f(x_n)),$$

$$2. p = (\bar{x}, f(\bar{x})),$$

per cui ho, dalla convergenza:

$$1. \{x_n\} \longrightarrow \bar{x} \text{ ovvero } A \text{ è chiuso};$$

$$2. \{f(x_n)\} \longrightarrow f(\bar{x}) \text{ ovvero } f(A) \text{ è chiuso};$$

ovvero F è chiusa.

f chiusa $\Rightarrow G$ chiuso.

Per dimostrare che G è chiuso devo dimostrare che:

$$\{(x_n, f(x_n)) \in G \longrightarrow \{\bar{x}, f(\bar{x})\} \in G \quad (798)$$

Per ipotesi la f è chiusa ovvero se A è chiuso allora $f(A)$ è chiuso. Ma:

$$1. A \text{ chiuso} \Rightarrow \{x_n\} \longrightarrow \bar{x} \in A,$$

$$2. f(A) \text{ chiuso} \Rightarrow \{f(x_n)\} \longrightarrow f(\bar{x}) \in f(A),$$

ovvero $\{(x_n, f(x_n)) \in G$ e $\{\bar{x}, f(\bar{x})\} \in G$ per cui G è chiuso.

Nota

Si ricorda che una funzione è detta essere chiusa sse mappa insiemi chiusi in insiemi chiusi mentre è detta essere aperta sse mappa aperti su aperti.

Si fa notare che:

$$1. f \text{ continua} \Rightarrow G \text{ chiuso} \Leftrightarrow f \text{ chiusa};$$

$$2. f \text{ continua} \not\Rightarrow f \text{ aperta, un esempio è la } f(x) = x^2;$$

$$3. f \text{ continua e iniettiva} \Rightarrow f \text{ aperta}.$$

Riferimenti bibliografici

- [Ayr65] Frank Ayres. *Algebra Moderna*. ETAS, Collana Schaum, 1965.
- [Lan83] Serge Lang. *Real Analysis*. Addison Wesley, 1983.
- [Lip65] Seymour Lipschutz. *General Topology*. Schaum's outlines, 1965.
- [ST80] Isadore M. Singer and John A. Thorpe. *Lezioni di topologia elementare e di geometria*. Boringhieri, 1980.
- [VCV67] A. Tognoli V. Checcucci and E. Vesentini. *Lezioni di topologia generale*. Feltrinelli, 1967.

Index

Symbols

T_0	81, 234
T_1	81, 235
T_2	83, 154, 235
T_3	83, 241
T_4	85, 154, 241
$T_{3.5}$	88

A

aperto	213
applicazione	
proiezione.....	232

B

base	216
numerabile.....	72
basi	
equivalenti.....	217

C

cammino	282
cammino inverso.....	282
caratterizzazione dei punti.....	52
cardinalità	
definizione di.....	18
notazione	18
proprietà.....	18
chiuso	213
chiusura	214
definizione di.....	49, 243
proprietà.....	49
classi di equivalenza	
definizione di.....	10
codominio	
di una funzione	11
di una relazione	9
compattezza	
chiusura	154

funzioni continue.....	154
locale	117
prima definizione	118
seconda definizione.....	118
numerabile.....	117
per successioni	117, 155
pura	117
compattificazione	
definizione di	119
di Alexandroff	
definizione di	119
di punto singolo.....	159
definizione di	119
compatto	
spazio	220
completamento	
definizione di	134
completezza	
definizione di.....	30
completezza come proprietà topo-	
logica	130
componente connessa	100, 151
composizione di funzioni	
continuità.....	147
definizione di.....	12
composizione di relazioni	
definizione di.....	11
connesso	
spazio	220
contabilità	
definizione di.....	17
continuità	
funzione	
definizione di.....	59
globale.....	40
per controimmagini	
definizione di.....	60

- Corollario
 Riesz 159
 corrispondenza
 biunivoca 229
- D**
 dazio topologico
 definizione di
 insiemi chiusi 214
 De Morgan
 leggi 47
 derivato 214, 243
 disco aperto in $\mathbb{R}^2$ 33
 disuguaglianza triangolare 212
 distanza 212
 euclidea 36
 dominio
 di una funzione 11
 di una relazione 9
 dualità
 principio di 48
- E**
 elemento di un insieme
 massimale 21
 minimale 21
 Esempio
 T_1 finito
 topologia discreta 254
 T_2
 sottospazi T_2 256
 aperti e topologia relativa 184
 base e superbase 186
 base e topologie 188, 189
 basi in $\mathbb{R}^2$ 186
 caratterizzazione dei punti 179
 caratterizzazione di topologie
 161
 chiusura 173
 chiusura e densità 171, 172
 chiusura, interno e frontiera 180
- classe insiemi connessi
 unione connessa 289
 esempi di intorni 183
 funzione identità e continuità
 194
 funzioni aperte e chiuse ... 201
 funzioni e continuità 193, 195,
 198, 199
 funzioni e non continuità in un
 punto 198
 insieme connesso sse non sepa-
 rabile 286
 insiemi
 connessi e separati 287
 insiemi sconnessi 276
 separati 285
 insiemi sconnessi in $\mathbb{R}^2$ 276
 insiemi separati
 sconnessione 284
 metrica e sfere 205
 proprietà degli intorni 182
 sconnessione e sottoinsiemi 287
 sottobase con requisito 191
 sottobase e topologie 192
 sottospazi di spazi T_1 252
 spazi topologici e punti di
 accumulazione 167
 spazio metrico e chiusura 206
 spazio metrico, base e sfere 206
 spazio topologico
 $\mathbb{R}$ 278
 componenti connesse 280
 discreto e localmente connesso 282
 funzioni e connessione ... 278
 proprietà intersezione finita
 267
 sconnessione 278
 sconnesso 277
 topologia relativa 278
 spazio topologico T_1 e base 255

-
- spazio topologico T_2257
 - sottoinsieme compatto è chiuso.....269
 - sottoinsiemi aperti disgiunti 271
 - successioni convergenti..258
 - spazio topologico compatto
 - proprietà.....266
 - sottoinsieme chiuso è compatto 263
 - spazio topologico e base locale 210
 - spazio topologico e metriche 207
 - spazio topologico primo contabile
 - proprietà.....258
 - spazio topologico secondo contabile.....210, 211
 - spazio topologico separabile 211
 - topologia discreta, indiscreta 173
 - topologia generata 190
 - topologia prodotto
 - $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$273
 - topologie e sottoinsiemi ... 163
 - topologie e sottoinsiemi su $\mathbb{N}$ 166
 - topologie incluse e punti di accumulazione 169
 - Esercizio
 - G chiuso e limitata continua 304
 - T_1
 - proprietà.....254
 - punti di accumulazione..253
 - singoletti chiusi 290
 - T_1 sse punti insiemi chiusi.251
 - T_2
 - compatti chiusi 291
 - compatti disgiunti 294
 - T_2 e compatto
 - T_4 296
 - X
 - chiusi compatti 295
 - $\mathbb{Q}$
 - limitato e chiuso ma non compatto 307
 - $\mathbb{R}$
 - chiuso e limitato sse compatto.....300
 - chiuso e limitato sse compatto per successioni 300
 - intervallo sse connesso .. 296
 - $\mathbb{R}^n$
 - chiuso e limitato sse compatto.....301
 - chiuso e limitato sse compatto per successioni 301
 - base
 - equivalenza delle definizioni 185
 - basi e topologie 188
 - caratterizzazione dei punti176, 177, 179
 - caratterizzazione del derivato 319
 - caratterizzazione di una topologia 162
 - chiusura e derivato.....175
 - chiusura e punti di accumulazione.....174
 - chiusura, definizione 318
 - compattezza
 - equivalenza su topologie.265
 - compattezza topologia prodotto.....313
 - compatto su compatto316
 - componente connessa311
 - componenti connesse

aperte e chiuse 312
 connesso e chiusura connessa
 321
 connesso e unione di connessi
 302
 continua grafico connesso . 303
 definizione di base 187
 derivato 168
 proprietà 169, 170
 derivato e inclusione 318
 derivato e sottoinsieme 317
 esempio
 singoletti non chiusi 291
 esempio non omeomorfismo 309
 famiglia di connessi è connessa
 301
 funzione composta e continuità
 195
 funzioni e continuità . 192, 199
 funzioni e continuità in termini
 di successioni 200
 funzioni e continuità per im-
 magini inverse di chiusi
 196
 funzioni, chiusura e continuità
 196
 grafico chiuso non continua 303
 grafico chiuso sse funzione
 chiusa 321
 intervalli in $\mathbb{R}$ e connettività
 202
 intorno dei punti 181
 limitato e chiuso ma non
 compatto 307
 metrica banale 204
 omeomorfismo 309
 proprietà ereditabili 315
 singoletti chiusi
 T_1 290
 sottobase e topologia relativa
 191

spazio T_2 allora G chiuso .. 304
 spazio metrico
 compatti sono limitati e
 chiusi 306
 spazio metrico, base e sfere 206
 spazio quoziente
 omeomorfo 314
 spazio topologico
 intersezione di insiemi ... 270
 primo contabile 255
 spazio topologico T_2
 compattezza 268
 spazio topologico connesso per
 archi 310
 spazio topologico primo conta-
 bile 208
 spazio topologico primo conta-
 bile e base locale 208
 topologia cofinita
 compatto 263
 topologia discreta
 sottoinsieme finito non com-
 patto 264
 topologia generata 190
 topologia relativa 183
 topologie e funzioni 164
 topologie e sottoinsiemi .. 162,
 164
 topologie e sottoinsiemi su $\mathbb{R}$
 165

estremo
 inf 23
 inferiore 21
 sup 23
 superiore 22

F

funzione
 aperta 149
 bigettiva
 definizione di 229

- bigettiva o biiezione 13
 biunivoca
 definizione di 229
 chiusa 149
 continua
 composizione 226
 definizione intuitiva 39
 immagini inverse 40, 225
 prima definizione 35, 146
 quarta definizione 146
 seconda definizione .. 35, 146
 terza definizione 35, 146
 continua in un insieme
 definizione di 31
 continua in un punto
 definizione di 31
 continua per immagini inverse
 definizione di 32
 definizione di 11
 di insieme e a valori reali ... 14
 proprietà 15
 distanza
 definizione di 36
 estensione continua 233
 identità 13
 immagine di un insieme 14
 immagine inversa di un insieme
 14
 iniettiva 12
 surgettiva 13
 uniformemente continua
 definizione di 157
 funzione distanza 212
 funzioni
 proiezione 125
 proiezione inversa 126
 proprietà delle 12
- G**
- grafico
 di una funzione 12
- H**
- Hausdorff 83, 154, 235
 compattezza implica chiusura
 154
- I**
- immagine
 definizione di 11
 inf 21
 insieme
 aperto 25, 33, 38, 142, 213
 proprietà 25
 cardinalità 6, 17
 chiuso 35, 47, 143, 213
 prima definizione 27
 proprietà 47, 142
 seconda definizione 27
 chiusura
 definizione 143
 proprietà 144
 compatto
 per successione 116
 completamente regolare 88
 completezza 156
 completo 142
 contabile 17
 definizione di 6
 denso 144
 definizione 73
 derivato 26
 finito 17
 non aperto 25
 numerabile 17
 teoremi 17
 relativa compattezza 156
 totalmente limitato 156
 universale 7
 vuoto 7
 insieme quoziente
 definizione di 10
 proprietà 11

-
- insiemi
 - equivalenza 16
 - operazioni su 7
 - ordinamento parziale 19
 - ordinamento totale 20
 - prodotto di 9
 - proprietà delle operazioni ... 8
 - uguaglianza 7
 - insiemi aperti
 - famiglia di 39
 - proprietà 39
 - insiemi connessi
 - proprietà 277
 - insiemi indiciati
 - definizione di 13
 - prodotti cartesiani di 13
 - insiemi separati in $\mathbb{R}$ 274
 - insiemi separati in $\mathbb{R}^2$ 275
 - interno
 - definizione di 50
 - insieme 143
 - proprietà 50
 - intervallo
 - connesso in $\mathbb{R}$ 97
 - intorni
 - sistema fondamentale 64
 - spazio fondamentale 63
 - intorno 145
 - definizione di 37
 - intorno aperto 51, 145
 - L**
 - Lemma
 - Urysohn 89, 159, 245
 - M**
 - metriche
 - equivalenti 250
 - N**
 - non contabilità
 - definizione di 17
 - non numerabilità
 - definizione di 17
 - norma L^1 140
 - norma del **sup** 140
 - normale 154, 241
 - numerabilità
 - definizione di 17
 - O**
 - omeomorfismo
 - definizione di ... 106, 147, 229
 - relazione di equivalenza ... 107
 - spazi topologici 230
 - ordinamento
 - definizione di 19
 - P**
 - palla e sfera
 - distinzione 142
 - primo contabile 65
 - proiezioni 125
 - inverse 126
 - proprietà dell'intersezione finita
 - 153
 - proprietà intersezione finita
 - definizione di 224
 - proprietà topologiche
 - ereditarietà 75
 - punto
 - aderente 143
 - di accumulazione ... 26, 35, 38, 214
 - di accumulazione in $\mathbb{R}^2$ 34
 - di frontiera 38, 143
 - interno 24, 37, 143
 - interno in $\mathbb{R}^2$ 33
 - isolato 38
 - punto esterno 38
 - R**
 - regolare 241
 - relazione

proprietà.....10
 relazione binaria
 definizione di.....9
 relazione di equivalenza
 definizione di.....10
 relazione identica
 definizione di.....10
 relazione inversa
 definizione di.....10
 ricoprimento.....223
 aperto
 definizione di.....223
 definizione di.....223

S

secondo contabile.....72
 separazione
 con funzioni continue..88, 159
 sfere aperte
 definizione di.....139
 sottospazio.....144
 spazi
 prodotto di.....157
 spazi metrici
 spazi topologici.....249
 spazi topologici.....249
 compatti
 funzione fra.....228
 connessi
 funzione fra.....227, 228
 implicazioni.....248
 inclusioni.....247
 riassunto delle caratterizzazio-
 ni.....248
 spazi prodotto
 definizione di.....273
 spazio compatto.....220
 spazio connesso.....220
 spazio metrico.....212, 250
 T_2236
 T_4244

completezza e chiusura....131
 completo
 proprietà.....128
 definizione di.....36, 39, 141
 proprietà.....131, 141
 spazio metrico e topologico
 relazione.....217
 spazio prodotto.....148
 spazio topologico.....142
 T_081, 234
 T_181, 235
 T_1 sse chiuso.....236
 T_283, 154, 235
 funzione continua.....245
 se compatto chiuso.....238
 separazione con aperti..240
 T_383
 definizione di.....241
 T_485, 154
 definizione di.....241
 $T_{3.5}$88
 compattezza.....153
 compattezza e continuità..110
 compattezza locale.....158
 compatto.....108, 223
 definizione di.....223
 prima definizione.....153
 proprietà.....115
 seconda definizione.....153
 completamente regolare....91
 connessione
 funzioni continue.....103
 connessività.....149
 connesso
 condizione necessaria e suffi-
 ciente.....95
 definizione di.....220
 definizione intuitiva.....94
 definizione negativa.....94
 per archi.....283
 proprietà.....149

-
- teorema 220
 - topologia indotta 95
 - connesso per archi 151
 - definizione positiva 96
 - definizione di 42
 - insiemi aperti 213
 - denso 73
 - di Hausdorff 83, 154, 235
 - di Tychonoff 249
 - metrizzabile
 - definizione di 250
 - esempi di 250
 - normale 85, 154
 - definizione di 241
 - proprietà 42
 - regolare 83
 - definizione di 85, 241
 - ricoprimento 153
 - se connesso connesso per archi
 - 96
 - semplicemente connesso ... 284
 - separabilità 145
 - prima definizione 73
 - seconda definizione 74
 - terza definizione 74
 - sottoinsieme compatto ... 109
 - sottoricoprimento 153
 - totalmente limitato
 - definizione di 132
 - struttura topologica 213
 - successione
 - compattezza per 116
 - continuità per 147
 - convergente 29
 - definizione alternativa 29
 - prima definizione 35
 - seconda definizione 35
 - convergenza 61
 - definizione di 28, 61
 - di Cauchy 128
 - definizione 29
 - limitata 28
 - successioni
 - chiusura per 62
 - continuità per 66
 - sup 22
- T**
- Teorema
 - Bolzano-Weierstrass ... 27, 117
 - Heine-Pinkerle-Borel.. 28, 111, 115
 - spazio metrico è spazio normale 86
 - Tietze 94, 160
 - topologico 124
 - Tychonoff 158, 233
 - corollario 1 158
 - corollario 2 158
 - valore intermedio di Weierstrass 32
 - Topologia
 - prodotto 125
 - topologia
 - banale 44
 - base 69, 145, 216
 - proprietà 70
 - cofinita 211, 264
 - definizione di 139
 - di Zarinski 56, 81, 143
 - discreta 44, 48, 139, 218
 - diversa su $\mathbb{R}$ 71
 - finezza 46
 - generica 48
 - granularità 46
 - indiscreta 44, 48, 139
 - indotta 76, 144
 - insiemi aperti 76
 - insiemi chiusi 77
 - meno fine
 - definizione di 230
 - ordinamento 45

ordinaria.....	139
più debole	
definizione di	230
prodotto.....	148
relativa	218
topologia metrica	250
topologie metriche	
proprietà	250

U

uguaglianza fra funzioni	
definizione di.....	12