La Trasformata di Laplace

Lorenzo Cioni

26 giugno 2009

Dipartimento di Ingegneria della produzione, termoenergetica e modelli matematici (DIPTEM), Università di Genova
e
Dipartimento di Informatica, Università di Pisa

e-mail: cioni@diptem.unige.it,lcioni@di.unipi.it

Sommario

Le presenti note sono una introduzione molto sintetica e parziale alla Trasformata di Laplace (TdL), alla sua relazione con la Trasformata [integrale] di Fourier (TdF) e ad alcune sue applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali e a particolari equazioni integrali.
La lista degli argomenti trascurati sarebbe decisamente più lunga per cui non la si riporta.
Maggiori dettagli possono essere trovati nei testi citati nei Riferimenti bibliografici.

1 Introduzione

Le presenti note sono basate su alcuni testi introduttivi sulla Trasformata di Laplace (TdL, Spiegel (1976), Rainville (1963) e Kuhfittig (1978)) e rappresentano una concisa introduzione all'argomento con alcune applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali e a particolari equazioni integrali.
Le presenti note non trattano, invece, l'uso della TdL per la descrizione e analisi dei Sistemi Lineari visti come black box di cui la TdL consente di determinare la descrizione del legame ingresso÷uscita mediante la cosiddetta **funzione di trasferimento**.
Per una trattazione di questo argomento si rimanda, ad esempio, a Director and Rohrer (1972).

2 Il concetto di trasformata

Il concetto di base è quello di **trasformata** (Rainville (1963) e Kuhfittig (1978)) vista come un operatore che trasforma una funzione in un'altra. Un esempio di trasformata (o funzionale) è dato dall'operatore differenziale D che trasforma una funzione differenziabile nella sua derivata:

$$D : F \rightarrow F' \tag{1}$$

in cui F è l'insieme delle funzioni differenziabili (per semplicità da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$) mentre F' è l'insieme delle loro derivate (di nuovo da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$).
Un'altro esempio è dato dalla trasformata integrale definita nel modo seguente:

$$T\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)F(t)dt = f(s) \tag{2}$$

La (2) permette di associare ad ogni funzione $F(t)$ per la quale l'integrale esiste una funzione $f(s)$ che è la trasformata integrale della $F(t)$.
L'idea di base è che l'uso della trasformata integrale semplifichi i problemi che coinvolgono la funzione $F(t)$ in modo che la esecuzione della seguente procedura:

- trasformazione,
- risoluzione del problema trasformato,
- trasformazione inversa o antitrasformazione,

risulti più semplice della risoluzione del problema originario. Vedremo una applicazione di tale procedura alla risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali e a particolari equazioni integrali.
Nella (2) compare la funzione $K(s,t)$ che rappresenta il **kernel** della trasformazione.
In funzione della scelta del kernel si possono definire diverse trasformate della stessa funzione $F(t)$, ciascuna trasformata essendo caratterizzata da sue proprietà ed essendo utile in particolari circostanze.
Prima di dare due specializzazioni della funzione $K(s,t)$ che definiscono, rispettivamente, la **Trasformata di Laplace** e la **Trasformata di Fourier** (TdF) si fa notare che la (2) definisce, allo stesso modo della (1), una trasformazione lineare dal momento che si ha, usando la proprietà di linearità dell'operatore integrale:

$$T\{\alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t)\} = \alpha_1 T\{F_1(t)\} + \alpha_2 T\{F_2(t)\} \tag{3}$$

dove α_1 e α_2 sono termini costanti (non dipendenti da t) e $F_1(t)$ e $F_2(t)$ sono due funzioni che, prese singolarmente, ammettono la trasformazione mediante la T.
La **TdL** [unilatera] (vedi la sezione 3 e l'Appendice) prevede che la funzione kernel abbia la struttura seguente:

$$K(s,t) = \begin{cases} 0\,per\ t < 0 \\ e^{-st}\,per\ t \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

La si dice **unilatera** perché la relativa funzione kernel è non nulla solo per valori non negativi della variabile t.
D'altro lato la **TdF** (vedi la sezione 4) prevede che la funzione kernel abbia la struttura seguente (Verrazzani (1982)):

$$K(s,t) = e^{-i2\pi st} \tag{5}$$

per $t \in (-\infty, \infty)$. Di solito nella (5) al posto di s si usa la variabile f evocativa del concetto di frequenza.
La principale differenza fra la (4) e la (5) sta nel fatto che la prima è dnon nullaq solo per $t \geq 0$ mentre la seconda è definita per tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$. Tale differenza deriva dal fatto che la TdL unilatera viene usata per risolvere problemi differenziali di cui sono note le condizioni iniziali mentre la trasformata [integrale] di Fourier è usata per la descrizione di segnali che si suppone siano definibili su tutto $\mathbb{R}$.
Inoltre si ha che la (4) è definibile per $s \in \mathbb{R}$ mentre nella (5), tranne in casi particolari legati alla natura della funzione da trasformare, usando la relazione di Eulero $e^{it} = cost + isent$, si ha che vi compaiono sempre una parte reale ed una immaginaria.

3 La trasformata [unilatera] di Laplace e la sua antitrasformata

3.1 Introduzione

Il punto di partenza è rappresentato dalla definizione della TdL [unilatera][1].

[1]Nel seguito ometteremo la specificazione di unilatera per la Trasformata dl Laplace. Salvo avviso contrario useremo inoltre lettere maiuscole per indicare le funzioni della variabile tempo t e le corrispondenti lettere minuscole per indicare le corrispondenti funzioni trasformate ed espresse nella variabile s.

Definizione 3.1 (Definizione della TdL) *In base alla (2) e alla (4) la TdL della funzione $F(t)$ è definita nel modo seguente:*

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = f(s) \tag{6}$$

La (6) definisce un operatore che trasforma una funzione $F(t)$ della variabile tempo t in una funzione $f(s)$ della variabile s per cui ci si aspetta legittimamente l'esistenza di una relazione di **antitrasformazione** che definisca la corrispondenza inversa. Nel caso della TdL per la trasformazione inversa si usa in genere la definizione seguente (Spiegel (1976)):

Definizione 3.2 (Definizione di trasformata inversa della TdL)

$$\textit{se } L\{F(t)\} = f(s) \textit{ allora } L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \tag{7}$$

ovvero, fatta salva una precisazione doverosa (vedi oltre), se si ha una tabella delle corrispondenze fra le funzioni $F(t)$ e le TdL $f(s)$ leggendo tale tabella all'incontrario si ottengono le antitrasformate richieste.
Vedremo come l'uso di proprietà della TdL ed altre tecniche consentano di applicare tale metodo anche nei casi in cui non sia disponibile nella tabella suddetta la coppia $(F(t), f(s))$ desiderata.
Ovviamente la regola (7) richiede il possesso di tabelle in cui compaiono le trasformate (e quindi le antitrasformate) richieste dalle particolari applicazioni (vedi oltre).
Un altra possibilità è fare ricorso alla cosiddetta **formula di inversione**. che verrà presentata nella sezione 3.10.

3.2 Una prima precisazione

La variabile s che compare nella (6) è a rigore una variabile complessa e quindi caratterizzata da una parte reale e una parte immaginaria:

$$s = x + iy = |s|e^{i\theta} \tag{8}$$

È possibile dimostrare (Kuhfittig (1978)) che la $f(s)$ è una funzione analitica (ovvero differenziabile) e che l'integrazione che compare nella (6) può essere eseguita come se s fosse una variabile reale. Ciò significa che le condizioni di convergenza dell'integrale che compare nella (8) sono esprimibili in termini di s e non della sua parte reale $Re(s)$.
Questa apparente restrizione è motivata anche dal fatto che a noi non interessa esaminare la struttura e il comportamento della $f(s)$ al variare di s (nel qual caso dovremmo considerare $s \in \mathbb{C}$ in modo da poter determinare tutte

le n radici di un polinomio di grado n) quanto piuttosto usare la TdL per ottenere la soluzione di un problema differenziale trasformato da cui ricavare la soluzione nel dominio del tempo mediante antitrasformazione.

3.3 Alcuni esempi di TdL

Vediamo alcuni esempi di applicazione della definizione (6) (tratti da Kuhfittig (1978) e Rainville (1963)). Negli esempi si potrà fare uso di tecniche di integrazione classiche quali l'integrazione per parti e tecniche di cambio di variabile che saranno specificate di volta in volta. In alcuni si farà uso della proprietà di linearità della TdL (vedi la relazione (3)).
La formula dell'integrazione per parti è la seguente:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{9}$$

in cui u e v sono funzioni integrabili specificate di volta in volta.

Esempio 3.1 *Sia $F(t) = 1$ per $t > 0$, applicando la definizione (6), si ha*[2]*:*

$$\begin{aligned} L\{1\} &= \int_0^\infty 1e^{-st}dt = lim_{b\to\infty} \int_0^b 1e^{-st}dt \\ &= lim_{b\to\infty}(-\tfrac{1}{s}e^{-st})|_0^b) = lim_{b\to\infty}(-\tfrac{1}{s}e^{-sb} + \tfrac{1}{s}) \end{aligned} \tag{10}$$

Se $s > 0$ (oppure se $Re(s) > 0$ nel caso in cui $s \in \mathbb{C}$) si ha quindi:

$$L\{1\} = \frac{1}{s} \tag{11}$$

Esempio 3.2 *Sia $F(t) = e^{at}$ per $t > 0$ si ha:*

$$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \cdots = \tfrac{1}{s-a} \tag{12}$$

a patto che sia $s > a$ (oppure $Re(s) > a$ nel caso in cui $s \in \mathbb{C}$) in modo che il semiasse (o il semispazio) di convergenza dell'integrale e di esistenza della TdL sia alla destra di a.

Esempio 3.3 *Sia $F(t) = t^n$ per $t > 0$ e n intero non negativo. Dalla definizione si ha, integrando per parti con:*

$u = t^n$

[2]Negli esempi che seguono ometteremo molti dei dettagli del procedimento che sono comunque riconducibili a quanto illustrato in questo esempio. I punti in cui si omettono dettagli "calcolistici" sono indicati con ...

$dv = e^{-st}dt$

e applicando la regola di De L'Hospital:

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = -\frac{1}{s}t^n e^{-st}|_0^\infty) + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt \tag{13}$$

$$= \frac{n}{s}L\{t^{n-1}\}ex2$$

Iterando una volta si ha:

$$L\{t^{n-1}\} = \frac{n-1}{s}L\{t^{n-2}\} \tag{14}$$

mentre iterando n volte si ottiene una funzione di cui conosciamo la TdL:

$$L\{t^0\} = L\{1\} = \frac{1}{s} \tag{15}$$

Combinando i risultati ottenuti si ricava la seguente relazioni:

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{16}$$

se $s > 0$ *(oppure se* $Re(s) > 0$ *nel caso in cui* $s \in \mathbb{C}$*).*
Da tale relazione si ricava, ad esempio, che:

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2} \tag{17}$$

Esempio 3.4 *Sfruttando la linearità della TdL (vedi la (3)) si ha:*

$$L\{cosh(at)\} = L\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\} = \frac{1}{2}(L\{e^{at}\} + L\{e^{-at}\}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}) \tag{18}$$

ovvero:

$$L\{cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2} \tag{19}$$

se $s > |a|$.

Esempio 3.5 *Vediamo un altro modo per ricavare la TdL della* $F(t) = e^t$*.*
Al proposito si sfrutta l'espansione in serie di potenze:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \tag{20}$$

in modo da ottenere, di nuovo grazie alla linearità della TdL:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{s})^{n+1} = \frac{1}{s-1} \tag{21}$$

in accordo con la (12) se $a = 1$. La serie che compare nella (21) converge se $s > 1$. Per il calcolo della somma della serie si è fatto uso della relazione seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \tag{22}$$

se $|r| < 1$.
Si fa notare che se si ha:

$$L\{F(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{-n-1} \tag{23}$$

convergente per $s > b$ allora anche:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \tag{24}$$

converge in modo che:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \tag{25}$$

per $t > 0$ ne sia la trasformata inversa.

Esempio 3.6 *Vediamo come la continuità non sia una condizione necessaria per l'esistenza della TdL.*
Si definisca:

$$F(t) = \begin{cases} t \; per \; 0 < t < 4 \\ 5 \; per \; t > 4 \end{cases} \tag{26}$$

per cui la $F(t)$ presenta una discontinuità di prima specie in $t = 4$.
Dalla definizione di TdL si ha:

$$f(s) = \int_0^4 te^{-st}dt + \int_4^{\infty} 5e^{-st}dt \tag{27}$$

La (27) contiene due termini. Il primo è integrabile per parti con $u = t$ e $dv = e^{-st}dt$ mentre il secondo è direttamente integrabile. Con un po' di calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} & f(s) = (-\tfrac{t}{s}e^{-st} - \tfrac{1}{s^2}e^{-st})|_0^4 + (-\tfrac{5}{s}e^{-st})|_4^{\infty} \\ & = \tfrac{1}{s^2} + \tfrac{e^{-4s}}{s} - \tfrac{e^{-4s}}{s^2} \end{aligned} \tag{28}$$

Esempio 3.7 *Usando la relazione di Eulero:*

$$e^{iat} = cos(at) + isen(at) \tag{29}$$

con semplici calcoli (ovvero sommando alla (29) l'espressione di e^{-iat}*) si ricava:*

$$cos(at) = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} \tag{30}$$

in modo da ottenere, di nuovo grazie alla linearità della TdL*:*

$$L\{cos(at)\} = L\{\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\} = \frac{1}{2}(L\{e^{iat}\} + L\{e^{-iat}\}) \tag{31}$$

ovvero, sfruttando la (12), con semplici passaggi si ha:

$$L\{cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \tag{32}$$

per $s > 0$.
Sostituendo la (30) nella (29) si ricava:

$$sen(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} \tag{33}$$

da cui, di nuovo grazie alla linearità della TdL *e con semplici passaggi:*

$$L\{sen(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \tag{34}$$

per $s > 0$.

Esempio 3.8 *Funzione Gamma.*
Vediamo di generalizzare il caso visto nell'esempio 3.3 al caso della trasformata di $F(t) = t^\alpha$ *dove* α *è un numero qualunque maggiore di* -1.
Dalla definizione di TdL *si ha:*

$$L\{t^\alpha\} = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt \tag{35}$$

Con un cambio di variabile $x = st$ *si ottiene:*

$$L\{t^\alpha\} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx \tag{36}$$

con $\alpha > -1$ *e* $s > 0$. *Nella (36) l'integrale a secondo membro rappresenta la cosiddetta funzione Gamma di Eulero definita come:*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx \tag{37}$$

In questo modo si può scrivere:

$$L\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \tag{38}$$

con $\alpha > -1$ e $s > 0$.
Dal confronto fra la (16) e la (38) si ha che:

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{39}$$

in modo che la funzione Gamma può essere vista come una generalizzazione del fattoriale.
Se si pone $\alpha = -1/2$ nella (35) dal fatto noto che:

$$\frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 1 \tag{40}$$

si ha che l'integrale che compare nella (35) diviene:

$$L\{t^{-1/2}\} = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-st} dt \tag{41}$$

e, con il cambio di variabile $x = (st)^{1/2}$, assume il seguente valore:

$$\int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-st} dt = \frac{2}{s^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = (\frac{\pi}{s})^{1/2} \tag{42}$$

in modo che sia:

$$L\{t^{-1/2}\} = (\frac{\pi}{s})^{1/2} \tag{43}$$

3.4 Condizioni sufficienti per l'esistenza della TdL

Dall'esempio 3.6 e dalla (43) risulta evidente come la continuità non sia una condizione necessaria per l'esistenza della TdL.
Vediamo ora alcune condizioni sufficienti per l'esistenza della TdL. In quanto condizioni sufficienti se sono verificate ci permettono di affermare che una data funzione $F(t)$ ammette una TdL ma il fatto che non siano verificate da una data funzione non impedisce a tale funzione di ammettere una TdL.
Prima di introdurre tali condizioni sufficienti è necessario introdurre i concetti di:

- discontinuità finita;

- funzione generalmente continua;

- funzione di ordine esponenziale.

Definizione 3.3 (Definizione di discontinuità finita.) *Una funzione $F(t)$ è detta avere una **discontinuità finita** (o di prima specie) in $t = a$ se esistono finiti e distinti i limiti:*

destro $F(a+) = lim_{t \to a^+} F(t)$

sinistro $F(a-) = lim_{t \to a^-} F(t)$

Se i due limiti coincidono la $F(t)$ è continua in $t = a$, se tali limiti non esistono finiti la discontinuità è detta essere una singolarità essenziale.

Definizione 3.4 (Definizione di funzione generalmente continua.) *Una funzione $F(t)$ è detta essere **generalmente continua** o **continua a tratti** se ha un numero finito di discontinuità finite nell'intervallo $0 \leq t \leq b$ con $b > 0$.*

In generale nei punti di discontinuità la $F(t)$ assume valori che dipendono dall'applicazione e pertanto sono noti.

Esempio 3.9 *La funzione **gradino unitario** o **funzione di Heaviside**:*

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 \, t > t_0 \\ 0 \, t < t_0 \end{cases} \tag{44}$$

presenta una discontinuità di ampiezza 1 in $t = t_0$. La definizione di discontinuità finita in $t = t_0$ non dice nulla in merito al valore della funzione in tale punto ma solo che i limiti destro e sinistro esistono finiti per cui una definizione equivalente della (44) è la seguente:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 \, t \geq t_0 \\ 0 \, t < t_0 \end{cases} \tag{45}$$

Esempio 3.10 *Si noti che la funzione:*

$$F(t) = \frac{1}{t - 2} \tag{46}$$

non è continua a tratti dal momento che i limiti destro e sinistro non esistono finiti nel punto $t = 2$.

Se si osserva la definizione della TdL (vedi la (6)) si vede come il termine e^{-st} deve dominare la $F(t)$ perché l'integrale converga ovvero $F(t)$ non deve crescere più velocemente di una funzione di tipo esponenziale. Questa osservazione è alla base della definizione che segue.

Definizione 3.5 (Definizione di funzione di ordine esponenziale) *Una funzione $F(t)$ è detta essere di* ***ordine esponenziale*** $e^{\alpha t}$ *se esistono delle costanti reali N ed M tali che per ogni $t > N$ si ha:*

$$|e^{-\alpha t}F(t)| < M \tag{47}$$

ovvero:

$$|F(t)| < Me^{\alpha t} \tag{48}$$

Esempio 3.11 *La funzione e^{3t} è di tipo esponenziale mentre non lo è la e^{t^2}.*

Nel seguito diremo che (Rainville (1963)) una funzione che è:

- generalmente continua su un intervallo finito $0 \leq t \leq b$,
- di ordine esponenziale per $t \to \infty$,

è una **funzione di classe** A. Si può pertanto affermare che se una funzione è di classe A la sua TdL esiste. La condizione è sufficiente ma non necessaria e come controesempio si può usare la funzione $F(T) = t^{-1/2}$ la cui TdL è data dalla (43).
Si fa notare che la $F(t) = t^{-1/2}$ è integrabile so $[0, \infty)$ e tende a 0 per $t \to \infty$ per cui è di ordine esponenziale.
Al proposito si ha il seguente

Teorema 3.1 *Se la funzione $F(t)$ è esponenziale di ordine α per qualche α ed è continua a tratti per $t \geq 0$ la sua TdL esiste per $s > \alpha$.*
Dimostrazione
Si riprende la (6) e la si spezza in due parti:

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = \int_0^N e^{-st}F(t)dt + \int_N^\infty e^{-st}F(t)dt \tag{49}$$

Sull'intervallo $[0, N]$ la $F(t)$ ha un numero finito di discontinuità finite per cui il corrispondente integrale può essere scritto come una somma finita di integrali in ciascuno dei quali la funzione integranda è continua e pertanto integrabile per cui il primo integrale esiste per ogni N finito.
Per l'esistenza del secondo integrale si sfrutta il fatto che la $F(t)$ è di ordine esponenziale in modo da scrivere:

$$|\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt| \leq \int_0^\infty |e^{-st}F(t)|dt \leq \int_0^\infty e^{-st}Me^{\alpha t}dt = \frac{Me^{-(s-\alpha)N}}{s-\alpha} \tag{50}$$

per cui la TdL esiste per $s > \alpha$.
CVD

Osservazione 3.1 *Se $F(t)$ è di classe A (Rainville (1963)) allora $F(t)$ è limitata su un intervallo $0 \leq t \leq t_0$ per cui si ha:*

$$|F(t)| < M_1 \; 0 \leq t \leq t_0 \tag{51}$$

Se $F(t)$ è di ordine esponenziale si ha:

$$|F(t)| < M_2 e^{bt} \; t \geq t_0 \tag{52}$$

Se si sceglie $M = max\{M_1, M_2\}$ e $c = max\{b, 0\}$ si può scrivere:

$$|F(t)| < Me^{ct} \; t \geq t_0 \tag{53}$$

per cui per una qualunque funzione di classe A si ha:

$$|\int_0^\infty F(t)e^{-st}dt| < M \int_0^\infty e^{ct}e^{-st}dt = \frac{M}{s-c} \tag{54}$$

per $s > c$.

In questo modo si è dimostrato il seguente

Teorema 3.2 *Se $F(t)$ è di classe A e se la sua TdL $f(s)$ esiste allora si ha:*

$$lim_{s \to \infty} f(s) = 0 \tag{55}$$

ovvero $sf(s)$ è limitato per $s \to \infty$.

3.5 Le principali proprietà della TdL

In questa sezione vengono presentate le proprietà più significative della TdL, quasi tutte corredate da una breve dimostrazione. Molte delle proprietà sono utilizzabili per il calcolo della TdL di una funzione a partire da una TdL nota cui si applica una di tali proprietà. Ulteriori riferimenti possono essere trovati in uno dei testi seguenti: Spiegel (1976), Rainville (1963) Kuhfittig (1978).
In tutti i teoremi della presente sezione si assume che le funzioni presenti ammettano TdL.

Teorema 3.3 *Primo teorema della traslazione*
Se $f(s) = L\{F(t)\}$ esiste per $s > 0$ si ha che per ogni costante $a > 0$:

$$L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a) \tag{56}$$

per $s > a$.
Dimostrazione
Si sfrutta la definizione della TdL per scrivere:

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}[e^{at}F(t)]dt = L\{e^{at}F(t)\} \tag{57}$$

CVD

Il suddetto teorema ci consente di calcolare con facilità la TdL di funzioni $G(t)$ del tipo $e^{at}F(t)$, se si conosce la TdL $f(s)$ della $F(t)$ semplicemente sostituendo, nella espressione della $f(s)$, $s-a$ ad s. In base a questo ragionamento se $F(t) = 1$ con $f(s) = 1/s$ si ha la TdL della e^{at} vale $1/(s-a)$ senza nessun bisogno di eseguire il calcolo mediante la definizione della TdL.

Teorema 3.4 *Secondo teorema della traslazione*
Se $f(s) = L\{F(t)\}$ esiste per $s > 0$ e si definisce la funzione:

$$G(t) = F(t-a)u(t-a) \tag{58}$$

si ha:

$$g(s) = L\{G(t)\} = L\{F(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}f(s) \tag{59}$$

Dimostrazione
Si usa la definizione della TdL per scrivere:

$$e^{-as}f(s) = \int_0^\infty e^{-as}e^{-st}F(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(a+t)}F(t)dt \tag{60}$$

Se nella (60) si opera il cambio di variabile $a+t = x$ si ottiene facilmente:

$$\int_a^\infty e^{-ax}F(x-a)dx = \int_0^\infty e^{-sx}F(x-a)u(x-a)dx = L\{F(t-a)u(t-a)\} \tag{61}$$

CVD

Esempio 3.12 *Se $L\{t^3\} = 6/s^4$ la TdL della:*

$$G(t) = \begin{cases} (t-2)^3 \, per \; t > 2 \\ 0 \, per \; t < 2 \end{cases} \tag{62}$$

vale:

$$g(s) = \frac{6e^{-2s}}{s^4} \tag{63}$$

Osservazione 3.2 *Dualità*
Se la $F(t)$ ammette come TdL la $f(s)$ per il teorema 3.3 si ha:

$$L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a) \tag{64}$$

per $s > a$ mentre per il teorema 3.4 si ha:

$$L\{F(t-a)\} = e^{-as}f(s) \tag{65}$$

per cui la traslazione nel tempo t oppure rispetto alla variabile s hanno effetti duali.

Teorema 3.5 *Teorema del cambio di scala*
Se $f(s) = L\{F(t)\}$ esiste per $s > s_0$ si ha:

$$L\{F(at)\} = \frac{1}{a}f(\frac{s}{a}) \tag{66}$$

per $a > 0$ e $s > as_0$. Se $a > 1$ si ha una compressione sull'asse dei tempi che si traduce in una espansione sulla scala delle s con una corrispondente riduzione delle ampiezze di un fattore a. Si ha l'opposto se $0 < a < 1$.
Dimostrazione
Si sfrutta la definizione della TdL per scrivere:

$$f(\frac{s}{a}) = \int_0^\infty e^{-s(t/a)}F(t)dt \tag{67}$$

Ponendo $t = ax$ si ha:

$$f(\frac{s}{a}) = a\int_0^\infty e^{-sx}F(ax)dx = aL\{F(at)\} \tag{68}$$

CVD

Teorema 3.6 *Teorema delle derivate*
Se $f(s) = L\{F(t)\}$ esiste per $s > s_0$ si ha:

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) \tag{69}$$

se $F(t)$ è continua per $0 \leq t \leq N$ e di ordine esponenziale per $t > N$ mentre $F'(t)$ è generalmente continua per $0 \leq t \leq N$.
Dimostrazione
Si applica di nuovo la definizione della TdL per scrivere:

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty F'(t)e^{-st}dt \tag{70}$$

Integrando per parti si ha:

$$L\{F'(t)\} = F(t)e^{-st}|_0^\infty + s\int_0^\infty F(t)e^{-st}dt = sf(s) - F(0) \qquad (71)$$

CVD

Osservazione 3.3 *Teorema delle derivate, uso*
Il teorema 3.6 ci permette di trasformare una equazione differenziale del primo ordine alle derivate ordinarie e a coefficienti costanti in una equazione algebrica di primo grado nella variabile s in cui compare la $f(s)$ della funzione incognita $F(t)$. Risolvendo tale equazione rispetto a tale incognita e antitrasformando si ricava l'espressione cercata della $F(t)$.

Osservazione 3.4 *Teorema delle derivate, sue generalizzazioni*
Per prima cosa si generalizza il teorema 3.6 al caso in cui la $F(t)$ non è continua in $t = 0$ ma esiste il $lim_{t\to 0^+}F(t) = F(0+)$. In tal modo si ha:

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0+) \qquad (72)$$

Il passo successivo è considerare il caso in cui la $F(t)$ non sia continua nel punto $t = a$ in modo che sia:

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) - e^{-as}\{F(a+) - F(a-)\} \qquad (73)$$

dove $F(a+) - F(a-)$ rappresenta il salto della $F(t)$ nel punto di discontiunità $t = a$. Se si hanno più punti di discontinuità ogni punto aggiunge il suo contributo nella espressione della TdL.
Il passo successivo è generalizzare il teorema alle derivate di ordine superiore al primo.
Nel caso della ***derivata del secondo ordine*** *si ha:*

$$L\{F''(t)\} = s^2f(s) - sF(0) - F'(0) \qquad (74)$$

se $F(t)$ e $F'(t)$ sono continue per $0 \le t \le N$ e di ordine esponenziale per $t > N$ mentre $F''(t)$ è generalmente continua per $0 \le t \le N$. Se si hanno punti di discontinuità si introducono i relativi contributi come visto nel caso precedente.
Nel caso della ***derivata dell'ennesimo ordine*** *si ha:*

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^nf(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0) \quad (75)$$

se $F(t)$, $F'(t)$ ... $F^{n-1}(0)$ sono continue per $0 \le t \le N$ e di ordine esponenziale per $t > N$ mentre $F^{(n)}$ è generalmente continua per $0 \le t \le N$. Se si hanno punti di discontinuità si introducono i relativi contributi come visto nel caso precedente.

Le regole presentate nel teorema 3.6 e nelle osservazioni 3.3 e 3.4 trovano applicazione nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie (vedi la sezione 8).

Teorema 3.7 *Teorema degli integrali*
Se $f(s) = L\{F(t)\}$ esiste per $s > s_0$ si ha:

$$L\{\int_0^\infty F(u)du\} = \frac{f(s)}{s} \tag{76}$$

Dimostrazione
Si definisce la funzione:

$$G(t) = \int_0^\infty F(u)du \tag{77}$$

in modo che sia $G'(t) = F(t)$ e $G(0) = 0$.
Se si applica la TdL alla $G'(t) = F(t)$ si ha:

$$f(s) = L\{G'(t)\} = sL\{G(t)\} - G(0) = sL\{G(t)\} \tag{78}$$

per cui:

$$L\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s} \tag{79}$$

CVD

Teorema 3.8 *Teorema del prodotto per t^n*
Se $f(s) =$ esiste per $s > s_0$ si ha:

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) \tag{80}$$

Dimostrazione
Si vede il caso per $n = 1$. Per $n > 1$ si itera il procedimento o si procede per induzione (Spiegel (1976)).
Dalla definizione di TdL si ha:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt \tag{81}$$

per cui si ha:

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt \tag{82}$$

Usando la regola di Leibniz in modo da scambiare fra di loro le operazioni di integrazione e derivazione si ha:

$$\frac{df(s)}{ds} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t) dt \tag{83}$$

ovvero:

$$\frac{df(s)}{ds} = -\int_0^\infty e^{-st}(tF(t))dt = -L\{tF(t)\} \tag{84}$$

e infine:

$$L\{tF(t)\} = -\frac{df(s)}{ds} \tag{85}$$

CVD

Osservazione 3.5 *Il teorema 3.8 consente di trasformare un prodotto del tipo $t^n F(t)$ nella derivazione ripetuta rispetto a s della TdL $f(s)$ e lo si usa nella risoluzione di equazioni differenziali ordinarie i cui coefficienti hanno tale forma.*

Teorema 3.9 *Teorema della divisione per t*
Se $f(s) = L\{F(t)\}$ esiste per $s > s_0$ si ha:

$$L\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_s^\infty f(u)du \tag{86}$$

a patto che esista:

$$lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t} \tag{87}$$

Dimostrazione
Si definisce la funzione:

$$G(t) = \frac{F(t)}{t} \tag{88}$$

in modo che sia:

$$F(t) = tG(t) \tag{89}$$

Applicando la TdL ed il teorema 3.8 si ha:

$$f(s) = L\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}L\{G(t)\} = -\frac{d}{ds}g(s) \tag{90}$$

Integrando si ha:

$$g(s) = -\int_\infty^s f(u)du = \int_s^\infty f(u)du \tag{91}$$

CVD

Teorema 3.10 *Trasformata delle funzioni periodiche*
Se $F(t)$ è una funzione periodica di periodo T in modo che sia $F(t+T) = F(t)$ si ha:

$$L\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t)dt}{1 - e^{-sT}} \tag{92}$$

Dimostrazione
Si usa la definizione della TdL e il fatto di lavorare con una funzione periodica per scrivere:

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} F(t)dt \tag{93}$$

Con un cambio di variabile $u = t - nT$ si ha:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-s(u+nT)} F(u + nT)du \tag{94}$$

Sfruttando la periodicità della $F(t)$ si ha:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T e^{-su} F(u)du = \frac{\int_0^T e^{-su} F(u)du}{1 - e^{-sT}} \tag{95}$$

grazie al fatto che si ha una serie geometrica la cui somma ha il valore seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \tag{96}$$

CVD

Osservazione 3.6 *Dato un segnale continuo $s(t)$ con, in generale, $t \in (-\infty, \infty)$ si definisce* ***energia del segnale*** *la quantità:*

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \tag{97}$$

mentre si definisce ***potenza [media] del segnale*** *la quantità:*

$$P_s = lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \tag{98}$$

e si dice che il segnale ha ***energia finita*** *se E_s è finito e non nullo mentre ha* ***potenza finita*** *se il limite della (97) esiste finito e non nullo.*
I ***segnali periodici*** *hanno energia infinita e potenza finita. Da questo fatto*

discende che tali segnali ammettono tranquillamente la Trasformata di Laplace mentre non ammettono la Trasformata di Fourier a meno che non si introduca una generalizzazione rappresentata dalla funzione impulsiva di Diraq.
Si fa notare, infine, che:

- *se un segnale ha energia finita la sua potenza è nulla;*

- *se un segnale ha potenza finita la sua energia è infinita.*

Si hanno anche segnali ad energia e potenza infinita. Un esempio è dato dal segnale $e^{\alpha t}$ *per* $\alpha > 0$.

Osservazione 3.7 *Dal teorema 3.10 si ha che:*

- *la TdL di una funzione periodica viene calcolata sulla base dell'andamento della funzione in un periodo;*

- *se il periodo* T *tende a* ∞ *la definizione suddetta si riduce a quella classica come deve essere dal momento che la funzione tende ad una funzione non periodica.*

Teorema 3.11 *Comportamento per* $s \to \infty$
Se $L\{F(t)\} = f(s)$ *si ha:*

$$lim_{s\to\infty} f(s) = 0 \tag{99}$$

Questa proprietà discende direttamente dalla definizione e dal fatto che $F(t)$ *sia di ordine esponenziale.*

Le seguenti due proprietà sono presentate senza dimostrazione.

Teorema 3.12 *Teorema del valore iniziale*
Se i limiti indicati esistono si ha:

$$lim_{t\to 0} F(t) = lim_{s\to\infty} s f(s) \tag{100}$$

Teorema 3.13 *Teorema del valore finale*
Se i limiti indicati esistono si ha:

$$lim_{t\to\infty} F(t) = lim_{s\to 0} s f(s) \tag{101}$$

3.6 Due funzioni particolari

In questa sezione si presentano due funzioni particolari che giocano un ruolo importante nella TdL e nella TdF:

(1) la funzione gradino unitario o di Heaviside;

(2) la funzione impulsiva unitaria o **delta di Diraq**.

La prima viene usata insieme al teorema 3.4 per determinare in modo semplice la TdL di funzioni continue a tratti scrivendole come somme di funzioni opportune moltiplicate per le opportune copie traslate della funzione gradino unitario (vedi la (104).
La seconda viene usata per ricavare versioni compatte delle TdF generalizzate di segnali ad energia infinita quali le funzioni trigonometriche mediante l'uso della formula di Eulero.
La **funzione gradino unitario** è definita come segue:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 \, t < a \\ 1 \, t > a \end{cases} \tag{102}$$

e la sua TdL vale:

$$\frac{e^{-as}}{s} \tag{103}$$

Esempio 3.13 *Supponiamo di avere la funzione $F(t) = t^2 - 2t - 4$ e si voglia:*

$$L\{u(t-2)F(t)\} \tag{104}$$

Per fare ciò facendo uso del teorema 3.4 si deve scrivere la $F(t)$ in funzione di $t-2$.
Si può pertanto procedere nel modo seguente. Per prima cosa si imposta l'eguaglianza seguente:

$$t^2 - 2t - 4 = A(t-2)^2 * B(t-2) + C \tag{105}$$

poi si sviluppano i calcoli, si raggruppano i fattori comuni e si confrontano i coefficienti dei termini di pari grado in modo da ottenere $A = 1$, $B2$ e $C = 4$ in modo che la $F(t) = t^2 - 2t - 4$ diventi:

$$F(t) = (t-2)^2 * 2(t-2) + 4 \tag{106}$$

per cui la TdL cercata è:

$$L\{u(t-2)F(t)\} = L\{u(t-2)(t-2)^2 * 2u(t-2)(t-2) + 4u(t-2)\} \tag{107}$$

ovvero:

$$L\{u(t-2)F(t)\} = \frac{2e^{-2s}}{s^3} + \frac{2e^{-2s}}{s^2} + \frac{4e^{-2s}}{s} \tag{108}$$

Per la definizione della **funzione impulsiva unitaria** si deve procedere per gradi.
Si definisce dapprima la funzione:

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\, 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0\, t > \varepsilon \end{cases} \tag{109}$$

È evidente che se $\varepsilon \rightarrow 0$ l'altezza della funzione $F_\varepsilon(t)$ tende a ∞ la sua ampiezza tende a 0 ma l'area sottesa dall "curva" mantiene un valore unitario.
È possibile immaginare una funzione $\delta(t) = lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(t)$. Tale funzione è la **funzione impulsiva unitaria** definibile tramite le sue proprietà:

$\int_0^\infty \delta(t)dt = 1$

$\int_0^\infty \delta(t)G(t)dt = G(0)$ per $G(t)$ funzione continua qualsiasi;

$\int_0^\infty \delta(t-a)G(t)dt = G(a)$ per $G(t)$ funzione continua qualsiasi;

È immediato verificare che la TdL della $\delta(t)$ vale 1 mentre quella della $\delta(t-a)$ vale e^{-sa}.

3.7 Metodi per il calcolo della TdL

Per la determinazione della TdL è possibile usare uno dei metodi seguenti (Spiegel (1976)):

(1) metodo diretto che fa uso della definizione (6) ed è utilizzabile solo nel caso di funzioni semplici ovvero per le quali sia facile il calcolo dell'integrale che compare nella definizione della TdL;

(2) metodo dello sviluppo in serie che sfrutta il fatto che una funzione $F(t)$ ammette uno sviluppo in serie di potenze;

(3) metodi che sfruttano le proprietà della TdL (vedi la sezione 3.5).

(4) metodo che fa uso delle tabelle.

Il metodo **(1)** rappresenta il metodo base ed è direttamente utilizzabile qualora l'espressione della $F(t)$ non sia troppo complessa.
Il metodo **(2)** sfrutta il fatto che la funzione $F(t)$ ammette uno sviluppo in serie di potenze del tipo:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{110}$$

e che, grazie alla linearità della TdL, si ha:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}} \tag{111}$$

ammesso che la serie che compare nella (111) converga per ogni $s > \gamma$.
Il metodo **(3)** prevede che si applichino i teoremi visti nella sezione 3.5 in modo da ricavare la TdL di una funzione complessa in funzione delle TdL delle funzioni che la compongono.
Il metodo **(4)** stabilisce una corrispondenza fra le trasformate e le associate antitrasformate. Data una tabella in cui ogni riga contiene la coppia $(F(t), f(s))$ se la si consulta:

- da sinistra a destra si ottiene la TdL di una funzione nota $F(t)$,
- da destra a sinistra si ottiene la antitrasformata di una TdL $f(s)$ nota.

3.8 La antitrasformata della TdL

Se $L\{F(t)\} = f(s)$ si dice che la $F(t)$ è la trasformata inversa o l'antitrasformata della $f(s)$ e si scrive:

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} \tag{112}$$

dove L^{-1} rappresenta l'operatore di trasformazione inversa o di antitrasformazione di Laplace.
Dato che la TdL di una funzione nulla[3] $N(t)$ è zero se $L\{F(t)\} = f(s)$ anche $L\{F(t) + N(t)\} = f(s)$ per cui l'antitrasformata di Laplace non è unica. Si ha il seguente

Teorema 3.14 *Teorema di Lerch, (Spiegel (1976))*
Nel caso di funzioni $F(t)$ generalmente continue su ogni intervallo limitato $0 \leq t \leq N$ e di ordine esponenziale per $t > N$ l'antitrasformata di Laplace ($ATdL$) $L^{-1}\{f(s)\}$ è unica.

In questo modo si definisce l'antitrasformata come l'operazione inversa della trasformata ovvero come una operazione priva di una vera autonomia. Nella sezione 3.11 daremo alcuni cenni alla formula di inversione complessa basata sul fatto di considerare il parametro s come una variabile complessa. In quella sezione vedremo il metodo dei residui per il calcolo della antitrasformata di una funzione $f(s)$ nella variabile s.

[3]Una funzione nulla $N(t)$ è una funzione di t tale che per tutti i valori $t > 0$ si ha $\int_0^t N(u)du = 0$. In genere una funzione che assume valore 0 tranne che su un insieme numerabile di punti in cui assume valori non nulli è una funzione nulla.

3.9 Le principali proprietà della antitrasformata di Laplace

In questa sezione vedremo le principali proprietà della $ATdL$. Lo spirito è lo stesso di quello della sezione 3.5. Una proprietà ovvia è quella della linearità che deriva dalla linearità della TdL e dalla regola (112) che ci siamo dati per il calcolo della $ATdL$. Da tale fatto segue che molte delle dimostrazioni si baseranno su proprieà note della TdL, sulla applicazione dell'operatore antitrasformazione L^{-1} e sul fatto che $L^{-1}L$ e LL^{-1} sono l'operatore identico che mappa una funzione su se stessa.

Teorema 3.15 *Primo teorema della traslazione*
Se $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ allora $L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$.
Dimostrazione
Dal fatto che $L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$ si ha, applicando ad entrambi i membri l'operatore L^{-1}:

$$L^{-1}f(s-a) = e^{at}F(t) \tag{113}$$

CVD

Teorema 3.16 *Secondo teorema della traslazione*
Se $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ allora si ha:

$$L^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} F(t-a)\, t > a \\ 0\, t < a \end{cases} \tag{114}$$

Dimostrazione
Si definisce la funzione $G(t) = F(t-a)u(t-a)$ in modo che sia:

$$L\{G(t)\} = e^{-as}f(s) \tag{115}$$

da cui, applicando ad entrambi i membri l'operatore L^{-1}, si ha:

$$L^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t) = F(t-a)u(t-a) \tag{116}$$

CVD

Teorema 3.17 *Teorema del cambio di scala*
Se $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ allora si ha:

$$L^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(\frac{t}{k}) \tag{117}$$

Dimostrazione
È noto che si ha:

$$L\{F(at)\} = \frac{1}{a}f(\frac{s}{a}) \tag{118}$$

Con la sostituzione di $1/k$ al posto di a si ottiene:

$$L\{F(\frac{t}{k})\} = kf(ks) \tag{119}$$

da cui applicando l'operatore L^{-1} e dividendo membro a membro per k si ha:

$$L^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(\frac{t}{k}) \tag{120}$$

CVD

Teorema 3.18 *Antitrasformata delle derivate*
Se $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ allora si ha:

$$L^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = L^{-1}\{\frac{d^n}{ds^n}f(s)\} = (-1)^n t^n F(t) \tag{121}$$

Dimostrazione
Dato che si ha:

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}f(s) \tag{122}$$

si ha, applicando membro a membro l'operatore L^{-1}:

$$L^{-1}\{\frac{d^n}{ds^n}f(s)\} = (-1)^n t^n F(t) \tag{123}$$

CVD

Teorema 3.19 *Antitrasformata di integrali*
Se $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ allora si ha:

$$L^{-1}\{\int_s^\infty f(u)du\} = \frac{F(t)}{t} \tag{124}$$

Dimostrazione
Si sa che:

$$L\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_s^\infty f(u)du \tag{125}$$

dove $f(s) = L\{F(t)\}$. Applicando membro a membro l'operatore L^{-1} si ha:

$$L^{-1}\{\int_s^\infty f(u)du\} = \frac{F(t)}{t} \tag{126}$$

CVD

Teorema 3.20 *Prodotto per s^n*
Se $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ e $F(0) = 0$ allora si ha $L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t)$. Se $F(0) \neq 0$ allora si ha $L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t) + F(0)\delta(t)$.
La moltiplicazione per s ha come conseguenza la derivazione della $F(t)$.
Dimostrazione
Si parte dal caso $n = 1$ e $F(0) = 0$.
Dal momento che si ha $L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) = sL\{F(t)\} = sf(s)$ ovvero $L\{F'(t)\} = sf(s)$ applicando membro a membro l'operatore L^{-1} si ottiene la $L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t)$.
Si vede ora il caso $n = 1$ e $F(0) \neq 0$.
In questo caso si sfrutta il fatto che:

$$F(0) = \int_0^\infty F(0)\delta(t)e^{-st}dt \tag{127}$$

per scrivere la $L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) = sf(s) - F(0)$ come:

$$sf(s) = L\{F'(t)\} + L\{F(0)\delta(t)\} \tag{128}$$

per cui, applicando membro a membro l'operatore L^{-1}, si ha:

$$L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t) + F(0)\delta(t) \tag{129}$$

I casi per $n > 1$ li si vede iterando il procedimento visto. CVD

Teorema 3.21 *Divisione per s*
Se $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ allora si ha:

$$L^{-1}\{\frac{f(s)}{s}\} = \int_0^t F(u)du \tag{130}$$

Dimostrazione
Si definisce la funzione:

$$G(t) = \int_0^t F(u)du \tag{131}$$

in modo che sia $G'(t) = F(t)$ e $G(0) = 0$. In questo modo si ha:

$$f(s) = L\{G'(t)\} = sL\{G(t)\} - G(0) = sL\{G(t)\} \tag{132}$$

ovvero:

$$L\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s} \tag{133}$$

e quindi:

$$L^{-1}(\frac{f(s)}{s}) = G(t) = \int_0^t F(u)du \tag{134}$$

CVD

Teorema 3.22 *Teorema della convoluzione*
Se $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ *e* $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ *allora si ha:*

$$L^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F \oplus G \tag{135}$$

dove $F \oplus G$ *è il prodotto di convoluzione delle due funzioni* F *e* G*.*
Dimostrazione
Se $f(s) = L\{F(t)\}$ *e* $g(s) = L\{G(t)\}$ *si ha, usando la definizione di* TdL*:*

$$f(s)g(s) = f(s)\int_0^\infty G(u)e^{-su}du = \int_0^\infty G(u)f(s)e^{-su}du \tag{136}$$

ovvero per il teorema 3.4:

$$f(s)g(s) = \int_0^\infty G(u)[\int_0^\infty u(t-u)F(t-u)e^{-st}dt]du \tag{137}$$

Se la $F(t)$ *e la* $G(t)$ *sono continue a tratti e di ordine esponenziale si può scambiare l'ordine di integrazione in modo da scrivere:*

$$f(s)g(s) = \int_0^\infty [\int_0^\infty u(t-u)F(t-u)G(u)du]e^{-st}dt \tag{138}$$

ovvero:

$$f(s)g(s) = L\{F(t) \oplus G(t)\} \tag{139}$$

e applicando membro a membro l'operatore L^{-1} *si ha:*

$$L^{-1}\{f(s)g(s)\} = F(t) \oplus G(t) \tag{140}$$

CVD

3.10 Metodi per il calcolo della antitrasformata della TdL

Per il calcolo della antitrasformata (Spiegel (1976)) è possibile usare uno dei seguenti metodi:

(1) metodo delle frazioni parziali;

(2) metodo dello sviluppo in serie;

(3) metodi basati sulle proprietà dell'antitrasformata (vedi la sezione 3.9);

(4) metodo che usa te tabelle;

(5) metodo che sfrutta la formula di inversione complessa.

Il metodo **(1)** si applica a funzioni razionali della variabile s della forma:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \tag{141}$$

in cui sia $P(s)$ sia $Q(s)$ sono polinomi in s e il grado di $P(s)$ è minore del grado di $Q(s)$. In base a tale metodo una funzione razionale espressa come la (141) viene scritta come una somma di funzioni razionali dette frazioni parziali. L'antitrasformata della funzione data la si ottiene sommando le antitrasformate delle singole frazioni parziali.
Le regole su cui si basa il metodo delle frazioni parziali sono le seguenti (Kuhfittig (1978)):

r_1 ad ogni termine di molteplicità 1 del tipo $as + b$ a denominatore corrisponde una frazione parziale del tipo $A/as + b$ con A costante da determinare (vedi oltre);

r_2 ad ogni termine lineare che si ripete a denominatore del tipo $(as + b)^n$ corrisponde una somma di frazioni parziali del tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(as + b)^i} \tag{142}$$

in cui gli A_i sono costanti da determinare (vedi oltre);

r_3 ad ogni termine di molteplicità 1 del tipo $as^2 + bs + c$ a denominatore corrisponde una frazione parziale del tipo:

$$\frac{As + B}{as^2 + bs + c} \tag{143}$$

con A e B costanti da determinare (vedi oltre);

r_4 ad ogni termine del tipo $(as^2 + bs + c)^n$ a denominatore corrisponde una somma di frazioni parziali del tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i s + B_i}{(as^2 + bs + c)^i} \tag{144}$$

con A_i e B_i costanti da determinare (vedi oltre);

Applicando tali regole si introducono coefficienti incogniti che devono essere determinati perché sia possibile ricavare la antitrasformata di ogni frazione parziale fp_i.
Una volta scritta l'uguaglianza:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_i fp_i \tag{145}$$

si devono ricavare i coefficienti incogniti che compaiono al secondo membro della (145). Tale determinazione la si può fare in uno dei modi seguenti:

- riconducendo le frazioni parziali a denominatore comune, eseguendo i prodotti e raggruppando i termini di pari grado in s in modo da imporre eguaglianze fra i coefficienti delle potenze di pari grado nei membri sinistro e destro della (145).
- riconducendo le frazioni parziali a denominatore comune, eseguendo i prodotti e raggruppando i termini di pari grado in s in modo da confrontare i due numeratori della (145) per particolari valori della variabile s,
- procedendo come al punto precedente ma calcolando le derivate successive dei numeratori per valori particolari della variabile s.

Esempio 3.14 *Si applica il metodo delle frazioni parziali per ricavare la ATdL della funzione:*

$$f(s) = \frac{1}{s(s+1)} \tag{146}$$

Allo scopo si scrive:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \tag{147}$$

Applicando uno dei metodi suddetti si ricava facilmente che deve essere:

1. $A = 1$
2. $B = -1$

in modo che sia:

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \tag{148}$$

da cui è immediato ricavare:

$$F(t) = 1 - e^{-t} \tag{149}$$

Il metodo **(2)** sfrutta lo sviluppo in serie di potenze negative della $f(s)$ in modo che si scriva:

$$f(s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}} \tag{150}$$

da cui si può ricavare una espressione per la $F(t)$ antitrasformando termine a termine il secondo membro della (150).
I metodi di cui al punto **(3)** prevedono che si faccia uso delle proprietà viste nella sezione 3.9 per ricavare la $F(t)$ data una funzione $f(s)$ nella variabile s.
Il metodo **(4)** fa uso alle tabelle delle corrispondenze fra le $F(t)$ e le $f(s)$ per ricavare da una data $f(s)$ la corrispondente $ATdL$ con l'ausilio delle proprietà di questa (vedi la sezione 3.9).
Al metodo **(5)** è dedicata la sezione 3.11.

3.11 La formula di inversione complessa (cenni)

Nel calcolo della TdL abbiamo assunto che il parametro s che compare nella definizione (6) sia una variabile reale ovvero assuma valori in $\mathbb{R}$. Sulla base di tale assunto abbiamo anche fornito una regola di antitrasformazione (la (6)). A questo punto si vuole introdurre una regola effettiva ed autonoma per il calcolo della antitrasformata. Per fare ciò si assume che s sia una variabile complessa ovvero sia $s = x + iy$. In base a tale assunto si ha:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt = \int_0^\infty e^{-xt} cosytF(t)dt - i \int_0^\infty e^{-xt} senytF(t)dt \tag{151}$$

ovvero:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-xt} cosytF(t)dt - i \int_0^\infty e^{-xt} senytF(t)dt = u(x, y) - iv(x, y) \tag{152}$$

in cui si è usata la formula di Eulero che permette di scrivere:

$$e^{-st} = e^{-xt} e^{-iyt} = e^{-xt}(cosyt - isenyt) \tag{153}$$

Poiché si ha:

$$|e^{-xt} cosytF(t)| \leq |e^{-st} F(t)|$$

$$|e^{-xt} senytF(t)| \leq |e^{-st} F(t)|$$

l'integrale (151) esiste per $x > \alpha$ se $F(t)$ è di ordine esponenziale $e^{\alpha t}$ e continua a tratti.
Si può verificare (Kuhfittig (1978)) che le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte ovvero che si ha:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

2. $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

in modo che la $f(s)$ sia analitica in una qualche regione D.
Nel calcolo della TdL di una $F(t)$ ovvero:

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \tag{154}$$

con $s = x \in \mathbb{R}$ si ottiene una funzione reale $g(x) = f(s)$ analitica alla destra di α sull'asse reale. Se ora si ha $s = x + iy \in \mathbb{C}$ e $g(s)$ è analitica nel semipiano $x > \alpha$ si ha $f(s) = g(s)$ per ogni s in tale semipiano perché due funzioni diverse non possono essere uguali su una retta. Da ciò discende che l'integrazione per il calcolo della TdL può essere fatta considerando $s \in \mathbb{R}$ e in più che tutti i teoremi ricavati sotto tale ipotesi continuano a valere se si assume $s \in \mathbb{C}$.
Vediamo ora:

(1) la formula di inversione,

(2) il teorema dei residui e il suo utilizzo per il calcolo della $ATdL$.

Se:

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \tag{155}$$

per $Re(s) > \alpha$ si ha:

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}f(s)ds \tag{156}$$

per $t > 0$ e $F(t) = 0$ per $t < 0$.
Se la (155) definisce, come è noto, la TdL la (156) rappresenta la formula di inversione complessa per il calcolo della $ATdL$.
Si fa notare che i limiti dell'integrale equivalgono a:

$$lim_{b\to\infty} c \pm ib \tag{157}$$

in modo che il cammino di integrazione sia una retta parallela all'asse immaginario. Si noti che tale retta giace alla destra di tutte le singolarità della $f(s)$ e che tale retta esiste di sicuro dato che $f(s)$ è analitica nel semipiano $x = Re(s) > \alpha$.
Come vedremo meglio in seguito, per il calcolo della $F(t)$ dalla $f(s)$ (Kuhfittig (1978)) si usa il seguente

Teorema 3.23 *La $F(t)$ è uguale alla somma dei residui di $e^{st}f(s)$ nei poli di $f(s)$.*

Perché sia possibile capire ed applicare tale teorema è necessario introdurre il concetto di **residuo** e le formule per il suo calcolo esplicito.

Osservazione 3.8 *Una funzione $f(s)$ nella variabile complessa s si dice* ***analitica*** *in una regione D se è differenziabile in D ovvero se la sua derivata esiste come limite del rapporto incrementale ed è indipendente dal modo in cui $\Delta s \to 0$.*

Se $f(s)$ è analitica in una regione D la si può espandere in serie di Taylor attorno ad ogni punto $a \in D$. Se $f(s)$ non è analitica in un punto $a \in D$ la si può espandere in serie di Laurent in quel punto.
Supponiamo di avere:

$$f(s) = \frac{g(s)}{s-a} \tag{158}$$

con $a \in D$ e $g(s)$ analitica in D. Il punto $s = a$ si dice essere una singolarità isolata ovvero un **polo semplice**.
Se invece si ha:

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s-a)^n} \tag{159}$$

in $s = a$ si ha un **polo di ordine n**.
Supponiamo di avere una $f(s)$ con un polo di ordine n in $s = a$ in modo che sia:

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s-a)^n} \tag{160}$$

con $g(s)$ analitica in D e $a \in D$. Si può scrivere:

$$g(s) = (s-a)^n f(s) \tag{161}$$

analitica in D e in un intorno di a per cui la si può espandere in serie di Taylor in tale punto in modo da scrivere:

$$g(s) = a_{-n} + a_{-n+1}(s-a) + a_{-n+2}(s-a)^2 + \cdots + a_0(s-a)^n + a_1(s-a)^{n+1} + a_2(s-a)^{n+2} + \ldots \tag{162}$$

ovvero:

$$f(s) = \frac{a_{-n}}{(s-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(s-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(s-a) + a_2(s-a)^2 + \ldots \tag{163}$$

La serie (163) si dice serie di Laurent della $f(s)$. L'ordine del polo della $f(s)$ coincide con l'indice $-n$ del coefficiente a_{-n}.

Se la funzione è analitica in D oppure presenta in a una singolarità removibile non si ha alcun termine di indice negativo nella (163) in modo che la serie di Laurent coincide con la serie di Taylor, se si hanno infiniti termini di indice negativo si parla di singolarità essenziale come nel caso della:

$$sen\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{3!s^3} + \frac{1}{5!s^5} \tag{164}$$

mentre nel caso seguente:

$$\frac{e^s}{s} = \frac{1}{s} + 1 + \frac{s}{2!} + \dots \tag{165}$$

si ha un polo si ordine 1 o semplice in $s = 0$. Se si ha:

$$f(s) = \frac{1}{s(s-i)^2(s+3)^4} \tag{166}$$

si hanno:

un polo semplice in $s = 0$,

un polo di ordine 2 in $s = i$,

un polo di ordine 4 in $s = -3$.

come è possibile verificare usando lo sviluppo in serie di Laurent in ciascuno di tali punti.
Per il calcolo effettivo della (156) si usa il seguente risultato (Kuhfittig (1978)): se la funzione $h(s)$ è analitica nell'area racchiusa da una curva chiusa di lunghezza finita C e sulla curva stessa tranne che per un numero finito di poli contenuti nella regione racchiusa da C si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C h(s)ds = S \tag{167}$$

dove S rappresenta la somma dei residui nei diversi poli. Se come curva C si considera la curva da $c - i\infty$ a $c + \infty$ (che individua due semispazi in $\mathbb{C}$) e come funzione $h(s)$ si considera:

$$h(s) = e^{st}f(s) \tag{168}$$

il primo membro della (167) rappresenta la formula di inversione complessa. Per il calcolo della $ATdL$ è necessario quindi il calcolo di S.
La variabile S è definita come la somma dei residui di tutti i poli della $f(s)$. Se si ha un polo semplice in $s = a$ il relativo residuo è definito come:

$$a_{-1} = lim_{s\to a}(s-a)e^{st}f(s) \tag{169}$$

mentre, per il caso generale di un polo di ordine n, si ha:

$$a_{-1} = lim_{s \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (s-a)^n e^{st} f(s) \tag{170}$$

Vediamo due esempi di uso della procedura.

Esempio 3.15 *Si voglia:*

$$L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} \tag{171}$$

Essendo il polo in $s = a$ semplice la antitrasformata viene calcolata usando la (169) ovvero come:

$$a_{-1} = lim_{s \to a}(s-a)e^{st} f(s) = lim_{s \to a}(s-a)e^{st} \frac{1}{s-a} = e^{at} \tag{172}$$

In questo caso la $f(s)$ ha un solo polo per cui S coincide con il solo residuo presente.

Esempio 3.16 *Si voglia:*

$$L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\{\frac{1}{s(s-1)^2}\} \tag{173}$$

La $f(s)$ ammette un polo semplice in $s = 0$ e un polo di ordine 2 in $s = 1$ in modo che S sia data dalla somma dei due residui, uno per ciascun polo.
Per il polo in $s = 0$ si applica la (169) in modo che sia:

$$lim_{s \to 0} s \frac{1}{s(s-1)^2} = 1 \tag{174}$$

Per il polo in $s = 1$ si applica la (170) in modo che sia:

$$\frac{1}{1!} lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} (s-1)^2 e^{st} \frac{1}{s(s-1)^2} \tag{175}$$

ovvero:

$$lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} e^{st} \frac{1}{s} = lim_{s \to 1} \frac{te^{st} - e^{st}}{s^2} = te^t - e^t \tag{176}$$

in modo che sia:

$$L^{-1}\{f(s)\} = 1 - e^t + te^t \tag{177}$$

ovvero la antitrasformata cercata è data dalla somma S dei residui per i singoli poli della $f(s)$.

4 La Trasformata [integrale] di Fourier e la sua antitrasformata

Allo scopo di eseguire un confronto con la TdL si fornisce la definizione della **Trasformata di Fourier Continua** (nel seguito TdF).
Data una funzione $F(t)$ che soddisfa le seguenti condizioni sufficienti (Verrazzani (1982)):

(1) (condizioni di Dirichlet) su ogni intervallo finito di $\mathbb{R}$ è continua (salvo che in un numero finito di punti nei quali ha discontinuità di prima specie) e se ha derivata limitata (salvo che in un numero finito di punti nei quali esistono limitate la derivata sinistra e destra);

(2) se esiste finito l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|dt \tag{178}$$

si definisce la TdF come (Verrazzani (1982)):

$$s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} F(t)dt \tag{179}$$

e la antitrasformata ($ATdF$) come:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} s(f)df \tag{180}$$

In alternativa alle condizioni (1) e (2) si possono considerare le seguenti (teorema di Plancherel (Verrazzani (1982))):

(1′) se $F(t)$ è quadrato integrabile (ha energia finita) ovvero se si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt < \infty \tag{181}$$

allora

(2′) la TdF $s(f)$ esiste tutti i valori di f, eccetto al più un insieme di misura nulla, ed è quadrato integrabile ovvero si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(f)|^2 df < \infty \tag{182}$$

in modo che l'antitrasformata converga alla funzione di partenza con scarto quadratico medio nullo.

In questo modo si è definita una coppia simmetrica trasformata÷antitrasformata.
Se si esprimono la (179) e la (180) usando la relazione $\omega = 2\pi f$ si ottiene la cosiddetta coppia asimmetrica ovvero si ha:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) dt \tag{183}$$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\omega) d\omega \tag{184}$$

in cui si ha $f(\omega)$ invece di $s(f)$.
Nel seguito per eseguire il confronto con la TdL useremo la coppia asimmetrica dal momento che la TdL che abbiamo introdotto ha una struttura asimmetrica fra TdL e $ATdL$.
La TdF ammette la seguente interpretazione fisica (Verrazzani (1982)): una funzione $F(t)$ non periodica e definita su $(-\infty, \infty)$ viene rappresentata come somma di infinite funzioni armoniche semplici di ampiezza infinitesima e frequenza variabile con continuità da $-\infty$ a ∞.

5 Qualcosa di più sulla Trasformata di Fourier

In questa sezione cercheremo di approfondire alcuni concetti base della TdF. La trattazione esaustiva di questi argomenti (per i quali si rimanda a Verrazzani (1982)) esula dagli scopi delle presenti note.
Il punto di partenza è la Trasformata Serie di Fourier (TSF) che si applica a segnali $s(t)$ periodici di periodo T_0 a potenza media finita ed energia infinita.
Usando la TSF si può trasformare il segnale $s(t)$ in una serie di segnali, detti componenti armoniche, del tipo:

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} e^{-i2\pi nt/T_0} dt \quad -\infty < n < \infty \tag{185}$$

che rappresentano la trasformata serie di Fourier in modo che il segnale di partenza sia ricavabile tramite la seguente antitrasformata serie:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{i2\pi nt/T_0} \tag{186}$$

La (186) va letta non come una uguaglianza vera per ogni t dal momento che i segnali ai due lati dell'uguaglianza possono essere diversi anche se solo su

un insieme di misura nulla.
Essendo $s(t)$ periodico di periodo T_0 ad entrambi gli estremi di integrazione della (185) si può sommare una stessa quantità t_0 allo scopo di facilitare il calcolo dell'integrale.
In genere i segnali S_n sono complessi in modo che si possa scrivere:

$$S_n = |S_n|e^{\theta_n} \tag{187}$$

in cui $|S_n|$ individua lo spettro di ampiezza e θ_n lo spettro di fase. Si ha:

(1) dalla (187) si ha $S_n^* = S_{-n}$

(2) ovvero $|S_n|e^{-i\theta_n} = |S_{-n}|e^{i\theta_{-n}}$

(3) da cui $|S_n| = |S_{-n}|$

(3) e $\theta_n = \theta_{-n}$

in modo che lo spettro di ampiezza sia un segnale pari e lo spettro di fase un segnale dispari. A conclusioni analoghe (Verrazzani (1982)) si arriva se si definisce S_n come composto da una parte reale ed una immaginaria ovvero come $S_n = R_n + iI_n$.
Se il periodo T_0 del segnale periodico $s(t)$ tende all'infinito (Verrazzani (1982)) il segnale tende a diventare aperiodico ed a coincidere con una singola ripetizione del segnale originario in modo che sia:

$$s(t) = lim_{T_0 \to \infty} rep_{T_0} s(t) \tag{188}$$

dove $rep_{T_0} s(t)$ indica la ripetizione di $s(t)$ ogni T_0 secondi. Si può dimostrare (Verrazzani (1982)) che la (185) e la (186) nel passaggio al limite si trasformano rispettivamente nella:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi nft} dt \tag{189}$$

che rappresenta la trasformata o TDF e nella:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi nft} dt \tag{190}$$

che rappresenta la antitrasformata di Fourier o $ATdF$.
La (189) e la (190) (vedi la sezione 4) si applicano a segnali ad energia finita (e potenza media nulla) per cui a rigore non si applicano ai segnali periodici. Prima di esaminare una estensione della TdF a tali segnali si presentano brevemente alcune proprietà della TdF che saranno utili nella sezione 6.

Tali proprietà sono presentate senza alcuna dimostrazione. Le dimostrazioni, del resto, sono ricavabili in molti casi dalla semplice applicazione della definizione.
Per semplicità di notazione si usa $S(t) = F(t)$ per denotare una funzione nel dominio del tempo t e $s(f)$ la corrispondente TdF, pedici sono usati con ovvi significati. Con $\Leftrightarrow$ si indica la corrispondenza fra una $S(t)$ e la sua $s(f)$.

(1) **Linearità**
Se $S_i(t) \Leftrightarrow s_i(f)$ si ha $\sum_i a_i S_i(t) \Leftrightarrow \sum_i a_i s_i(f)$ dove gli a_I sono termini costanti ovvero non dipendenti da t.

(2) **Dualità**
Se $S(t) \Leftrightarrow s(f)$ si ha $s(t) \Leftrightarrow S(-f)$

(3) **Cambiamento di scala** Se $a \in \mathbb{R}$ e se $S(t) \Leftrightarrow s(f)$ si ha:

$$S(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} s(\frac{f}{a}) \tag{191}$$

in modo che se $a > 1$ si ha una compressione sull'asse dei tempi ed una espansione sull'asse delle frequenze mentre se $a < 1$ si ha una espansione sull'asse dei tempi ed una compressione sull'asse delle frequenze.

(4) **Traslazione temporale**
Se $S(t) \Leftrightarrow s(f)$ si ha:

$$S(t - t_0) \Leftrightarrow s(f)e^{-i2\pi f t_0} \tag{192}$$

in modo che lo spettro di ampiezza del segnale resta invariato e lo spettro di fase viene modificato per un fattore lineare in f.

(5) **Traslazione in frequenza**
Se $S(t) \Leftrightarrow s(f)$ si ha:

$$S(t)e^{i2\pi f t_0} \Leftrightarrow s(f - f_0) \tag{193}$$

(6) **Derivazione in frequenza**
Se $S(t) \Leftrightarrow s(f)$ si ha:

$$(-i2\pi t)^n S(t) \Leftrightarrow \frac{d^n s(f)}{df^n} \tag{194}$$

(7) **Derivazione nel tempo**
Se $S(t) \Leftrightarrow s(f)$ si ha:

$$\frac{d^n S(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (i2\pi t)^n s(f) \tag{195}$$

(8) **Integrazione**
Se $S(t) \Leftrightarrow s(f)$ e $s(0) = 0$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{t} (\alpha) d\alpha \Leftrightarrow \frac{s(f)}{i2\pi f} \tag{196}$$

(9) **Coniugazione in t**
Se $S(t) \Leftrightarrow s(f)$ si ha $S^*(t) \Leftrightarrow s^*(-f)$ in cui con $*$ si denota l'operazione di coniugazione dei numeri complessi.

(10) **Convoluzione temporale**
Dati due segnali $X(t)$ e $Y(t)$ a energia finita le cui trasformate sono rispettivamente $x(f)$ e $y(f)$ si definisce prodotto di convoluzione il segnale seguente:

$$S(t) = X(t) \oplus Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) Y(t - \tau) d\tau \tag{197}$$

in modo che sia $s(f) \Leftrightarrow x(f)y(f)$. Il prodotto così definito è commutativo, distributivo rispetto alla somma e associativo. Se i segnali $X(t)$ e $Y(t)$ sono causali, ovvero assumono valori nulli per $t < 0$ gli estremi di integrazione diventano 0 e t nell'ordine.

(11) **Convoluzione in frequenza**
Dati due segnali $X(t)$ e $Y(t)$ a energia finita le cui trasformate sono rispettivamente $x(f)$ e $y(f)$ si ha $X(t)Y(t) \Leftrightarrow x(f) \oplus y(f)$.

(12) **Correlazione temporale**
Dati due segnali $X(t)$ e $Y(t)$ a energia finita le cui trasformate sono rispettivamente $x(f)$ e $y(f)$ si definisce con:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) Y^*(\tau - t) d\tau \tag{198}$$

la correlazione fra i due segnali. Il segnale $S(t)$ ha come TdF $x(f)y^*(f)$.

(12) **Correlazione in frequenza**
Dati due segnali $X(t)$ e $Y(t)$ a energia finita le cui trasformate sono rispettivamente $x(f)$ e $y(f)$ si definisce con:

$$x(f) \oplus y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) Y^*(\alpha - f) d\alpha \tag{199}$$

la correlazione fra i due segnali in modo che sia $X(t)Y^*(t) \Leftrightarrow x(f) \oplus y^*(f)$.

La TdF che abbiamo introdotto va bene nel caso di segnali ad energia finita e potenza media nulla. Vediamo di estendere tale definizione al caso di segnali (ovvero funzioni) ad energia infinita e potenza media finita.
L'estensione è possibile mediante l'introduzione della funzione $\delta(t)$ detta delta di Diraq (vedi la sezione 3.6). Tale funzione è stata introdotta tramite le sue proprietà:

(p_1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0-t)dt = f(t_0) \tag{200}$$

(p_2) $\delta(t) = \delta(-t)$

(p_3) se $f(t) = 1$ si ha:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \tag{201}$$

Si vede facilmente come la TdF della $\delta(t)$ sia:

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft}\delta(t)dt = 1 \tag{202}$$

per la antitrasformata si deve procedere in modo indiretto perché non è possibile applicare direttamente la definizione il cui integrale, in questo caso, non converge.
La $\Delta(f)$ può essere definita in modo analogo alla $\delta(t)$. Se si moltiplica la $g(f)$ di una funzione $G(t)$ per la $\Delta(f)$ si ottiene la trasformata del prodotto di convoluzione $G(t) \oplus \delta(t)$ ovvero:

$$G(t) \oplus \delta(t) = \delta(t) \tag{203}$$

in modo che sia:

$$g(f)\Delta(f) = \mathscr{F}\{G(t) \oplus \delta(t)\} = \mathscr{F}\{\delta(t)\} \tag{204}$$

Se $g(t) = \delta(t)$ da tale uguaglianza si ha:

$$\mathscr{F}^{-1}\{\Delta(f)\} = \delta(t) \tag{205}$$

in modo che l'antitrasformata della funzione $\Delta(f) = 1$ sia la $\delta(t)$.
Si è così dimostrato che $\mathscr{F}^{-1}\{\Delta(f)\} = \delta(t)$).
Dalla dualità e dal fatto che la $\delta(\cdot)$ è una funzione pari si può definire la $\delta(f)$ la cui antitrasformata è la funzione $F(t) = 1\ \forall t$.
Utilizzando la funzione generalizzata $\delta(\cdot)$ si possono pertanto determinare le

TdF di segnali ad energia infinita.
Ad esempio se $F(t) = A$ per $t \in \mathbb{R}$ la TdF vale $A\delta(f)$. Altri esempi di segnali ovvero funzioni ad energia infinita di cui si danno le TdF "generalizzate" sono i seguenti (Verrazzani (1982)):

(1) $e^{i2\pi f_0 t} \Leftrightarrow \delta(f - f_0)$

(2) $cos 2\pi f_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$

(3) $sen 2\pi f_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$

(4) $segn(t) \Leftrightarrow \frac{1}{i\pi f}$

(5) $u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2i\pi f}$

La funzione $segn(t)$ vale 1 per $t > 0$ e -1 per $t < 0$ mentre la relazione di cui al punto (5) deriva dalla seguente uguaglianza:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} segn(t) \tag{206}$$

6 La relazione fra la Trasformata di Laplace e la Trasformata di Fourier

L'analisi della relazione fra la TdL e la TdF viene eseguita in questa sezione in modo da appurare:

(1) l'esistenza di relazioni fra le relative definizioni;

(2) l'esistenza di relazioni fra le condizioni sufficienti di esistenza fra le due trasformate;

(3) il confronto fra le loro proprietà.

In merito al punto **(1)** (Spiegel (1976)) si può considerare la funzione seguente:

$$F(t) = \begin{cases} e^{-xt}\phi(t) \; t > 0 \\ 0 \; t < 0 \end{cases} \tag{207}$$

Se si considera la coppia asimmetrica della TdF si ha:

$$\mathscr{F}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-iyu} e^{-xu} \phi(u) du \tag{208}$$

ovvero:

$$\mathscr{F}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-su} \phi(u) du = L\{\phi(t)\} \tag{209}$$

avendo posto $s = x + iy$. Si è stabilita così una prima relazione fra le due trasformate. Se la (209) esiste per $x = 0$ (ovvero nel caso in cui per $t > 0$ $F(t) = \phi(t)$) allora le due trasformate coincidono.
Una seconda relazione è la seguente. Se si considerano due funzioni, la funzione $F(t)$ definita dalla (207) e una funzione $G(t)$ nulla per $t < 0$ è possibile scrivere la convoluzione invece che come:

$$F \oplus G = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(x-u)du = H(x) \tag{210}$$

come:

$$F \oplus G = \int_{0}^{t} F(u)G(x-u)du = H(x) \tag{211}$$

da cui, applicando membro a membro la TdF e la (209) si ha:

$$\mathscr{F}\{H(t)\} = \mathscr{F}\{F(t)\}\mathscr{F}\{G(t)\} = L\{F(t)\}\mathscr{F}\{F(t)\} \tag{212}$$

Un'altra relazione fra le due trasformate la si può stabilire nel modo che segue (Director and Rohrer (1972)).
Si considera una $F(t)$ arbitraria (anche per la quale la TdF non esiste) e si calcola la TdF della funzione $F(t)e^{-\sigma t}$. Si ha:

$$\mathscr{F}\{F(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-\sigma t}e^{i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt \tag{213}$$

ovvero:

$$\mathscr{F}\{F(t)e^{-\sigma t}\} = f(\sigma + i\omega) = f(s) \tag{214}$$

se definisco $s = \sigma + i\omega$ sotto l'ipotesi che l'integrale esista per qualche insieme di valori di σ.
In modo simile si può definire la trasformazione inversa:

$$F(t)e^{-\sigma t} = \mathscr{F}^{-1}\{f(\sigma + i\omega\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma + i\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{215}$$

ovvero:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f(s)e^{st}ds \tag{216}$$

avendo posto $s = \sigma + i\omega$ e $ds = id\omega$.
In questo modo si è definita una coppia trasformata÷antitrasformata del tipo:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-st}dt \tag{217}$$

e

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(s)e^{st}ds \qquad (218)$$

che definiscono la cosiddetta TdL bilatera (vedi anche l'Appendice). Si noti che il valore di σ nella (218) è assunto essere nel range di valori per i quali l'integrale della (217) converge e la $f(s)$ esiste.
Si noti, infine, che se la $f(s)$ esiste per $\sigma = 0$ la TdL (bilatera) e la TdF sono essenzialmente la stessa cosa.
In merito al punto **(2)** dalle condizioni sufficienti di esistenza che si sono viste:

- per la TdL nella sezione 3.4
- per la TdF nella sezione 4,

si può osservare che:

(oss_1) se una funzione ammette TdF allora ammette anche TdL unilatera o bilatera;

(oss_2) in modo equivalente, se una funzione non ammette TdL unilatera o bilatera allora non ammette neanche TdF;

(oss_3) esistono funzioni che ammettono TdL ma non TdF.

Esempi di funzioni relativi al punto (oss_2) sono forniti da funzioni che non sono di ordine esponenziale. Altri esempi significativi (che ricadono anche sotto l'(oss_3)) sono forniti da:

- segnali periodici ovvero segnali a energia infinita e potenza finita la cui TdF esiste solo con l'estensione vista;
- segnali a energia infinita e potenza infinita.

Un esempio di funzione relativa al punto (oss_3) è dato dalla:

$$F(t) = \begin{cases} 0 \, t < 0 \\ e^{at} \, t \geq 0 \end{cases} \qquad (219)$$

In merito al punto **(3)** il punto di partenza è la tabella 1 in cui si elencano le principali proprietà e si indica se sono verificate (Y) o meno (N) dalle due trasformate. Le proprietà elencate sono riferite alla TdF (che pertanto le soddisfa tutte). Alcune di questa non hanno significato per la TdL. Queste proprietà sono segnalate usando il carattere $-$ nella casella corrispondente.

Il fatto che le due trasformate condividano una proprietà non vuol dire, in generale, che questa abbia lo stesso significato nei due casi. Per il confronto si considera la coppia classica $TdL/ATdL$ definita come:

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \tag{220}$$

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s) ds \tag{221}$$

mentre per la TdF si considera la seguente coppia $TdF/ATdF$ (Verrazzani (1982)):

$$s(f) = \mathscr{F}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} F(t) dt \tag{222}$$

$$F(t) = \mathscr{F}^{-1}\{s(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} s(f) df \tag{223}$$

Si fa notare che:

Proprietà	TdF	TdL
linearità	Y	Y
dualità	Y	-
cambiamento di scala	Y	Y
traslazione in t	Y	Y
traslazione in f o s	Y	Y
derivazione in frequenza	Y	Y
derivazione nel tempo	Y	Y
integrazione	Y	Y
convoluzione in t	Y	Y
coniugazione in t	Y	Y
convoluzione in f	Y	-
correlazione in t	Y	Y
correlazione in f	Y	-

Tabella 1: *Tabella sinottica fra TdL e TdF*

(n_1) la dualità della TdF non ha riscontro nella TdL;

(n_2) il cambiamento di scala nella TdL ha senso solo per valori positivi del parametro;

(n_3) le proprietà di traslazione abbiano, nella TdF, interpretazioni fisiche che sono assenti nelle analoghe proprietà della TdL;

(n_4) la derivazione nel tempo abbia significato diverso nelle due trasformate.

In merito alla **coniugazione in** t si fa notare che nel caso della TdF dalla definizione si ha che se $S(t)$ ha come TdF $s(f)$ allora $S^*(t)$ ha come TdF $s^*(-f)$ in modo che se $S(t)$ è reale si ha $s(-f) = s^*(f)$. Vediamo ora che significato assume la stessa proprietà per la TdL.
Nel caso della TdL un segnale reale coincide con il suo coniugato per cui la trasformata è la stessa.
Se il segnale $S(t)$ è complesso lo si può scrivere come composto da una parte reale ed una immaginaria:

$$S(t) = S(t)_R + iS(t)_I \tag{224}$$

in modo che sia:

$$S^*(t) = S(t)_R - iS(t)_I \tag{225}$$

Applicando la TdL alla (224) si ottiene:

$$f(s) = L\{S(t)\} = L\{S(t)_R\} + iL\{S(t)_I\} \tag{226}$$

ed applicandola alla (225) si ottiene:

$$f^*(s) = L\{S^*(t)\} = L\{S(t)_R\} - iL\{S(t)_I\} = L^*\{S(t)\} \tag{227}$$

Si è pertanto verificato come la stessa proprietà abbia significato diverso per le due trasformate.

Esempio 6.1 *Se si ha* $F(t) = e^{it}$ *si ha:*

$$L\{e^{it}\} = \frac{1}{s-i} \tag{228}$$

e quindi:

$$L\{e^{-it}\} = \frac{1}{s+i} = L^*\{e^{it}\} \tag{229}$$

Ovviamente si sottende l'ipotesi che nella TdL si considera $s \in \mathbb{R}$.
In merito alla **correlazione temporale** si fa notare che la TdL della $X(t) \oplus Y^*(t)$ è:

$$L\{X(t)\}L\{Y^*(-t)\} = x(s)L\{Y^*(-t)\} \tag{230}$$

per cui si deve valutare $L\{Y^*(-t)\}$ come:

$$L\{Y^*(-t)\} = \int_0^\infty e^{-st} Y^*(-t) dt \tag{231}$$

Se anche si considera $Y(t)$ reale la asimmetria degli estremi di integrazione ci impedisce di andare oltre. Nel caso della TdL bilatera si ha:

$$L\{Y^*(-t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-st} Y^*(-t) dt \tag{232}$$

Ponendo $u = -t$ si ha:

$$L\{Y^*(-t)\} = \int_\infty^{-\infty} e^{su} Y^*(u)(-du) \tag{233}$$

ovvero:

$$L\{Y^*(-t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{su} Y^*(u) du \tag{234}$$

Se si suppone $Y(t)$ reale e si ha:

$$y(s) = L\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-su} Y(u) du \tag{235}$$

la (234) coincide con $y(-s)$.

7 Le applicazioni della Trasformata di Laplace

Nelle sezioni che seguono presenteremo alcune applicazioni della TdL alle seguenti classi di problemi (Spiegel (1976), Rainville (1963) e Kuhfittig (1978)):

sezione 8: equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti e condizioni iniziali note;

sezione 9: sistemi di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti e condizioni iniziali note;

sezione 10: equazioni differenziali alle derivate parziali;

sezione 11: equazioni integrali di tipo convoluzione e di altri tipi particolari.

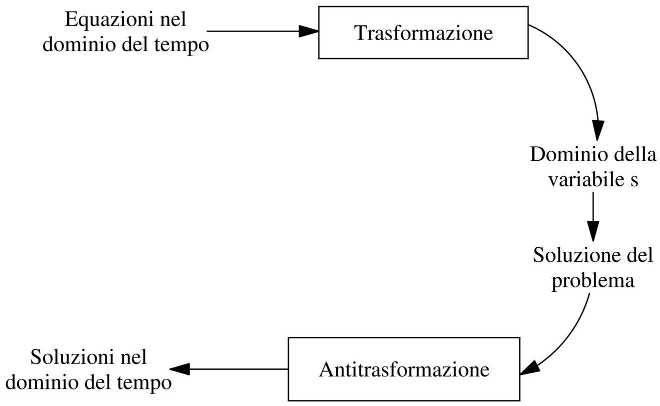

Figura 1: *Il "metodo di Laplace"*

In tutti i casi suddetti la filosofia di fondo è quella illustrata in figura 1. In figura 1 si illustra il cosiddetto "metodo di Laplace" basato sui passi eseguenti:

(1) il punto di partenza è un problema descritto mediante un certo numero di equazioni nel dominio del tempo t che coinvolgono un certo numero di funzioni incognite che rappresentano la soluzione cercata;

(2) alle equazioni suddette si applica la TdL ottenendo una o più equazioni nella variabile s che contengono le TdL (di nuovo funzioni incognite) delle funzioni suddette;

(3) le equazioni vengono risolte in modo da ricavare espressioni delle funzioni cercate in funzione della variabile s;

(4) tali espressioni sono antitrasformate con tecniche note o con l'uso della formula di antitrasformazione in modo da ricavare le espressioni in funzioni del tempo delle originarie funzioni incognite e risolvere così il problema di partenza.

8 Le applicazioni della TdL (1): le equazioni differenziali ordinarie

In questa sezione si esamina brevemente l'uso della TdL per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti. Vedremo brevemente anche come sia possibile risolvere equazioni differenziali ordinarie

a coefficienti variabili (ovvero funzioni del tempo) qualora questi assumano forme particolari.
Per la risoluzione si fa uso essenzialmente di del **teorema delle derivate**, della linearità della TdL e delle tecniche di antitrasformazione.
Le tecniche presentate in questa sezione possono essere usate per risolvere problemi in campi applicativi quali (Spiegel (1976)):

- meccanica,
- circuiti elettrici,
- analisi delle travi.

La filosofia del metodo è la seguente. Si abbia una equazione differenziale alle derivate ordinarie di ordine n del tipo:

$$a_n Y^{(n)} + a_{n-1} Y^{(n-1)} + \cdots + a_0 Y = F(t) \tag{236}$$

dove:

1. la Y è una funzione di t come la F e rappresenta l'incognita del nostro problema;
2. con $Y^{(i)}$ si denota la $\frac{d^i Y(t)}{dt^i}$;
3. gli a_i sono coefficienti costanti e indipendenti da t;
4. sono note n condizioni iniziali o al contorno $Y(0), \ldots, Y^{(n-1)}(0)$;
5. la $F(t)$ è una funzione nota di cui si conosce la TdL.

Applicando il teorema (3.6) si può trasformare la (236) ottenendo una equazione algebrica in s in cui compare la TdL $y(s)$. Risolvendo tale equazione rispetto alla $y(s)$ e antitrasformando si ricava la $Y(t)$ cercata.
La difficoltà del procedimento risiede pertanto nel passo di antitrasformazione che può richiede, in generale, la determinazione delle radici di un polinomio di grado n nella variabile s ovevro almeno la determinazione dei termini quadratici che lo compongono per cui il metodo mantiene piena fattibilità generale per equazioni differenziali di ordine non troppo elevato. In genere lo si applica a equazioni differenziali del secondo ordine (che si usano, ad esempio, nell'analisi dei circuiti elettrici e in meccanica) fino a quelle del quarto ordine (che si usano, ad esempio, nell'analisi delle travi).

Esempio 8.1 *Supponiamo di dover risolvere la seguente equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti:*

$$Y'' + Y = t \tag{237}$$

con le condizioni al iniziali e al contorno:

$$Y(0) = 1$$

$$Y'(0) = -2$$

Applicando il teorema (3.6) si ottiene:

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = \frac{1}{s^2} \tag{238}$$

ovvero, sostituendo i valori iniziali e al contorno:

$$s^2 y(s) - s + 2 + y(s) = \frac{1}{s^2} \tag{239}$$

da cui:

$$y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} \tag{240}$$

da cui, applicando il metodo delle frazioni parziali, si ha:

$$y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} \tag{241}$$

da cui, infine:

$$Y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = t + cost - 3sent \tag{242}$$

Esempio 8.2 *Supponiamo di dover risolvere la seguente equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti:*

$$Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t}sent \tag{243}$$

con le condizioni al iniziali e al contorno:

$$Y(0) = 0$$

$$Y'(0) = 1$$

Applicando il teorema (3.6) si ottiene:

$$s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + 2(sy(s) - Y(0)) = \frac{1}{(s^2+1)+1} \tag{244}$$

ovvero, sostituendo i valori iniziali e al contorno e raggruppando i fattori comuni:

$$s^2y(s) + 2sy(s) + 5y(s) - 1 = \frac{1}{(s^2+1)+1} \tag{245}$$

da cui, esplicitando $y(s)$ ed applicando il metodo delle frazioni parziali:

$$y(s) = \frac{2}{3}\frac{1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{(s+1)^2+1} \tag{246}$$

Applicando la antitrasformata si ha:

$$Y(t) = \frac{1}{3}e^{-t}(sent + sen2t) \tag{247}$$

Il metodo può essere applicato se gli a_i non sono costanti ma assumono una forma particolare tipo la seguente:

$$t^mY^{(n)}(t) \tag{248}$$

la cui TdL è:

$$(-1)^m\frac{d^m}{ds^m}L\{Y^{(n)}(t)\} \tag{249}$$

Per la risoluzione in questo caso si applicano i teoremi 3.6 e 3.8.

Esempio 8.3 *Supponiamo di dover risolvere la seguente equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti variabili:*

$$tY'' + Y' + 4tY = 0 \tag{250}$$

con le condizioni al iniziali e al contorno:

$$Y(0) = 3$$

$$Y'(0) = 0$$

Applicando i teoremi 3.6 e 3.8 si ha:

$$-\frac{d}{ds}(s^2y(s) - sY(0) - Y'(0)) + (sy(s) - Y(0)) - 4\frac{dy}{ds} = 0 \tag{251}$$

ovvero, applicando le condizioni al iniziali e al contorno e con alcuni semplici passaggi:

$$\frac{dy}{y} + \frac{s}{s^2+4}ds = 0 \tag{252}$$

Integrando la (252) si ottiene:

$$lny + \frac{1}{2}ln(s^2+4) = c_1 \tag{253}$$

con c_1 *costante di integrazione, ovvero:*

$$lny\sqrt{(s^2+4)} = c_1 \tag{254}$$

e infine:

$$y(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2+4}} \tag{255}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$Y(t) = cJ_0(2t) \tag{256}$$

in cui compare la funzione di Bessel di ordine 0*. La costante di integrazione* c *la si determina dalla condizione iniziale* $Y(0) = 3$ *in modo che sia* $Y(0) = cJ_0(0) = c = 3$ *e quindi:*

$$Y(t) = 3J_0(2t) \tag{257}$$

Osservazione 8.1 *La funzione di Bessel di ordine* n *(Spiegel (1976)) è definita come segue:*

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\{1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \ldots\} \tag{258}$$

Nella (258) compare la funzione gamma definita come:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du \tag{259}$$

Si noti che si ha: Si noti che si ha:

$\Gamma(n+1) = \Gamma(n)$ *per* $n > 0$

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(n+1) = n!$

9 Le applicazioni della TdL (2): i sistemi di equazioni differenziali ordinarie

Questa sezione (molto breve) si basa sul contenuto della sezione 8. Useremo le tecniche ivi presentate applicate a sistemi di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti composti da un numero di equazioni pari al numero delle funzioni incognite da definire.
Il metodo prevede che si applichi il procedimento descritto nella sezione 8 a ciascuna delle equazioni differenziali del sistema dato. Il passo successivo è ricavare una dietro l'altra le TdL delle varie funzioni incognite da cui ricavare le corrispondenti funzioni nella variabile t mediante la ripetuta applicazione delle tecniche di antitrasformazione.
In base a quanto sopra la presente sezione contiene solo un esempio.

Esempio 9.1 *Si abbia il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine:*

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = 2X(t) - 3Y(t) \\ \frac{dY(t)}{dt} = Y(t) - 2X(t) \end{cases} \tag{260}$$

con le condizioni $X(0) = 8$ *e* $Y(0) = 3$ *(Spiegel (1976)).*
Se si calcolano le TdL *delle due equazioni e si applicano le condizioni suddette si ha, con semplici passaggi:*

$$\begin{cases} (s-2)x(s) + 3y(s) = 8 \\ 2x(s) + (s-1)y(s) = 3 \end{cases} \tag{261}$$

Con metodi classici di risoluzione dei sistemi di equazioni si ha:

$$\begin{cases} x(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4} \\ \\ y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4} \end{cases} \tag{262}$$

e antitrasformando:

$$\begin{cases} X(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ \\ Y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{cases} \tag{263}$$

Si fa notare come per ricavare le antitrasformate che ci permettono di ricavare le (263) si sia fatto uso del primo teorema di traslazione.

10 Le applicazioni della TdL (3): le equazioni differenziali alle derivate parziali

Vedremo alcune applicazioni della TdL per la risoluzione di semplici problemi al contorno.
Prima di procedere abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari (Spiegel (1976)).
In quanto segue supporremo di avere una funzione $U(x,t)$ definita per $a \leq x \leq b$ e $t > 0$ e di ordine esponenziale.

(1) Si voglia calcolare la:

$$L\{\frac{\partial U}{\partial t}\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}dt \tag{264}$$

Integrando per parti si ha:

$$L\{\frac{\partial U}{\partial t}\} = e^{-st}U(x,t)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}U(x,t)dt = su(x,s) - U(x,0) \tag{265}$$

in cui $u(x,s) = L\{U(x,t)\}$.

(2) Si voglia calcolare la:

$$L\{\frac{\partial U}{\partial x}\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial x}dt \tag{266}$$

Usando la regola di Leibniz di derivazione sotto segno di integrale già vista e considerando che gli estremi di integrazione non dipendono da t si ha:

$$L\{\frac{\partial U}{\partial x}\} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}U(x,t)dt = \frac{d}{dx}u(x,s) \tag{267}$$

(3) Si voglia calcolare la:

$$L\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\} \tag{268}$$

Se si pone $V = \frac{\partial U}{\partial t}$ si ha, usando la (264):

$$L\{\frac{\partial V}{\partial t}\} = sL\{V\} - V(x,0) \tag{269}$$

e applicando lo stesso risultato alla $V = \frac{\partial U}{\partial t}$ e sostituendo si ha:

$$L\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\} = s[sL\{U\} - u(x,0) - U_t(x,0) = s^2L\{U\} - su(x,0) - U_t(x,0) \tag{270}$$

in cui è $U_t(x,0) = \frac{\partial U}{\partial t}_{|t=0}$ In questo caso è facile vedere una analogia con il teorema delle derivate per le equazioni differenziali ordinarie.

(4) Si voglia calcolare la:

$$L\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\} \tag{271}$$

Se, di nuovo, si pone $V = \frac{\partial U}{\partial x}$ si ha:

$$L\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\} = L\{\frac{\partial V}{\partial x}\} = \frac{dv}{dx} \tag{272}$$

dove per l'ultima uguaglianza a destra si è usato il risultato espresso dalla (267). Dalla definizione di V si ha:

$$v = L\{V\} = L\{\frac{\partial U}{\partial x}\} \tag{273}$$

sempre dal risultato espresso dalla (267), per cui:

$$L\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\} = \frac{d^2 u(x,s)}{dx^2} \tag{274}$$

Prima di presentare due esempi si fa notare che (Rainville (1963)) nel caso di un problema al contorno che comporta l'uso di equazioni differenziali alle derivate parziali, la TdL può:

- fornire un efficace metodo di risoluzione;
- fornire informazioni aggiuntive sulla soluzione quando altre tecniche (ad esempio metodi di separazione delle variabili e serie di Fourier) rappresentano tecniche di più facile utilizzo;
- rappresentare solo una inutile complicazione.

È possibile capire (Kuhfittig (1978)) se merita o meno cercare di risolvere un problema che richiede l'uso di equazioni differenziali alle derivate parziali con la TdL verificando se sono soddisfatte o meno le seguenti condizioni:

- l'equazione differenziale è lineare (condizione necessaria);
- l'equazione differenziale ha coefficienti costanti (condizione altamente desiderabile);
- almeno una variabile indipendente assume valori un range $[0,\infty)$ (condizione altamente desiderabile);

- si hanno condizioni iniziali (per $t = 0$) che riguardano tale variabile indipendente (condizione desiderabile).

Vedremo dagli esempi come le ultime tre condizioni possano essere violate senza che ciò ci impedisca di trovare la soluzione cercata.

Esempio 10.1 *Si voglia risolvere la seguente equazione differenziale alle derivate parziali:*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\frac{\partial U}{\partial t} + U(x,t) \tag{275}$$

con:

$$U(x,0) = 6e^{-3x} \tag{276}$$

e $u = u(x,s) = L\{U(x,t)\}$.
Applicando la TdL ed i risultati preliminari si ha:

$$\frac{du}{dx} = 2(su - U(x,0)) + u \tag{277}$$

ovvero:

$$\frac{du}{dx} - (2s+1)u = -12e^{-3x} \tag{278}$$

In questo modo si è trasformata una equazione differenziale alle derivate parziali in una equazione differenziale ordinaria.
In questo caso semplice si ha il seguente fattore integrale:

$$e^{-(2s+1)x} \tag{279}$$

in modo che la (278) diventa:

$$\frac{d}{dx}(ue^{-(2s+1}x)) = -12e^{-(2s+4)x} \tag{280}$$

Integrando si ha:

$$ue^{-(2s+1)x} = \frac{6}{s+2}e^{-(2s+4)x} + C \tag{281}$$

ovvero:

$$u(x,s) = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + Ce^{(2s+1)x} \tag{282}$$

Dal momento che $U(x,t)$ *deve essere limitata per* $x \to \infty$ *si ha che la* $u(s,x)$ *deve essere limitata per* $x \to \infty$ *per cui si ha* $C = 0$ *in modo che sia:*

$$u(x,s) = \frac{6}{s+2}e^{-3x} \tag{283}$$

Antitrasformando la (283) si ha la soluzione cercata:

$$U(x,t) = 6e^{-(2t+3x)} \tag{284}$$

Esempio 10.2 *Si voglia risolvere la seguente equazione differenziale alle derivate parziali:*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{285}$$

con le condizioni

$$0 < x < 1$$

$$t > 0$$

$$U(x, 0) = 3sen2\pi x$$

$$U(0, t) = 0$$

$$U(1, t) = 0$$

La (285) descrive la situazione di un solido delimitato da due facce piane infinite poste a $x = 0$ e $x = 1$ mentre la $U(x, t)$ descrive la diffusione della temperatura su un piano x all'istante t.
Applicando i risultati preliminari si ha:

$$su - U(x, 0) = \frac{d^2 u}{dx^2} \tag{286}$$

ovvero:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - su = -3sen2\pi x \tag{287}$$

la cui soluzione generale è la seguente:

$$u = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s + 4\pi^2} sen2\pi x \tag{288}$$

Applicando le condizioni:

$$L\{U(0, t)\} = u(0, s) = 0$$

$$L\{U(1, t)\} = u(1, s) = 0$$

si ricava che deve essere $c_1 = c_2 = 0$ per cui è:

$$u(x, s) = \frac{3}{s + 4\pi^2} sen2\pi x \tag{289}$$

ed antitrasformando si ha:

$$U(x, t)) = 3e^{-4\pi^2 t} sen2\pi x \tag{290}$$

Esempio 10.3 *Vediamo ora il caso di una corda perfettamente flessibile di lunghezza finita l posta lungo l'asse x e fissata solidamente alle sue estremità. Se T è la tensione costante in ogni punto della corda e ρ la massa per unità di lunghezza si fanno le seguenti assunzioni:*

- *la tensione T è grande rispetto al peso della corda per cui si trascurano gli effetti della forza gravitazionale;*

- *lo spostamento dei punti della corda $Y(x,t)$ è piccolo rispetto a l (lunghezza della corda) in modo che la lunghezza è supposta costante;*

- *ogni punto P sulla corda si muove solo in direzione dell'asse Y ovvero le vibrazioni sono solo trasversali.*

Se si indica con:

$$a = (\frac{T}{\rho})^{\frac{1}{2}} \tag{291}$$

la costante di propagazione si ha che il moto della corda è descritto dalla seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial Y(x,t)}{\partial x^2} \tag{292}$$

in cui $Y(x,t)$ rappresenta lo spostamento in direzione dell'asse Y del punto in posizione x all'istante t.
Usando la TdL si può trasformare tale equazione in una equazione differenziale ordinaria, risolverla e trovare la soluzione dell'equazione di partenza con tecniche di antitrasformazione.
Nel presente caso si suppone di avere una corda tesa di lunghezza finita e fissata in $x = 0$ e $x = l$ alla quale all'istante $t = 0$ si impone una configurazione:

$$F(x) = \mu x(l - x) \tag{293}$$

Si vuole quindi risolvere l'equazione:

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial Y(x,t)}{\partial x^2} \tag{294}$$

con le condizioni iniziali e al contorno:

(a) $Y(0,t) = 0$

(b) $Y(1,t) = 0$

(c) $Y(x,0) = \mu x(l - x)$

(d) $Y_t = \frac{\partial Y}{\partial t}(x, 0 = 0)$

La condizione (c) impone che la corda sia tesa verso l'alto (ovvero nel verso delle Y *positive) a formare una arco di parabola vincolato alle estremità e che assume il valore massimo nel punto di mezzo della corda.*
Se si pone $y = y(x, s) = L\{Y(x, t)\}$ *e si applica la* TdL *alla (294) si ha:*

$$s^2y - sY(x, 0) - Y_t(x, 0) = a^2\frac{d^2y}{dx^2} \tag{295}$$

Sostituendo le condizioni iniziali e al contorno e manipolando un pò si ottiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}y = -\frac{\mu sx(l - x)}{a^2} \tag{296}$$

con:

$$y(0, s) = 0$$

$$y(l, s) = 0$$

Risolvendo la (296) si ottiene una espressione della $y(x, s)$ *la cui antitrasformata (ottenuta applicando le tecniche di cui alla sezione 3.11) può essere espressa come:*

$$Y(x, t) = \frac{8\mu l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} Y_n = \frac{8\mu l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}sen\frac{(2n-1)\pi x}{l}cos\frac{(2n-1)\pi at}{l} \tag{297}$$

Dalla (297) si vede come il moto di ciascun punto della corda possa essere descritto dalla somma di infinite armoniche Y_n *nello spazio e nel tempo di ampiezza decrescente come* $\frac{1}{n^3}$*. Se si fissa un valore* x *si studia il moto (infinito dato che non si sono introdotti termini di attrito o smorzamento) di un punto al variare del tempo mentre se si fissa* t *si può analizzare la configurazione della corda in quell'istante.*
Si noti che agli istanti in cui:

$$cos\frac{(2n-1)\pi at}{l} = 0 \tag{298}$$

la corda si "adagia" sull'asse delle x *mentre i punti tali che:*

$$sen\frac{(2n-1)\pi x}{l} = 0 \tag{299}$$

sono i punti fissi della corda ovvero quelli in cui la corda non si sposta mai dall'asse delle x*. Due di tali punti si hanno per* $x = 0$ *e* $x = l$ *come è giusto*

che sia.
Per $n = 1$ si ha la cosiddetta armonica fondamentale:

$$Y_1 = \frac{8\mu l^2}{\pi^3} sen\frac{\pi x}{l} cos\frac{\pi a t}{l} \tag{300}$$

i cui punti fissi si hanno per:

$$sen\frac{\pi x}{l} = 0 \tag{301}$$

ovvero per:

$$\frac{\pi x}{l} = k\pi \tag{302}$$

e quindi solo per $x = 0$ e $x = l$.

11 Le applicazioni della TdL (4): alcune equazioni integrali

Le **equazioni integrali**[4] (Spiegel (1976)) hanno la forma:

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t)Y(u)du \tag{303}$$

in cui:

- le funzioni $F(t)$ e $K(u,t)$ (nucleo dell'equazione integrale) sono note;
- la funzione $Y(t)$ è la nostra incognita:
- i parametri a e b sono noti.

In merito ai parametri si hanno i due casi particolari:

(1) a e b costanti, l'equazione integrale si dice di Fredholm;

(2) a costante e $b = t$, l'equazione integrale si dice di Volterra.

La tecnica classica di risoluzione della (303) mediante la TdL prevede che la si derivi ripetutamente rispetto al tempo usando la regola di Leibnitz:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} K(u,t)du = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K}{\partial t}du + K(b(t),t)\frac{db}{dt} - K(a(t),t)\frac{da}{dt} \tag{304}$$

[4]È possibile usare la TdL anche per risolvere equazioni integro-differenziali, equazioni alle differenze ed equazioni differenziali alle differenze la cui trattazione esula dall'ambito delle presenti note. Per dettagli si rimanda a Spiegel (1976).

fino ad arrivare ad una equazione differenziale in cui non compaiono più integrali. Tale equazione differenziale (di cui si possono calcolare le necessarie condizioni iniziali ad ogni passo di derivazione) può essere quindi risolta con i metodi classici della TdL.

Esempio 11.1 *Si voglia risolvere la seguente equazione integrale:*

$$Y(t) = 3t - 4 - 2sent + \int_0^t ((t-u)^2 - 3(t-u) + 2)Y(u)du \tag{305}$$

con la condizione iniziale $Y(0) = -4$.
Eseguendo i passi seguenti, ogni volta applicando la regola di Leibnitz:

- *calcolo di* $Y'(t)$ *con* $Y'(0)$,
- *calcolo di* $Y''(t)$ *con* $Y''(0)$,
- *calcolo di* $Y'''(t)$,

si arriva ad una equazione differenziale in cui non compare più il simbolo di integrale:

$$Y'''(t) - 2Y''(t) + 3Y'(t) - 2Y(t) = 2cost \tag{306}$$

che può essere risolta con tecniche di trasformazione e antitrasformazione.

Si fa notare che non tutte le equazioni integrali del tipo della (303) sono trasformabili in equazioni differenziali per cui il metodo visto non è di applicabilità generale.
Un altro tipo di equazioni integrali che descriveremo brevemente sono le **equazioni integrali tipo convoluzioni** che hanno la forma seguente:

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du \tag{307}$$

ovvero:

$$Y(t) = F(t) + K(t) \oplus Y(t) \tag{308}$$

in cui $\oplus$ indica il prodotto di convoluzione fra due funzioni. Se tutte le funzioni che compaiono nella (308) ammettono TdL si ha:

$$y(s) = f(s) + k(s)y(s) \tag{309}$$

ovvero:

$$y(s) = \frac{f(s)}{1 - k(s)} \tag{310}$$

La $Y(t)$ cercata può essere ricavata dalla (310) mediante tecniche di antitrasformazione.

Esempio 11.2 *Si voglia risolvere la seguente equazione integrale tipo convoluzione:*

$$Y(t) = t^2 + \int_0^t Y(u) sen(t-u) du \tag{311}$$

che si può scrivere come:

$$Y(t) = t^2 + Y(u) \oplus sen(t) \tag{312}$$

Applicando la TdL alla (312) si ha:

$$y(s) = \frac{2}{s^3} + y(s)\frac{1}{s^2+1} \tag{313}$$

da cui, con semplici passaggi:

$$y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5} \tag{314}$$

Antitrasformando si ha:

$$Y(t) = t^2 + \frac{t^4}{12} \tag{315}$$

Appendice: le varie forme della Trasformata di Laplace

Nelle presenti note si è fatto riferimento alla TdL delle funzioni $F(t)$ definita come:

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \tag{316}$$

cui corrisponde la seguente formula di antitrasformazione:

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s) ds \tag{317}$$

Il più piccolo valore di σ per cui la $f(s)$ esiste rappresenta la ascissa di convergenza e individua un semipiano in $\mathbb{C}$ ovvero il semipiano $Re(s) > \sigma_m in$).
In questo modo si definisce la TdL unilatera o one-sided. È possibile definire anche la TdL bilatera o two-sided (Director and Rohrer (1972)). In tal caso si ha:

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-st} F(t) dt \tag{318}$$

e:

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s) ds \tag{319}$$

Riferimenti bibliografici

Stephen W. Director and Ronald A. Rohrer. *Introduction to System Theory*. McGraw-Hill, 1972.

Peter K. F. Kuhfittig. *Introduction to the Laplace Transform*. Plenum Press, 1978.

Earl D. Rainville. *The Laplace Transform. An Introduction.* MacMillan Mathematics Paperbacks, 1963.

Murray R. Spiegel. *Trasformate di Laplace*. Etas Libri, 1976.

Lucio Verrazzani. *Teoria dei Segnali. Segnali determinati*. ETS, 1982.